Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова

Международная конференция «Актуальные проблемы математической физики»

К 95-летию профессора А.Г. Свешникова и 80-летию профессора В.Ф. Бутузова

27–30 ноября 2019 г.

Сборник тезисов докладов

Физический факультет и НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова

Москва, Россия

Lomonosov Moscow State University

International conference "Actual problems of mathematical physics"

For 95th anniversary of professor A.G. Sveshnikov & 80th anniversary of professor V.F. Butuzov

November 27 – 30, 2019

Abstracts of the conference

Physics Faculty and RCC
Lomonosov Moscow State University

Moscow, Russia

Международный программный комитет

Н. Н. Нефедов (председатель)	—	профессор, зав. кафедрой математики физического факультета МГУ;
В. В. Воеводин	—	профессор, директор НИВЦ МГУ;
Н. Н. Сысоев	—	профессор, декан физического факультета МГУ;
А. Н. Боголюбов	—	профессор физического факультета МГУ;
С. А. Кащенко	—	профессор, проректор Ярославского Государственного Университета, Ярославль, Россия;
М. К. Ни	—	профессор, Восточно-китайский Университет, Шанхай, КНР;
Е. О'Риордан	—	профессор, Университет г. Дублин, Ирландия;
Л. Рекке	—	профессор, Университет им. Гумбольдтов, Берлин, Германия;
Н. А. Тихонов	—	профессор физического факультета МГУ;
А. В. Тихонравов	—	профессор НИВЦ МГУ;
А. Г. Ягола	—	профессор физического факультета МГУ.

Организационный комитет

А. Г. Ягола (председатель)	—	профессор физического факультета МГУ;
В. Т. Волков (зам. председателя)	—	доцент физического факультета МГУ;
И. Е. Могилевский (зам. председателя)	—	доцент физического факультета МГУ;
А. А. Панин (ученый секретарь)	—	доцент физического факультета МГУ;
Н. Т. Левашова	—	доцент физического факультета МГУ;
Д. В. Лукьяненко	—	доцент физического факультета МГУ;
М. А. Терентьев	—	ст. н. сотр. физического факультета МГУ;
Н. Е. Шапкина	—	доцент физического факультета МГУ;
М. Н. Волкова (секретарь)	—	вед. электроник физического факультета МГУ.

Страница конференции в Интернет:
http://math.phys.msu.ru/actual-problems-2019

Электронная почта конференции:
actualproblems@physics.msu.ru

В разделах тезисов докладчики
отмечены подчёркиванием

Содержание

К девяностопятилетию Алексея Георгиевича Свешникова

19 ноября 2019 года исполняется 95 лет известному ученому, заслуженному деятеля науки РСФСР, лауреату Государственной премии СССР, лауреату Ломоносовской премии МГУ за педагогическую деятельность, академику Российской Академии Естественных Наук, доктору физико-математических наук, заслуженному профессору Московского университета Алексею Георгиевичу Свешникову.

Алексей Георгиевич Свешников родился 19 ноября 1924 года в городе Саратове в семье профессора Саратовского университета Георгия Николаевича Свешникова.

А.Г. Свешников

Участник Великой Отечественной войны, А.Г. Свешников с честью выполнил свой долг перед Родиной. В суровое военное время в апреле 1945 года он был тяжело ранен на 4-м Украинском фронте. За отвагу и доблесть Алексей Георгиевич был награжден орденами «Красная звезда» и «Отечественная война 1-й степени», медалью «За победу над Германией», а позднее многими юбилейными медалями.

В 1945 году после демобилизации Алексей Георгиевич поступил на физический факультет МГУ, который окончил в 1950 году и был принят в аспирантуру кафедры математики физического факультета. Он прямой ученик выдающегося математика академика Андрея Николаевича Тихонова, который оказал определяющее влияние на научную и педагогическую деятельность Алексея Георгиевича.

Профессор А.Г. Свешников — крупнейший специалист в области математической физики, прикладной и вычислительной электродинамики. Он создал большую, активно работающую научную школу. Под его руководством защищено 45 кандидатских диссертаций. Среди его учеников 15 докторов физико-математических наук.

Большой цикл работ А.Г. Свешникова посвящен математическим проблемам электродинамики, в частности, математическим задачам электродинамики волноведущих и излучающих систем. Его кандидатская диссертация «Принципы излучения и единственность решения задач дифракции», защищенная в 1953 году, была посвящена исследованию корректности математической постановки краевых задач теории установившихся колебаний. Глубокое и всестороннее исследование А.Г. Свешниковым общего принципа предельного поглощения позволило доказать теоремы единственности для внешних задач теории установившихся колебаний в электродинамике, акустике, теории упругости. Алексеем Георгиевичем были введены «парциальные» условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции позволяют редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями, что оказалось наиболее эффективным для построения численных алгоритмов решения данного класса задач. В своей докторской диссертации «Методы исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах», защищенной в 1963 году, Алексей Георгиевич развил эффективные алгоритмы исследования волноведущих систем, основанные на разработанных им проекционных методах решения широкого круга задач математической физики, возникающих при математическом моделировании радиоволноводов и в теории дифракции в неоднородных средах. А.Г. Свешниковым был предложен общий принцип формулировки проекционных соотношений неполного метода Галеркина, при котором имеет место сходимость метода в энергетических нормах операторов с разрывными коэффициентами. Исследование этого принципа позволило дать обоснование неполного метода Галеркина для достаточно общего класса задач и получить мажорантные оценки скорости его сходимости. В дальнейшем Алексей Георгиевич принимал активное участие в создании принципиально новых методов математического проектирования излучающих систем различного назначения. За эти исследования Алексей Георгиевич в числе ряда сотрудников МГУ, возглавляемых академиком А.Н. Тихоновым, был удостоен Государственной премии СССР.

Профессором А.Г. Свешниковым создана мощная школа по решению математических проблем электродинамики. Среди его учеников профессора А.С. Ильинский, В.П. Моденов, А.Н. Боголюбов, А.А. Быков и ряд других известных ученых.

Характерной чертой Алексея Георгиевича является широта и многосторонность его научных интересов, глубокое проникновение в сущность изучаемых проблем, которое приводит к достижению фундаментальных результатов мирового уровня. Большой цикл его работ посвящен проблеме создания и алгоритмической реализации математических моделей физики плазмы и динамики сплошных сред, обратным задачам синтеза и распознавания многослойных оптических покрытий, идентификации дефектов слоистых структур.

С начала 60-х годов А.Г. Свешников уделяет большое внимание разработке методов исследования математических моделей динамики заряженных частиц, связанных в первую очередь с конструированием ионно-оптических систем инжекторов интенсивных пучков и различных плазмооптических устройств. Начиная с 80-х годов А.Г. Свешников совместно с С.А. Габовым и их учениками исследует фундаментальные проблемы строгого обоснования новых достаточно полных классов нестационарных процессов как чисто волновых, так и эволюционного типа, в сплошных средах различной природы. Построены и изучены математические модели неустановившихся волновых движений стратифицированных и флотирующих жидкостей, квазистационарных процессов в проводящих средах и полупроводниках, распространения ионизированных волн в плазме и спиновых волн в ферромагнетиках и ряда других физических процессов и явлений. При непосредственном участии А.Г. Свешникова А.В. Тихонравовым и их учениками разработаны и реализованы оригинальные и высокоэффективные методы решения обратных задач синтеза и распознавания многослойных оптических покрытий во всем частотном диапазоне. Совместно с Ю.А. Ереминым и их учениками теоретически обоснована и практически реализована компьютерная технология метода дискретных источников для решения проблемы идентификации дефектов слоистых структур, включая задачи рассеяния объектами с экстремальными свойствами (наноразмерные частицы, высокие индексы рефракции и т.д.). Совместно с А.Н. Боголюбовым и их учениками проведено строгое исследование задачи о возбуждении металло-диэлектрических волноводов с неоднородным анизотропным заполнением и разработана методика изучения спектральных характеристик нерегулярных волноводов, позволяющая значительно продвинуть теорию «ловушечных мод».

Выдающийся ученый и талантливый педагог А.Г. Свешников с 1971 по 1993 годы заведовал кафедрой математики физического факультета МГУ. Под его руководством кафедра, профессором которой он был избран в 1965 году, сумела с честью преодолеть нелегкие испытания начала девяностых годов.

В 1991 году Алексей Георгиевич был избран действительным членом (академиком) Российской Академии Естественных Наук. Он заслуженный деятель науки РСФСР. Заслуженный профессор МГУ, лауреат Ломоносовской премии МГУ за педагогическую деятельность, награжден орденами «Знак Почета», «Трудового Красного Знамени» и многими медалями и знаками отличия.

Все годы работы в университете А.Г. Свешников отдавал много сил научно-организаторской и редакционно-издательской деятельности, являясь членом редколлегий математической энциклопедии, журнала «Дифференциальные уравнения», «Журнала вычислительной математики и математической физики», РЖ «Математика».

Алексей Георгиевич является истинно русским интеллигентом в самом высоком значении этого слова. Он великолепный знаток и ценитель классической литературы и особенно поэзии. Большой любитель классической музыки, он не пропускал ни одного музыкального вечера, проводимого на физическом факультете. Дипломники и аспиранты, которым посчастливилось быть учениками Алексея Георгиевича, многие из которых стали известными учеными, разъехались по стране и по всему миру, неизменно вспоминают его с большим уважением как мудрого и чуткого Учителя. Очень многим своим ученикам он помог преодолеть различные житейские невзгоды, делая это с высочайшим тактом и деликатностью.

Алексей Георгиевич полон творческих планов. За последние годы совместно со своими учениками А.Б. Альшиным, М.О. Корпусовым и Ю.Д. Плетнером Алексеем Георгиевичем опубликованы две монографии посвященные приложениям нелинейного функционального анализа к уравнениям в частных производных, в частности, к проблемам глобальной и локальной разрешимости широких классов задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных высокого порядка. Он продолжает активно работать с новыми учениками, под его руководством в последние годы подготовлены две кандидатские диссертации.

Поздравляя Алексея Георгиевича со славным юбилеем, от всей души желаем ему крепкого здоровья и больших творческих успехов в его многогранной научной и педагогической деятельности.

Оргкомитет конференции

К восьмидесятилетию Валентина Фёдоровича Бутузова

23 ноября 2019 исполняется 80 лет со дня рождения профессора физического факультета Московского государственного университета Валентина Фёдоровича Бутузова.

В.Ф Бутузов поступил учиться на физический факультет в 1957 г. после окончания с золотой медалью сельской школы, и с тех пор вся его жизнь связана с Московским университетом, где он прощёл все ступени от студента до профессора, заведующего кафедрой.

В.Ф. Бутузов

Научные интересы В.Ф. Бутузова, сформировавшиеся ещё в студенческие годы, связаны с теорией сингулярных возмущений, основы которой заложены в известных трудах А.Н. Тихонова. В 1963 г. В.Ф. Бутузов защитил дипломную работу, а в 1966 г. — кандидатскую диссертацию под руководством профессора А.Б. Васильевой. В кандидатской диссертации были исследованы обнаруженные им особые асимптотические свойства решений сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений, качественное отличные от свойств решений дифференциальных уравнений.

Затем в семидесятых годах В.Ф. Бутузовым был сделан важный шаг в развитии методов построения асимптотических разложений погранслойных решений. Он разработал метод угловых пограничных функций, позволяющий строить асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых краевых задач для основных типов уравнений математической физики в тех случаях, когда граница области содержит угловые точки. Этот метод и его применения составили основное содержание докторской диссертации В.Ф. Бутузова, защищённой им в 1979 г.

В последующие годы В.Ф. Бутузовым были получены новые важные результаты в теории сингулярных возмущений и её приложениях.

Совместно с коллегами и учениками было разработано новое направление — асимптотическая теория контрастных структур, т.е. решений нелинейных сингулярно возмущённых уравнений с внутренними переходными слоями. За работы по созданию и развитию этого направления В.Ф. Бутузов и его коллеги А.Б. Васильева и Н.Н. Нефёдов удостоены в 2003 году высшей научной награды Московского университета — Ломоносовской премии 1-й степени. В последнее десятилетие В.Ф. Бутузовым получен ряд фундаментальных результатов по исследованию сингулярно возмущённых задач с кратными корнями вырожденного уравнения, а также сингулярно возмущенных задач для частично диссипативных систем уравнений

В.Ф. Бутузов вместе с А.Б. Васильевой является создателем всемирно признанной научной школы по теории сингулярных возмущений. Под их руководством многие годы работает семинар по асимптотическим методам на кафедре математики физического факультета МГУ. В.Ф. Бутузов является автором более 250 научных статей и пяти монографий по асимптотическим методам в сингулярно возмущённых задачах. Три монографии написаны совместно с А.Б. Васильевой, ещё одна — совместно с А.Б. Васильевой и Л.В. Калачёвым. Две из этих монографий переведены в США и Китае. Последняя монография В.Ф. Бутузова, изданная в 2014 году, содержит результаты последнего десятилетия.

Под руководством В.Ф. Бутузова защищены 15 кандидатских диссертаций, а четверо его учеников стали докторами наук.

Валентин Фёдорович обладает замечательным талантом педагога и лектора, пользующегося неизменной любовью студентов и уважением коллег. Неоднократно по результатам опросов студентов он был назван преподавателем года физического факультета, послсдний раз — в 2019 году, а в 2010 году — преподавателем года МГУ (это очень почётное звание ежегодно присуждается студентами только одному преподавателю из огромного многотысячного коллектива преподавателей университета). На протяжении 20 лет (с 1993 г. по 2014 г.) В.Ф. Бутузов заведовал кафедрой математики физического факультета, являясь прямым преемником А.Н. Тихонова и А.Г. Свешникова. Учебные пособия «Математический анализ в вопросах и задачах» и «Линейная алгебра в вопросах и задачах», написанные В.Ф. Бутузовым вместе с коллегами по кафедре и выдержавшие под редакцией В.Ф. Бутузова несколько изданий, активно используются и на физическом факультете МГУ, и на других факультетах, и в других вузах. На основе 50-летнего опыта чтения лекций по математическому анализу В.Ф. Бутузов подготовил эти лекции к изданию. Первая, вторая и третья части «Лекций по математическому анализу» вышли в 2012 г., 2014 г. и 2015 г.

Начиная с 1979 г., В.Ф. Бутузов принимает активное участие в работе над школьными учебниками геометрии. Созданные при его участии и под руководством А.Н. Тихонова эти учебники были признаны лучшими на всесоюзном конкурсе в 1988 г. В настоящее время они являются основными учебниками геометрии в большинстве школ Российской федерации. По ним учились и учатся десятки миллионов школьников России и бывших союзных республик. В последние 7-8 лет В.Ф. Бутузовым вместе с коллегами С.Б. Кадомцевым и В.В. Прасоловым создан новый учебно-методический комплект по геометрии для общеобразовательных школ. В комплект входят учебники для 7-9 и 10-11 классов, написанные под редакцией академика В.А. Садовничего, методические пособия для учителей, рабочие тетради и тематические тесты для школьников. Новые учебники получили положительные отзывы комиссий РАН и РАО, они уже используются в ряде школ России, в том числе в школах г. Севастополя. На протяжении 12 лет В.Ф. Бутузов вёл курс геометрии в СУНЦ МГУ — школе-интернате им. А.Н. Колмогорова.

В.Ф. Бутузов ведёт разнообразную научно — общественную работу. Он является членом двух диссертационных советов при МГУ, членом научно — методического совета по математике при Министерстве науки и образования РФ, на физическом факультете с 1995 г. по 2011 г. был заместителем декана факультета.

Валентин Федорович — человек разносторонних интересов. В молодые годы он в течение 25 лет выступал в составе сборной МГУ по футболу, был неоднократным чемпионом и призером первенства Москвы среди вузов. Друзьям хорошо известен и его поэтический дар.

Свой юбилей Валентин Фёдорович встречает в хорошей форме, полный творческих планов и энтузиазма. Пожелаем ему от всей души здоровья, счастья и творческих успехов.

Оргкомитет конференции

Секция
«Асимптотические и численные методы в задачах с пограничными и внутренними слоями»

О развитии теории сингулярных возмущений на кафедре математики Физического факультета МГУ

В. Ф. Бутузов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: butuzov@phys.msu.ru

В докладе представлен обзор результатов исследований по теории сингулярных возмущений и ее приложениям,полученных на кафедре математики Физического факультета МГУ за большой промежуток времени, начиная с основополагающих работ А.Н. Тихонова и А.Б. Васильевой середины прошлого века и заканчивая работами последнего времени. Основное внимание уделяется наиболее важным результатам, полученным в работах учеников школы А.Н. Тихонова.

Литература

[1] Тихонов А. Н. “О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра” // *Матем. сб.*, *22(64)*:2 (1948), 193–204.

[2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений*, М.: Наука, 1973.

[3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях*, М.: Изд-во МГУ, 1978.

[4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, М.: Высш. шк., 1990.

[5] В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, Н. Н. Нефедов, “Асимптотическая теория контрастных структур (обзор)” // *Автомат. и телемех.*, **58**:7 (1997), 4–32.

[6] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, “Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями” // *Тр. МИАН*, **268** (2010), 268–283.

[7] В. Ф. Бутузов, “О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем” // *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:3 (2017), 288–308.

[8] В. Ф. Бутузов, “Асимптотика погранслойного решения стационарной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения” // *Матем. сб.*, **210**:11 (2019), 76–102.

О гладкости регулярной составляющей решения сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с переменными коэффициентами

В. Б. Андреев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: andreev@cmc.msu.su

В единичном квадрате $\Omega := (0,1)^2$ с границей $\partial\Omega$ ищется решение задачи

$$\begin{gathered} Lu := -\varepsilon\,\Delta u + r(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = g(x,y), \;\; (x,y)\in\partial\Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр, а $r(x,y)$, $q(x,y)$ — положительные коэффициенты.

Теорема. *Пусть* $r(x,y)$, $q(x,y)$ *и* $f(x,y) \in C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, $g(y) \in C^{k+2,\lambda}([0,1])$, $k = 0,1,\ldots$. *Тогда существуют положительная постоянная* c, *не зависящая от* ε, *и функция* U, *удовлетворяющая условиям*

$$LU = f, \quad (x,y)\in\Omega, \qquad U(0,y) = g(y) \equiv g(0,y),$$

такие, что

$$\begin{gathered} \varepsilon\left|U\right|_{C^{k+2,\lambda}} + \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C^{k,\lambda}} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{C^{k,\lambda}} + \|U\|_{C^{k,\lambda}} \leqslant \\ \leqslant c\left(\|f\|_{C^{k,\lambda}} + \varepsilon|g|_{C^{k+2,\lambda}} + \|g\|_{C^{k+1,\lambda}}\right). \end{gathered}$$

Здесь $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ — полунорма и норма в пространстве Гёльдера.

Для решения задачи (1) справедливо представление

$$u(x,y) = U(x,y) + V(x,y),$$

где $U(x,y)$ и $V(x,y)$, соответственно, регулярная и сингулярная составляющие решения задачи (1).

Работа выполнена совместно с И.Г. Белухиной (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова).

Литература

[1] Г.И. Шишкин, Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН – 1992.

[2] В.Б. Андреев, "Оценки в классах Гёльдера регулярной составляющей решения сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии"//*Журн. вычислит. матем. и матем. физ.*, **57**:12 (2017),1983-2020.

[3] R.B. Kellogg, M. Stynes, "Corner singularities and boundary layers in a simple convection-diffusion problem"//*J. Differ. Equat.*, **213** (2005), 81-120.

[4] В.Б. Андреев, И.Г. Белухина, "Оценки в классах Гёльдера решения неоднородной задачи Дирихле для сингулярно возмущенного однородного уравнения конвекции-диффузии"//*Журн. вычислит. матем. и матем. физ.*, **59**:2 (2019), 264–276.

[5] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М: Наука, 1971.

Регуляризация сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем в случае пересечения собственных значений предельного оператора

А. А. Бободжанов[1], В. Ф. Сафонов[2]

[1,2]*НИУ "Московский энергетический институт", Москва, Россия.*
E-mails: [1]*bobojanova@mpei.ru*, [2]*SafonovVF@mpei.ru*

Метод регуляризации Ломова [1], [2] обобщается на сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы вида

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int_0^t K\left(t,s\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds+h(t),\ y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T]$$

в случае пересечения корней характеристического уравнения ($\lambda_1\left(t\right)-\lambda_2\left(t\right)=tk\left(t\right),\ k\left(t\right)<0$) предельного оператора $A\left(t\right)$. Ранее рассматривалась дифференциальная задача (без интегрального члена) такого типа. В настоящем докладе описывается алгоритм, основанный на регуляризации исходной задачи с помощью нормальных форм, разработанный Сафоновым В.Ф. и Бободжановым А.А. [3]. Преимущество этого алгоритма не ограничивается применением его только к дифференциальным задачам. Используя его в интегродифференциальных системах, можно получить асимптотическое решение исходной задачи любого порядка (по малому параметру). Важно заметить, что в случае, когда все точки спектра различны при всех значениях независимой переменной (т. е. в случае стабильности спектра) регуляризация сингулярно возмущенных задач проводится с помощью дополнительных переменных, являющимися интегралами от собственных значений предельного оператора. Эти переменные удовлетворяют линейной диагональной дифференциальной форме. В случае пересечения корней характеристического уравнения появляются сингулярности нового типа, которые нельзя описать в терминах спектра. Ранее для слабо нелинейных дифференциальных задач (в случае стабильности спектра) для учета так называемых тождественных и нетождественных резонансов производилась регуляризация с помощью нормальных форм. Оказалось, что эту регуляризацию можно распространить и на сингулярно возмущенные интегродифференциальные уравнения. Основные идеи такого распространения излагается в настоящем докладе. Отметим, что описанный в нем алгоритм нормальных форм является логическим обобщением алгоритма метода регуляризации Ломова и имеет с ним много общего.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, нормальная форма, регуляризация, асимптотическая сходимость.

Литература

[1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука,1981.

[2] Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя.-М.: Издательство Московского университета, 2011.

[3] Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. Метод нормальных форм для нелинейных резонансных сингулярно возмущенных задач.– М.: Издательство «Спутник+».

Модели реакции – диффузии в неоднородной среде с точками равновесия степенного и экспоненциального вырождения

А. А. Быков

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.
E-mail: abkov@yandex.ru

Мы рассматриваем задачи, постановка и методика решения которых возникли и были разработаны под влиянием сериии работ В.Ф. Бутузова [1], в которых рассматривались задачи с пограничным и/или внутренним переходным слоями, возникающими в задачах реакции–диффузии (РД) вида

$$\begin{gathered} u_t + V u_x = (\kappa u_x)_x - f(u,x), \\ x \in (a,b),\ \ u_x(a,t) = \psi_1(t),\ \ u_x(b,t) = \psi_2(t), \end{gathered} \tag{1}$$

с кратными корнями функции плотности источников (ФПИ) $f(u,x)$. Мы рассматриваем ФПИ с корнями произвольной кратности:

$$f(u,x) = f_0(u,x) g_1(u-\varphi_1(x)) g_2(u-\varphi_2(x)) g_3(u-\varphi_3(x)),$$

$g_j(v) = v|v|^{\gamma_j - 1}$, где $\gamma_{1;2;3} > 1$ – произвольные вещественные числа (значение γ_2 не влияет на профиль внутреннего переходного слоя), $f_0(u, x) > 0$, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$ на промежутке $[a, b]$. Рассматриваем также задачи, для которых ФПИ имеет корни бесконечной кратности, например, $g_j(v) = v|v|^{\gamma_j - 1} e^{-|v|^{\theta_j}}$, $\theta_j > 0$. Мы рассматриваем как задачи со сбалансированной ФПИ: $\mathcal{B} = 0$, где $\mathcal{B} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} f(u, x) du$, для которых скорость перемещения ВПС определяется некоторым функционалом от $\partial f / \partial x$, так и задачи с несбалансированной ФПИ: $\mathcal{B} \neq 0$, и тогда скорость ВПС определяется самой величиной $\mathcal{B}$. Мы покажем, что передний (по отношению к направлению дрейфа) и задний участки фронта КС принципиальной по–разному зависят от координаты. Передний участок имеет экспоненциальный профиль, задний, в зависимости от кратности корня, описывается степенной или степено–логарифмической функцией. Мы покажем, что чем быстрее убывает ФПИ при приближении к корню, тем медленнее стремится задний участок фронта к своему уровню насыщения.

Мы рассматриваем как задачи в однородной среде, $\partial \varphi_{1;2;3} / \partial x = 0$, так и задачи в неоднородной среде. Мы покажем, что решение в неоднородной среде при достаточно медленном изменении параметров уравнения (1) проявляет те же свойства, что и в однородной среде. Для обоснования мы используем метод дифференциальных неравенств [2], строим нижнее и верхнее решения задачи (1) и показываем, что они образуют упорядоченную пару. Поэтому точное решение существует и располагается между нижним и верхним решениями, каждое из которых выражается в виде функции, представляющей бегущую квазиволну, профиль которой вычисляем. Автор благодарен проф. В.Ф. Бутузову и проф. Н.Н. Нефедову за полезное обсуждение результатов.

Литература

[1] В. Ф. Бутузов, “Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:6 (2018), 961—987.

[2] Ю. В. Божевольнов, Н. Н. Нефедов, “Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2(2010), 276–285.

Численное решение краевых задач для уравнения эйконала

П. Н. Вабищевич[1], А. Г. Чурбанов[2]

[1,2] *ИБРАЭ РАН, Б. Тульская, 52, Москва*
E-mails: [1] *vabishchevich@gmail.com*, [2] *achur@ibrae.ac.ru*

Многие прикладные проблемы приводят к необходимости решения краевых задач для уравнения эйконала. Прежде всего, это нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными используется при моделировании распространения волн в приближении геометрической оптики. В вычислительной гидродинамике, обработке изображений и компьютерной графике такие задачи связываются с расчетом расстояния до границ области.

Уравнение эйконала является типичным примером стационарных уравнений Гамильтона-Якоби. Для приближенного решения краевых задач для уравнения эйконала применяются стандартные подходы, которые основаны на использовании разностных методов на прямоугольных сетках, на конечно-элементной или конечно-объемной аппроксимации на общих нерегулярных сетках. Основное внимание при этом уделяется проблемах нелинейности.

Рассматривается [1, 2] задача Дирихле для уравнения эйконала в анизотропной среде. Сформулированная нелинейная краевая задача есть предел задачи диффузии-реакции при параметре реакции стремящемся к бесконечности. При численном решении сингулярно возмущенной задачи диффузии-реакции используются монотонные аппроксимации. Представлены примеры приближенного решения двумерных и трехмерных задач для уравнения эйконала в анизотропной среде. Применяется стандартная кусочно-линейная конечно-элементная аппроксимация по пространству.

Литература

[1] A. G. Churbanov and P. N. Vabishchevich, “Numerical solution of boundary value problems for the eikonal equation in an anisotropic medium” // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **362** (2019), 55–67.

[2] A. G. Churbanov and P. N. Vabishchevich, “Numerical Solving a Boundary Value Problem for the Eikonal Equation” // *FDM 2018*, LNCS **11386** (2019), 28–34.

Модель нейронной среды на основе сети ФитцХью-Нагумо с резисторно-индуктивными связями

С. Д. Глызин[1], А. Ю. Колесов[2]

[1,2]*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия;*

E-mails: [1]kolesov@uniyar.ac.ru, [2]glyzin.s@gmail.com

Предлагается математическая модель одномерной цепочки нейронов ФитцХью-Нагумо [1] с резисторно-индуктивными связями между соседними элементами сети. Рассматриваемая модель является новой и представляет собой цепочку диффузионно связанных трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{aligned} &\dot u_j = v_j + \lambda(u_j - u_j^3/3),\\ &\dot v_j = -u_j + d\,(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - \varepsilon w_j - \varepsilon\beta\,(v_j - w_j),\\ &\dot w_j = -u_j - \varepsilon w_j, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой $u_j(t)$ и $v_j(t)$, $w_j(t)$ – нормированное напряжение и токи в цепи, $j = 1, 2, \ldots, N$, $u_0 = u_1$, $u_{N+1} = u_N$, а параметры ε, d, β – характеристики цепи.

Основной результат работы состоит в доказательстве утверждения о том, что при условиях $0 < \varepsilon \ll 1$, $\lambda = \varepsilon\alpha$, $\alpha, \beta, d = \mathrm{const} > 0$ и при подходящем увеличении параметров α, N в этой системе может сосуществовать любое фиксированное число устойчивых двумерных инвариантных торов.

Наряду с дискретной цепочкой нейронов ФитцХью-Нагумо (1) рассматривается соответствующая ей непрерывная сеть. Функционирование такой сети описывается тремя распределенными переменными – напряжением $u(t,s)$ и токами $v(t,s)$, $w(t,s)$, где $0 \le s \le 1$. Для этих переменных после замены в (1) разностного оператора $u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ частной производной $\partial^2 u/\partial s^2$ приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} x + \varepsilon F(x),\ \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=1} = 0, \tag{2}$$

где $x = \mathrm{colon}\,(u(t,s), v(t,s), w(t,s))$, $F(x) = \mathrm{colon}\,(\alpha(u - u^3/3), -w - \beta(v - w), -w)$.

Сравнительный анализ динамических свойств дискретной цепочки (1) и ее непрерывного аналога (2) показывает, что они существенно отличаются. Так в модели (1) при согласованном увеличении α, N и уменьшении ε неограниченно растет число сосуществующих устойчивых двумерных торов, в случае же непрерывной модели ситуация диаметрально противоположна: все ее торы размерности два и выше неустойчивы, а устойчивыми могут быть лишь циклы. Таким образом, переход от дискретной системы (1) к непрерывной оказывается не правомерным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

Литература

[1] R. FitzHugh, “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane” // *Biophys. J.* **1** (1961), 445–466.

[2] С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов, Двухчастотные автоколебания в нейронной сети ФитцХью–Нагумо // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **51**: 1. (2017), 94–110.

Алгоритм конструирования стабилизирующих Паде регуляторов для нелинейных систем управления в SDC форме

Ю. Э. Даник[1], М. Г. Дмитриев[2]

[1,2] *ФИЦ ИУ РАН, 117312 г. Москва, проспект 60-летия Октября, дом 9.*
E-mails: [1]yuliadanik@gmail.com, [2]mdmitriev@mail.ru

В последние годы активизировался интерес к Паде аппроксимациям в различных приложениях, содержащих малые параметры [1]. Они позволяют расширять для асимптотических разложений зоны аппроксимации и получать представления параметрического семейства решений. Здесь приводится эвристический алгоритм построения регуляторов для систем с коэффициентами, зависящими от состояния (SDC) и параметром, принимающим как малые, так и большие значения. Для этого класса систем строится параметрическое семейство регуляторов на основе Паде аппроксимаций [2] решения матричного алгебраического уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния [3].

В качестве примера рассмотрен класс нелинейных аффинных систем управления, где параметр, стоящий при управлении определяет или слабоуправляемую систему или систему с большим коэффициентом усиления. Матрица коэффициентов усиления в обоих случаях выбирается как положительно определенное решение матричного алгебраического уравнения Риккати, где все матрицы зависят от состояния и повторяет структуру регулятора Калмана для решения задачи оптимального синтеза в задаче управления линейной системой с квадратичным критерием качества, т.е. искомый регулятор представляется в форме $u(x,\varepsilon) = -\varepsilon R^{-1}B^T(x)K(x,\varepsilon)$, где $K(x,\varepsilon) = \frac{1}{2}(PA_{[2/2]}(x,\varepsilon) + {PA^T}_{[2/2]}(x,\varepsilon))$ есть положительно определенная матрица для всех $x \in X$, $\varepsilon > 0$, а $PA_{[2/2]}(x,\varepsilon)-$ двухточечная матричная Паде аппроксимация порядка [2/2] решения алгебраического матричного уравнения Риккати и строится на основе двух асимптотических разложений по целым степеням малого и большого значений параметра. В случае линейной стационарной системы подобное семейство регуляторов обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы управления, т.е. система в этом случае стабилизируема при любом $\varepsilon > 0$. Для нелинейного случая проведены различные численные эксперименты, показывающие, что построенный регулятор стабилизирует систему при больших интервалах изменения параметра ε , чем каждая из асимптотик.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-07-00281).

Литература

[1] И. Андрианов, Я. Аврейцевич. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.

[2] Д. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. Аппроксимации Паде. – Мир, 1986.

[3] Yu. Danik, M. Dmitriev, “Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution” // *IFAC-PapersOnLine*, **51**:32 (2018), 815-820.

Construction of the Fundamental Solution Asymptotics via Creation-Annihilation Operators to Parabolic PDE with a Small Parameter

V. G. Danilov[1], M. A. Rakhel[2]

[1,2] *Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya ulitsa, 101000 Moscow, Russia*
E-mail: [1] *vgdanilov@mail.ru*, [2] *marakhel@edu.hse.ru*

The fundamental solution $G(x,t,h)$ is the solution to the Cauchy problem

$$-h\frac{\partial G}{\partial t} + \hat{H}(\overset{2}{x}, -h\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t)G = 0, \quad G_{t=0} = \delta(x-\xi) \tag{1}$$

where $H(x,p,t)$ is a function analytic in (x,p), smooth in t, and taking real values whenever the arguments are real. We assume that

$$H_{pp} > 0 \tag{2}$$

(an analog of the strict parabolicity condition) and the operator $\hat{H}$ is of tunnel type, that is,

$$\Re H(x, p + i\eta, t) \leq H(x,p,t) \tag{3}$$

for all $x \in \mathbb{R}^1, p \in \mathbb{R}^1, \eta \in \mathbb{R}^1$, and $t \in [0,T]$. Suppose that for $t \in [0,T]$ there exists a solution $V = V(x,t,y,h)$ to the Cauchy problem

$$-h\frac{\partial V}{\partial t} + \hat{H}(\overset{2}{x}, -h\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t)V = 0, \quad V_{t=0} = e^{-\frac{(x-\xi-y)^2}{2h}} \tag{4}$$

Then we have [1]:

$$G(x,t,\xi,h) = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} V(x,t,\xi + h\frac{\partial}{\partial \zeta}, h)e^{-\frac{\zeta^2}{2h}}\Big|_{\zeta=0} \tag{5}$$

After calculation this formula reads as follows:

$$G(x,t,\xi,h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \frac{e^{\frac{1}{h}(\frac{\hat{y}^2}{2} - \Phi(x,t,\xi+\hat{y}))}}{\sqrt{J_0}\sqrt{1 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x,t,\xi+\hat{y})}} e^{\frac{1}{2}\int_0^t H_{xp}d\tau}(1 + O(h)), \tag{6}$$

where J_0 is a usual Jacobian, $\hat{y}$ is given by $\hat{y} - \xi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,t,\hat{y})$ and

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} = -H_{pp}(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y})^2, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2}|_{t=0} = 1 \tag{7}$$

The last relation shows the role of degeneration of the matrix H_{pp} in the asymptotics construction.

References

[1] Danilov V.G., A Representation of the Delta Function via Creation Operators and Gaussian Exponentials, and Multiplicative Fundamental Solution Asymptotics for Some Parabolic Pseudodifferential Equations, Russian Journal of Mathematical Physics vol. 3 no. 1 (1995), 25-39.

Simple solutions to the problem of waves on the surface of a liquid generated by localized sources in an elastic base

S. Yu. Dobrokhotov[1,2]

[1] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology*
E-mail: dobr@ipmnet.ru

We discuss the problem of wave generation on the surface of a water layer located on an elastic base. It is assumed that the source of excitation is located inside the elastic half-space. We use the approach, based on the study of solutions of the joint linear system of equations of the theory of elasticity in half-space and the theory of waves in a liquid connected at the interface by the corresponding boundary conditions (G. S. Podyapolsky approch). First, the problem is reduced to the study of the spectrum of operator pencils by a vertical variable, which allows us to write general integral formulas for solving the corresponding Cauchy problem. This consideration is realized with the help of long-standing results obtained, in particular, in the long-standing works of R. Griniv, S. Dobrokhotov, O. Tolstova, I. Chudinovich and A. Shkalikov. Then we show that the dispersion relation, which sets the eigenvalues for the so-called water mode and takes into account the influence of the elastic base, can be significantly simplified. This allowed us to derive a simple integral formula for the solution linking the initial perturbation in the elastic half-space and the amplitude of the wave on the water surface generated by this source.

The work was done together with K. A. Vargas, Kh. KH. Ilyasov, S. Ya. Sekerzh-Zenkovich, O. L. Tolstova and supported by RFBR grant 17-01-00644.

References

[1] S. Yu. Dobrokhotov, Kh. Kh. Ilyasov, S. Ya. Sekerzh-Zenkovich, O. L. Tolstova “Simple Solutions to the Wave Problem on the Surface of a Fluid with the Linear Hydroelastic Model” // *Doklady Physics*, **64**:8 (2019), 319-324.

Асимптотика решения сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с быстро осциллирующими коэффициентами

Б. Т. Калимбетов[1], А. М. Темирбеков[2]

[1,2] *Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Казахстан*

E-mails: [1] *burkhan.kalimbetov@ayu.edu.kz,* [2] *marat.temirbekov@ayu.edu.kz*

Рассматривается сингулярно возмущенная интегро-дифференциальная система с быстро осциллирующими коэффициентами и с быстро убывающими ядрами:

$$\varepsilon z' = A(t)z + \varepsilon g(t) cos\frac{\beta(t)}{\varepsilon} B\left(t\right) z + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta} K\left(t,s\right) z(s,\varepsilon) ds + h(t),$$
$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \tag{1}$$

где $z = \{z_1, z_2\}$, $h\left(t\right) = \{h_1\left(t\right), h_2\left(t\right)\}$, $\beta'\left(t\right) > 0$, $\omega\left(t\right) > 0$, $\mu\left(t\right) > 0$ $(\forall t \in [t_0, T])$, $g\left(t\right)$ скалярная функция, а $A\left(t\right)$ и $B\left(t\right)$ - (2×2) матрицы, причем $A\left(t\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2\left(t\right) & 0 \end{pmatrix}$, $B\left(t\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $z^0 = \left\{z_1^0, z_2^0\right\}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предельный оператор $A\left(t\right)$ имеет спектр $\lambda_1\left(t\right) = -i\alpha\left(t\right)$, $\lambda_2\left(t\right) = +i\alpha\left(t\right)$, ядро интегрального оператора со спектральным значением $\lambda_3\left(t\right) \equiv \mu\left(t\right)$ быстро изменяется, частота быстро осциллирующего косинуса равна $\beta'\left(t\right)$. В дальнейшем функции $\lambda_4(t) = -i\beta'(t)$, $\lambda_5(t) = +i\beta'(t)$ будем называть спектром быстро осциллирующего коэффициента.

Предполагая выполненными условия:

1) $\alpha\left(t\right), \beta\left(t\right), \mu\left(t\right), g\left(t\right) \in C^{\infty}\left(\left[t_0, T\right], C^1\right)$, $h\left(t\right) \in C^{\infty}\left(\left[t_0, T\right], C^2\right)$,
$B\left(t\right) \in C^{\infty}\left(\left[t_0, T\right], C^{2\times 2}\right)$, $K\left(t,s\right) \in C^{\infty}\left(\left[t_0, T\right], C^{2\times 2}\right)$,

2) для $\forall t \in [t_0, T]$ и всех $n_4 \neq n_5$ имеют место неравенства

$$n_4\lambda_4\left(t\right) + n_5\lambda_5\left(t\right) \neq \lambda_j\left(t\right),$$
$$\lambda_k\left(t\right) + n_4\lambda_4\left(t\right) + n_5\lambda_5\left(t\right) \neq \lambda_j\left(t\right), k \neq j, k, j = 1, 2, 3$$

для всех мультииндексов $n = (n_4, n_5)$ с $|n| \equiv n_4 + n_5 \geq 1$ (n_4 и n_5 — целые неотрицательные числа), разрабатывается алгоритм построения регуляризованного [1,2] асимптотического решения задачи (1).

В докладе доказывается нормальная, однозначная разрешимость итерационных задач, асимптотическая сходимость формальных решений к точному решению исходной задачи (1), обсуждается влияние интегрального члена на структуру асимптотики.

Работа выполнена при поддержке гранта AP05133858 КН МОН РК.

Литература

[1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

[2] Kalimbetov B.T., Safonov V.F. Integro-differentiated singularly perturbed equations with fast oscillating coefficients// *Bulletin of KarSU, series Mathematics,*, Karaganda, **2**:94 (2019), 33-47

Аналитические аспекты метода малого параметра в нелинейной математической физике

В. И. Качалов

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия.
E-mail: vikachalov@rambler.ru

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = Au + \varepsilon B(u,u) + f(t), \quad t \in [0,T], \\ &u\big|_{t=0} = u^0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь, A — замкнутый неограниченный оператор с плотной в E областью определения D, являющийся инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$; $B(u,v)$ — билинейный оператор с областью определения $E \times D$, ограниченный по первой переменной и замкнутый неограниченный по второй переменной.

Сформулируем условие (β):

для каждого положительного числа c существует множество $W^c \subset D$ такое, что $\forall w \in W^c \;\; \|w\| \leq e^{ac}$, при некотором $a > 0$ и, если $w_1 \in W^{c_1}$, $w_2 \in W^{c_2}$, то $\|B(w_1,w_2)\| \leq c_2 e^{a(c_1+c_2)}$. Также будем предполагать, что множество W^c инвариантно относительно $U(t)$ при каждом $c > 0$.

Введем обозначение для объединения всех таких множеств:

$$\exp E = \bigcup_{c>0} W^c.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Если выполнено условие* (β) *и решение предельной задачи*

$$\frac{dv}{dt} = Av + f(t), \quad t \in [0,T], \\ v\big|_{t=0} = u^0.$$

принадлежит $\exp E$, *то решение задачи (1) существует на всем отрезке* $[0,T]$ *и голоморфно в точке* $\varepsilon = 0$ *[1].*

Следствие. *При* $\varepsilon = 1$ *уравнение (1) является уравнением типа Навье-Стокса [2]. В этом случае, решение существует на некотором отрезке* $[0,\widetilde{T}] \subset [0,T]$ *и представимо в виде равномерно сходящегося на этом отрезке ряда.*

В качестве примера рассмотрена смешанная задача для уравнения Бюргерса:

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin x.$$

Литература

[1] С.А. Ломов, И.С. Ломов. *Основы математической теории пограничного слоя.* М., Изд-во МГУ, 2011.

[2] Р. Рихтмайер. *Принципы современной математической физики. Том II.* М., Мир, 1984.

Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с запаздыванием

И. С. Кащенко[1], С. А. Кащенко[1,2]

[1] *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.*
[2] *Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“*
E-mails: [1] *iliyask@uniyar.ac.ru,* [2] *kasch@uniyar.ac.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + \sigma\dot{x} + \delta x = F(x, x(t-T), \dot{x}(t-T)) \tag{1}$$

при условии, что параметр ε положителен и достаточно мал. Параметры σ или δ также могут зависеть от ε. Изучим локальную динамику (в малой, но не зависящей от ε, окрестности состояния равновесия) и асимптотику решений при $\varepsilon \to 0$.

Основное содержание посвящено ситуации, когда состояние равновесия теряет устойчивость. В этом случае асимптотически большое количество корней соответствующего характеристического уравнения (точек спектра) лежат сколь угодно близко к мнимой оси. Таким образом критические случаи имеют бесконечную размерность.

В случаях близких к критическим построены специальные нелинейные уравнения– квазинормальные формы, – которые не зависят от малого параметра либо зависят от него регулярно. Решения квазинормальных форм определяют главные части асимптотического разложения решений [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-29-10043).

Литература

[1] С.А. Кащенко, "Уравнения Гинзбурга-Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием" // *Журнал Вычисл. матем. и матем. физ.*, **38**:3 (1998), 457–465.

[2] И.С. Кащенко, "Локальная динамика дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием у первой производной" // *Матем. Заметки*, **101**:2, (2017), 318-–320.

Итерационные методы для эллиптических задач с сильно меняющимися коэффициентами

Г. М. Кобельков

Механико-математический факультет МГУ,
Институт вычислительной математики РАН.
E-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru

Пусть $\bar\Omega = \bar\Omega_1 \cup \bar\Omega_2,\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Рассмотрим краевую задачу

$$-\mathrm{div}(k\nabla u) = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1, \\ \omega \gg 1, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Аппроксимация этой задачи методом конечных разностей, либо методом конечных элементов приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей, число обусловленности которой пропорционально ωh^{-2}, где h – шаг сетки.

Для решения этой системы предлагается итерационный процесс со скоростью сходимости, не зависящей от ω и h. Реализация итерационного процесса требует на каждом шаге одного решения сеточного уравнения Пуассона в области Ω.

Рассматриваются похожие задачи для системы уравнений теории упругости.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 17-01-00838.

Литература

[1] G. Kobelkov, "Fictitious domain method and the solution of elliptic equations with highly varying coefficients" // *Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modelling*, **2**:6 (1987).

Upper and lower solutions in the numerical analysis of semilinear singularly perturbed differential equations

Natalia Kopteva

Department of Mathematics and Statistics, University of Limerick, Limerick, Ireland.
E-mail: natalia.kopteva@ul.ie

In this talk, we shall discuss an extension of the method of differential inequalities, which is a well-established tool in the asymptotic analysis of singularly perturbed differential equations [3], to the error analysis of numerical approximations of such equations. For the case of singularly perturbed semilinear ordinary differential equations, this approach was used in [4, 8], and, more recently, in [7]. For the case of singularly perturbed semilinear elliptic and parabolic equations, it was employed in a number of more recent publications starting from [6].

We shall first consider the basics of this approach in the context of a 1d semilinear reaction-diffusion equation following [7]. Then this approach will be applied to the numerical analysis of a similar problem posed in a smooth 2d domain [6]. In the final part of the talk, we shall look at this problem in a square domain. The asymptotic analysis of the latter problem in the linear case was first addressed by V.F. Butuzov in 1973 [1]; see also [2]. Compared to smooth domains, one now additionally deals with corner layers. The semi-linear case of this problem will be considered under the assumptions made in [5], and new error bounds for its numerical approximations will be obtained using upper and lower discrete solutions.

References

[1] В.Ф. Бутузов, “Асимптотика решения уравнения $\mu^2\triangle u - k^2(x,y)u = f(x,y)$ в прямоугольной области” // *Дифференц. уравнения.* **9** (1973), 1654–1660.

[2] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, *Асимтотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* М.: Наука, 1973.

[3] Н.Н. Нефедов, “Метод дифференциальных неравентсв для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями” // *Дифференц. уравнения.* **31** (1995), 1142–1149.

[4] C. M. D'Annunzio, *Numerical analysis of a singular perturbation problem with multiple solutions.* Ph.D. Dissertation. University of Maryland at College Park, 1986.

[5] R. B. Kellogg, N. Kopteva, “A singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem in a polygonal domain” // *J. Differential Equations.* **248** (2010), 184–208.

[6] N. Kopteva, “Maximum norm error analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem” // *Math. Comp.* **76** (2007), 631–646.

[7] N. Kopteva, M. Stynes, “Numerical analysis of a singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problem with multiple solutions” // *Appl. Numer. Math.* **51** (2004), 273–288.

[8] G. Sun, M. Stynes, “A uniformly convergent method for a singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem with multiple solutions” // *Math. Comp.* **65** (1996), 1085–1109.

Анализ бифуркаций автоколебательных решений уравнения Икеды

Е. П. Кубышкин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.
E-mail: kubysh.e@yandex.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \mu \sin(x(t-\tau) - c) - x \tag{1}$$

с запаздывающим аргументом, предложенное в работе [1] для описания динамики пассивного оптического резонатора. В (1) переменная $x(t)$ определяет сдвиг фазы электрического поля в нелинейной среде кольцевого резонатора, τ – время распространения света в кольцевом резонаторе, $0 \leq c < 2\pi$ – постоянный фазовый сдвиг, коэффициент $\mu > 0$ характеризует интенсивность лазерного излучения. Уравнение (1), получившее название уравнения Икеды, широко используется в нелинейной оптике для объяснения нелинейных оптических эффектов.

Исследованы состояния равновесия уравнения (1), характер потери их устойчивости при изменении параметров и связанные с потерей устойчивости бифуркации периодических решений. Исследовано также развитие периодических решений при дальнейшем изменении бифуркационных параметров уравнения.

Записанное в характерном масштабе времени, уравнение содержит малый параметр при производной, что делает его сингулярным. Уравнение (1) в зависимости от значений параметров может иметь большое число различных состояний равновесия, потеря устойчивости которых связана с прохождением счетного числа корней соответствующих характеристических уравнений через мнимую ось комплексной плоскости. Кроме того, между указанными корнями реализуются счетное число определенного вида внутренних резонансов. Показано, что поведение решений уравнения (1) с начальными условиями из фиксированной окрестности состояния равновесия в фазовом пространстве уравнения описывает счетная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система уравнений имеет минимальную структуру и получила название нормальной формы исследуемого уравнения в окрестности состояния равновесия. Система уравнений позволяет выделить одну <быструю> и счетное число <медленных> переменных, что дает возможность применить к полученной системе уравнений метод усреднения. Показано, что состояниям равновесия усредненной системы уравнений <медленных> переменных в исходном уравнении соответствуют периодические решения того же характера устойчивости. Показана возможность одновременной бифуркации из состояний равновесия большого числа периодических решений (бифуркация мультистабильности). При дальнейшем увеличении параметра бифуркации каждое из периодических решений через серию бифуркаций удвоения периода переходит в хаотический аттрактор. Таким образом, в поведении решений уравнения Икеды наблюдается хаотическая мультистабильность.

Литература

[1] K. Ikeda, "Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system"// *Optics Communications* **30**:2 (1979), 257-261.

Исследование пространственно-неоднородных волн в начально-краевой задаче для нелинейного параболического уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием

Е. П. Кубышкин[1], В. А. Куликов[2]

[1,2]*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.*
E-mails: [1]kubysh.e@yandex.ru, [2]kulikov7677@gmail.com

В круге $K_R = \{(\rho, \phi):\ \ 0 \le \rho \le R, 0 \le \phi \le 2\pi\}$ рассматривается начально-краевая задача вида

$$u_t + u = D\Delta_{\rho\phi} u + K(1 + \gamma \cos u_{\theta T}),\ u_\rho(R, \phi, t) = 0,\ u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi + 2\pi, t) \tag{1}$$

относительно функции $u(\rho, \phi, t + s), t \ge 0, -T \le s \le 0$, где $T > 0$ величина запаздывания аргумента, с начальным условием $u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0)$. Пространство начальных условий

$$H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(K_R \otimes [-T, 0]),$$

при каждом s $u(\rho, \phi, s) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (K_R), u(\rho, \phi, s) = u(\rho, \phi + 2\pi, s)\}$, где пространство функций $\overset{\circ}{W}{}_2^1 (K_R)$ получено замыканием множества функций $u(\rho, \phi) \in C^1(K_R)$,$u_\rho(R, \phi) = 0$ в метрике пространства функций $W_2^1(K_R)$. В (1) $\Delta_{\rho\phi}$ - оператор Лапласа в полярных координатах, который считаем симметрично расширенным на пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1 (K_R), u_{\theta T}(\rho, \phi, t) \equiv u(\rho, \phi + \theta, t - T)(0 \le \theta < 2\pi)$ – оператор поворота пространственного аргумента и временного запаздывания, D, K – положительные постоянные $0 < \gamma < 1$.

Начально-краевая задача (1) является естественным обобщением предложенной в [1] математической модели нелинейной оптической системы с двумерной обратной связью, которая учитывает эффект запаздывания в контуре обратной связи. Начально-краевая задача (1) может иметь в зависимости от параметров K и γ несколько однородных состояний равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$, в том числе кратные. В плоскости параметров K, γ (при фиксированных других параметрах) методом D-разбиений построены области устойчивости (неустойчивости) состояний равновесия $u_*(K, \gamma)$ и исследован возможный характер потери устойчивости. Исследованы возможные бифуркации пространственно-неоднородных автоколебательных решений, исследована их устойчивость, построены асимптотические формулы автоколебательных решений. В качестве метода исследования используется метод центральных многообразий и теория нормальных форм нелинейных дифференциальных уравнений траекторий на центральных многообразиях. Дается сравнение с приведенными в [1] экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 19-31-90133).

Литература

[1] С.А. Ахманов, М.А.Воронцов, В.Ю. Иванов “Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках. Новые типы нелинейных волн, возникновение “оптической турбулентности”// *Письма в ЖЭТФ*, **47**:12 (1988), 611-614.

Autowave model of megacities development based on the contrast structures theory.

N. T. Levashova[1], A. E. Sidorova[2], A. A. Melnikova[3]

M.V. Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia,
[1,3]Department of Mathematics, Faculty of Physics,
[2]Department of Biophysics, Faculty of Physics.
E-mails: [1]natasha@npanalytica.ru, [2]sky314bone@mail.ru, [3]melnikova@physics.msu.ru

Based on contrast structures theory the autowave model of urban ecosystems growth was developed. According to our concept, urban ecosystems are considered to be interacting with each other natural and anthropogenic subsystems with significant heterogeneity of areas affected by human intervention and urban geobiocoenoses.

The model is based on modified FitzHugh–Nagumo system

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} - D_u\Delta u = -\frac{1}{T^*U^2}u(u-U\alpha(x,y,t))(u-U) - \frac{1}{UT^*}uv,\\&\frac{\partial v}{\partial t} - D_v\Delta v = \frac{1}{T^*}\left(-\gamma(x,y,t)v + \beta(x,y,t)u\right), \quad -L<x<L,\ t>0.\end{aligned}$$

Here u is the intensity of anthropogenic processes (activator); U is the characteristic spatial variation of the activator; v is the intensity of natural processes (inhibitor); $\alpha(x,y,t)$ is the system activation parameter, $0 < \alpha \le 1$; γ is a kinetic parameter of inhibitor decay, $\gamma > 0$; β is a kinetic parameter of the activator-inhibitor interaction $\beta > 0$; Du, Dv are the diffusion coefficients of the activator and inhibitor, respectively; L is the linear dimension of the considered region. T^* is the characteristic time scale (1 year).

The activator is housing development. The inhibitor is determined by the urban planning policy and is different for each country. The transition layer (the town suburb) is a contrast structure formed between the plots of urban development and natural biocenoses . The width of the transition layer is usually about several hundred meters, while the size (L) of the city is tens of kilometers. The ratio of the transition layer width to the value L is a small parameter. In the City Development Models some model parameters are discontinuous because of the barriers in media, that can be large water pools or forest zones.

The model was tested on the example of Moscow expansion in the period from 1952 to 1968, a comparison was made of the model results with real data. The difference was less than 10%. By means of the model, the predictions were made for New Moscow and Shanghai development until 2030.

The work is supported by Russian Science Foundation, project No. 18-11-00042.

References

[1] A.E. Sidorova, N.T. Levashova, A.E. Semina, "Autowave Model of Megapolis Morphogenesis in the Context of Inhomogeneous Active Media " // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, **83** (2019), 91–99.

Some features of using asymptotic analysis in solving inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations

Dmitry Lukyanenko[1], Vladimir Volkov[1], Maxim Shishlenin[2]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, 119991 Moscow, Russia.*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, 630090 Novosibirsk, Russia; Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, 630090 Novosibirsk; Novosibirsk State University, 630090 Novosibirsk, Russia.*
E-mails: [1] *lukyanenko@physics.msu.ru, volkovvt@mail.ru,* [2] *mshishlenin@ngs.ru*

Traditional well known methods for solving inverse problems encounter some problems and limitations in solving the inverse problems for nonlinear singularly perturbed partial differential equations whose solutions contain stationary or moving fronts. The idea of using asymptotic analysis to construct effective numerical algorithms for solving problems of such kind was first realized in [1]. In this work the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed equation of the reaction-diffusion-advection type with data at the final time moment was considered. The iterative gradient method was implemented and for its effective realization *a priori* information about the location and dynamics of the moving front, extracted by the asymptotic analysis, was used.

However, there is another efficient direction for using asymptotic analysis in solving inverse problems of considered classes. An important feature of asymptotic analysis is that it gives the possibility to reduce the original nonlinear singularly perturbed problem for partial differential equation to much simpler problems which does not contain small parameters and have less dimension (and sometimes even contain not differential but algebraic equations). Moreover, problem statements reduced using asymptotic analysis often relate explicitly or semi-explicitly the parameters that must be restored in solving the inverse problem (coefficients in the equation, boundary and initial conditions, etc.) with the additional information. For example, it may be information about the location of moving reaction front which is the most natural in real applications (experimental observations of the location of the shock front, reaction or combustion front, etc.). This approach was first implemented in [2].

The work is supported by RFBR project No. 18-01-00865 and 18-31-00204.

References

[1] D.V. Lukyanenko, M.A. Shishlenin, V.T. Volkov, “Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data” // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **54** (2018), 233-247.

[2] D.V. Lukyanenko, V.B. Grigorev, M.A. Shishlenin, V.T. Volkov, “Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction-diffusion equation with the location of moving front data” // *Computers and Mathematics with Applications*, **77**:5 (2019), 1245-1254.

On the Effect of Small Mutual Diffusion on Transfer Processes in a Multiphase Medium

A. V. Nesterov

Russian University of Economics. G. V. Plekhanova, Russia.
E-mail: Andrenesterov@yandex.ru

The asymptotic expansion of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of transport equations with small nonlinearity and diffusion is constructed

$$\begin{array}{l} \varepsilon^2(U_t+\sum\limits_{i=1}^{m} D_i U_{x_i}) = AU+\varepsilon F(U)+\varepsilon^3\sum\limits_{i=1}^{m} B_{ij}U_{x_i x_j}, |\bar{x}|<\infty, t>0, \\ U(\bar{x},0)=H\omega\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right). \end{array} \tag{1}$$

Here $U=\{u_1,...,u_n\}$ is the solution, $0<\varepsilon\ll 1$ is a small positive parameter, D_i is a diagonal constant matrix, the function $F(U)$ is smooth enough, smooth function $\omega(x)$ is rapidly decreasing together with all derivatives. Matrix A has a single $(\Lambda=0,h_0)$ (h_0^* - e.v. A^T, , corresponding $\Lambda=0$), non-zero eigenvalues of the matrix A is imposed condition $Re\lambda<0$. Additionally, it is required that $(F(Z),h_0^*)$ *=0*. Such systems of equations can describe the transfer of substances in multiphase media. This work is a continuation of the works [1],[2].

The asymptotic of the solution is constructed by the method of boundary functions [3] and has the form

$$\begin{array}{l} U(\bar{x},t)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i(s_i(\bar{\zeta},t)+\Pi_i(\bar{\xi},\tau))+R_N=U_N+R_N, \\ \bar{\zeta}=(\bar{x}-\bar{V}t)/\varepsilon, \bar{\xi}=\bar{x}/\varepsilon, \tau=t/\varepsilon^2, \bar{V}=\{(D_i h_0,h_0^*)/(h_0,h_0^*), i=1,...,m\}. \end{array} \tag{2}$$

For all members of the asymptotic the equations are written out and the initial conditions are obtained. The residual term is estimated by the residual term in the problem.

The main term of the asymptotic is $s_0=\varphi_0(\zeta,t)h_0$, where φ_0 is the solution of the equation

$$\varphi_{0,t}+\sum_{i,j=1}^{m} M_{i,j}\varphi_{0,\zeta_i\zeta_j}+\sum_{i=1}^{m}(F_{eff,i}(\varphi_0))_{\zeta_i}+\sum_{i,j,k=1}^{m} B_{eff,ijk}\varphi_{0,\zeta_i\zeta_j\zeta_k}=0. \tag{3}$$

In particular, for the quadratic function $F(U)$ the equation (3) becomes a generalization of the Burgers-Korteweg-de Vries equation to the case of many spatial variables.

References

[1] Nesterov A.V. On the structure of the solution of one class of hyperbolic systems with several spatial variables in the far zone // CMMP (2016), 56, No 4 , c. 639-649.

[2] Nesterov A.V., Shuliko O. V. On the asymptotics of the solution of a singularly perturbed system of parabolic equations in the critical case //CMMP (2010), 50, No 2, c. 268-275.

[3] Vasilyeva A. B., Butuzov V. F. Singularly perturbed equations in critical cases// M.: Moscow state University publishing House – 1978.

The periodic solutions with an interior layer of Burgers type equations: asymptotic approximation, existence, asymptotic stability and some applications

N. N. Nefedov

Department of Mathematics, Faculty of Physics,
Lomonosov Moscow State University, 119899 Moscow, Russia.
E-mail: nefedov1@phys.msu.ru

In this talk we consider a new class of singularly perturbed parabolic periodic boundary value problems for reaction-advection-diffusion equations. We illustrate the principal features of the general scheme of asymptotic method of differential inequalities ([1]– [5]) and apply it to Burgers type equations with modular advection. We construct the interior layer type formal asymptotics and prove the existence of a periodic solution with an interior layer. The accuracy of its asymptotics and asymptotic stability of this solution is also established. We show how the constructed asymptotic can be used to get asymptotic solution of some inverse coefficient problems. In particular, we illustrate our approach by considering the Burgers type equations with modular advection.

This work is supported by Russian Science Foundation, grant number 18-11-00042.

References

[1] *Nefedov N.* Comparison Principle for Reaction-Diffusion-Advection Problems with Boundary and Internal Layers // *Lecture Notes in Computer Science.* 2013. Vol. 8236, pp. 62 - 72.

[2] *Vasileva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.* Singularly Perturbed problems with Boundary and Internal Layers // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 268, pp.258 - 273.

[3] *Nefedov N.N. , Recke L., Schnieder K.R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2013. Vol. 405, pp. 90 - 103.

[4] *Nefedov N.N., Nikulin E. I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem // *Russian Journal of Mathematical Physics.* 2015. Vol. 22. no. 2. P. 215 - 226.

[5] N. N. Nefedov and O. V. Rudenko, On front motion in a Burgers-type equation with quadratic and modular nonlinearity and nonlinear amplification.// *Doklady Mathematics.* Vol. 97, pp. 99 - 103 (2018).

О внутреннем слое для сингулярно возмущенного уравнения с разрывной правой частью

Ни Мин Кан[1], Н. Н. Нефедов[2]

[1] *Восточно-китайский педагогический университет, Шанхай, КНР.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
E-mails: [1] xiaovikdo@163.com, [2] nefedov@phys.msu.ru

Исследуется новый класс задач с разрывной правой частью на кривой. Такие постановки могут быть использованы при разработке математических моделей. Области, в которых наблюдаются большие градиенты физических величин, называются внутренними переходными слоями. Доказано существование решения уравнения с внутренним переходным слоем и построено его асимптотическое приближение произвольного порядка. В ходе исследования использовался метод Васильевой построения асимптотических приближений, а для доказательства теоремы существования применялся метод сращивания. The work is supported by FUND project No.11871217.

Литература

[1] Н.Н. Нефедов, Мин Кан Ни, Внутренние слои в одномерном уравнении реакция-дифузия с разрывным реактивным членом// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*,*55*:12 (2015), 2042-2048.

[2] Н. Т. Левашова, Н. Н. Нефедов, А. О. Орлов, Стационарное уравнение реакция-диффузия с разрывным реактивным членом//*Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*,*57*:5 (2017), 854-866.

[3] Я Фэй Пан, Мин Кан Ни, Н. Т. Левашова, О. А. Николаева, Внутренние слои для сингулярно возмущённого квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной правой частью// *Дифференциальные уравнения,53*:12 (2017), 1616-1626.

[4] Я Фэй Пан, Мин Кан Ни, М. А. Давыдова, Контрастные страктуры в задачах для стационарного уравнения реакция-диффузия-адвекция с разрывной нелинейность// *Математические заметки,104*:5 (2018), 755-766.

[5] Я Фэй Пан, Мин Кан Ни, Н. Т. Левашова, О внутреннем слое для системы сингулярно возмущенных уравнений с разрывной правой частью// *Дифференциальные уравнения, 54*:12 (2018), 1-12.

[6] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными внутренними слоями. Труды Математического Института имени В. А. Стеклова РАН, 2010, т. 268, с. 268–283.

[7] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973, 272 с.

[8] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М.: Высшая школа, 1990, 208 с.

Interior layers in singularly perturbed parabolic problems

Eugene O'Riordan[1], Jose Luis Gracia[2]

[1] *Dublin City University, Ireland.*
[2] *IUMA and University of Zaragoza, Spain.*
E-mails: [1] *eugene.oriordan@dcu.ie,* [2] *jlgracia@unizar.es*

Interior layers can arise naturally when dealing with nonlinear singularly perturbed parabolic problems [1]. In this talk we will examine a linear singularly perturbed convection-diffusion equation of the form

$$-\varepsilon u_{xx} + au_x + bu + cu_t = f, \quad a > 0, \qquad (x,t) \in (0,1) \times (0,T]$$

coupled with boundary conditions and a discontinuous initial condition. The presence of the discontinuity in the problem data will generate an interior layer in this linear problem. We start be considering the problem, where the convective coefficient $a(t)$ only depends on time. In this case, we identify an analytical function [3] which matches the discontinuity in the initial condition and also satisfies the differential equation. A parameter-uniform numerical method is constructed to approximate the difference between the solution of the singularly perturbed convection-diffusion problem and this analytical function. In the more general case of $a(x,t)$, an interior layer appears in the numerical approximations. To deal with this interior layer, a co-ordinate transformation is required to track the location of the interior layer as it moves in time. With the inclusion of this co-ordinate transformation [2], the numerical method is again seen to be parameter-uniform. Numerical results are presented to support the theoretical results.

References

[1] V. F. Butuzov and I. Smurov, Initial-boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation in case of exchange of stability, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 234, No. 1, 1999, 183–192.

[2] J.L. Gracia and E. O'Riordan, A singularly perturbed convection–diffusion problem with a moving interior layer, *Int. J. Num. Anal. Mod.*, v. 9, No. 4, 2012, 823–843.

[3] J. L. Gracia and E. O'Riordan, Parameter-uniform numerical methods for singularly perturbed parabolic problems with incompatible boundary-initial data, *Appl. Num. Math.*, v. 146, 436–451, 2019.

Vector-Valued Boundary Layers

Lutz Recke

Institute of Mathematics, Humboldt University of Berlin,
Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin
E-mail: recke@math.hu-berlin.de

This talk concerns boundary value problems for singularly perturbed quasilinear autonomous reaction-diffusion systems in divergence form of the type

$$\left.\begin{array}{l}\partial_t u = \varepsilon^2 \partial_x (A(x,u,\varepsilon)\partial_x u) + f(x,u,\varepsilon),\ x \in (0,1),\\ u|_{x=0} = \partial_x u|_{x=1} = 0\end{array}\right\}$$

with smooth diffusion matrix function $A : [0,1] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{M}_n$ and reaction vector function $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$.

Our results about construction of zeroth-order approximate stationary boundary layer solutions of the type $u_\varepsilon(x) = u_0(x) + v_0(x/\varepsilon)$ (with $f(x,u_0(x),0) \equiv 0$ and $v_0(y) = O(e^{-\alpha y})$ for $y \to \infty$, $\alpha > 0$) and about existence, local uniqueness, estimates and stability of exact stationary boundary layer solutions $u \approx u_\varepsilon$ for $\varepsilon \approx 0$ are similar to those which are known for semilinear scalar problems.

But there are at least two essential differences to the scalar case: First, the condition $v_0'(0) \neq 0$, which is sufficient (together with other standard conditions) for local uniqueness in the scalar case, is not sufficient anymore in the vectorial case. And second, the condition, that $v_0'(y) \neq 0$ holds for all $y \in [0, \infty)$, which is sufficient for stability in the scalar case ("monotone boundary layers are stable"), is not sufficient anymore in the vectorial case.

In the vectorial case phase plane analysis and upper/lower solution techniques are not applicable, in general. We use variational formulations, energy estimates, ε-scaled Sobolev space norms and, mainly, an abstract result of implicit function theorem type, which was developed, e.g. in [1] and [2].

This is joint work with V.F.Butuzov, N.N.Nefedov and O.E.Omel'chenko.

The work is supported by the Russian Foundation of Basic Research (RFBR-DFG 14-01-91333) and the DAAD programm "Ostpartnerschaften".

References

[1] L. Recke, O.E. Omel'chenko, "Boundary layer solutions to problems with infinite dimensional singular and regular perturbations"// *J. Differ. Equations* **245** (2008), 3806–3822.

[2] V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, O.E. Omel'chenko, L. Recke, K.R. Schneider, "An implicit function theorem and applications to nonsmooth boundary layers"// In: *Patterns of Dynamics*, ed. by P. Gurevich, J. Hell, B. Sandstede, A. Scheel, Springer Proc. in Mathematics & Statistics vol. **205**, Springer, 2017, 111–127.

A posteriori error estimation for solutions of ill-posed problems

Anatoly Yagola

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
E-mail: yagola@physics.msu.ru

In order to calculate a priori or a posteriori error estimates for solutions of an ill-posed operator equation with an injective operator we need to describe a set of approximate solutions that contains an exact solution. After that we have to calculate a diameter of this set or maximal distance from a fixed approximate solution to any element of this set. I will describe three approaches for constructing error estimates and also their practical applications in solving the inverse elastography problem and the inverse problem of microtomography.

This work was supported by the RFBR grant 17-01-00159 and the RFBR-NSCF grant 19-51-53005.

References

[1] A. Yagola, V. Titarenko, “Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications” // *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. 15, No. 1, 3-17, 2007.

[2] A. S. Leonov, A. N. Sharov and A. G. Yagola, “Solution of the inverse elastography problem for parametric classes of inclusions with a posteriori error estimate” // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, Vol. 26, issue 4, 493-500, 2018.

[3] A. S. Leonov, Y. Wang and A. G. Yagola, “Piecewise uniform regularization for the inverse problem of microtomography with a-posteriori error estimate” // *Inverse Problems in Science and Engineering*, published online, 2018, DOI: 10.1080/17415977.2018.1561676

A new type of solitary wave solution appearing for the mKdV equation under singular perturbations

Lijun Zhang[1], Maoan Han[2], Mingji Zhang[3], C M Khlique[4]

[1] *Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China.*
[2] *Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China.*
[3] *New Mexico Institute of Mining and Technology, Socorro, NM, 87801, USA*
[4] *North-West University, Mafikeng Campus, Mmabatho, 2735, South Africa*
E-mails: [1]lijun0608@163.com , [2]mahan@shnu.edu.cn

In this talk we examine the solitary wave solutions of the mKdV equation with small singular perturbation. Our analysis is a combination of geometric singular perturbation theory and Melnikov’s method. Our result shows that two families of solitary wave solutions of mKdV equation, having arbitrary positive wave speed and infinite boundary limits, persist for selected wave speeds after small singular perturbation. More importantly, a new type of solitary wave solution possessing both valley and peak, named as breather in physics, which corresponds to a big homoclinic loop of the associated dynamical system is observed. It reveals an exotic phenomenon and exhibits rich dynamics of the perturbed nonlinear wave equations. Numerical simulations are performed to further detect the wave speed of the persistent solitary waves and the nontrivial one with both valley and peak.

The work is supported by the National Nature Science Foundation of China (No.11672270, No. 11931016) and MPS Simons Foundation of USA (No. 628308).

References

[1] T. Ogawa, , "Traveling wave solutions to a perturbed Korteweg-de Vries equation," *Hiroshima Math J.* **24** (1994), 401–422.

[2] N. Fenichel, "Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations," *J. Differ. equations,* **31**(1979), 53–98.

[3] M. Han *Bifurcation theory of limit cycles* (Science press, Beijing) (2013).

Renormalization group approach to boundary layer problems

Ran Zhou[1], Shaoyun Shi[2], Wenlei Li[3]

School of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, P. R. China.
E-mails: [1]zhouran@jlu.edu.cn, [2]shisy@jlu.edu.cn, [3]lwlei@jlu.edu.cn

In this talk, we first review the classical renormalization group method in the singularly perturbated problems and the related works. Then we present a new formulation of the renormalized procedure, and we investigate several kinds of singularly perturbed problems by the new strategy. See also [1].

The work is supported by Natural Science Foundation of China grant (No. 11771177, 11501242).

References

[1] R. Zhou, S. Y. Shi and W. L. Li, "Renormalization group approach to boundary layer problems" // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* **71**(2019), 220-230.

Секция
«Математическое моделирование»

Математическое моделирование волноведущих систем

А. Г. Свешников[1], А. Н. Боголюбов[2], А. И. Ерохин[3],
И. Е. Могилевский[4], В. В. Ровенко[5], М. И. Светкин[6]

[1−6]*МГУ им. М.В. Ломоносова, физический ф-т.*
E-mails: [1]*sveshnikov@physics.msu.ru,* [2]*bogan7@yandex.ru,* [3]*forerokhin@gmail.com,*
[4]*imogilevsky@mail.ru,* [5]*rovenko.vladimir@physics.msu.ru,* [6]*mihail-svetkin@mail.ru*

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 гг. классическими работами А.Н.Тихонова и А.А.Самарского «О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ» и «О возбуждении радиоволноводов», вышедшими в «Журнале технической физики» [1,2]. Наряду с теорией регулярных волноводов, то есть однородных по длине прямолинейных волноводов постоянного сечения, в конце сороковых - начале пятидесятых годов появились работы по развитию методов расчета влияния различных плавных нерегулярностей в волноводе на распространяющуюся в нем основную волну моду. Одним из таких методов явился метод поперечных сечений предложенный в 1955 году в работе С.А.Щелкунова и П.Е.Краснушкина и развитый в работах Б.З.Каценеленбаума, А.Г.Свешникова, А.С.Ильинского, В.П.Моденова, А.А.Быкова, Б.Ф.Емелина и ряда других авторов.

Основной трудностью реализации метода поперечных сечений является необходимость на каждом шаге численно решать спектральную задачу, что сильно снижает его эффективность. Этот недостаток удалось преодолеть в начале 60-х годов в предложенном А.Г.Свешниковым неполном методе Галеркина (НМГ) [3]. В 1963 году А.Г.Свешниковым предложен общий принцип формулировки проекционных соотношений неполного метода Галеркина, при котором имеет место сходимость метода в энергетических нормах операторов с разрывными коэффициентами [6,7].

В 50-х годах прошлого века А. Г. Свешниковым введены парциальные условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции позволяют редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями [4,6,7]. Использование разностных аналогов парциальных условий излучения оказалось наиболее эффективным методом для построения численных алгоритмов решения данного класса задач [10]. Важное практическое значение имеет задача о расчете электромагнитного поля в волноведущих системах при наличии ребер на их границах и поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости внутри волновода, что приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля. Рассмотрен ряд задач, посвященных выделению сингулярной части электромагнитного поля волновода в окрестности ребер границы [7], поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости [8,9], в окрестности ребра металло-диэлектрического клина в волноводе. Помимо выделения сингулярной части электромагнитного поля в закрытых волноведущих системах с помощью данного метода удается получить сингулярную часть электромагнитного поля в ряде задач дифракции, в частности, в задаче дифракции электромагнитного поля на телах с диэлектрическими ребрами в окрестности ребра, в окрестности конической точки для задачи дифракции на идеально проводящем теле, содержащим коническую точку. Хотя физические и математические постановки этих задач значительно различаются, каждая из них приводит к эллиптическому дифференциальному уравнению с различными дополнительными условиями, и в основе построения сингулярной части электромагнитного поля лежит общий метод выделения сингулярной части решения эллиптических краевых задач. На основе построенной асимптотики «по гладкости» электромагнитного поля в окрестности ребра удается существенно повысить скорость сходимости алгоритма численного расчета волноведущей системы с входящим ребром [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 19.01.00593, 18-31-00377 мол.

Литература

[1] А.А. Самарский, А.Н. Тихонов "О представлении поля в волноводе в виде суммы ТЕ и ТМ" // *Журнал технич. физики* 1948. **28**, вып. 7. С. 959-970.

[2] А.А. Самарский, А.Н. Тихонов "О возбуждении радиоволноводов"// *Журнал технич. физики.* 1947. **27**, вып. 11, 12. С. 1283-1296.

[3] А.Г. Свешников "К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах" // *Журнал выч. мат. и мат. физ.* 1963. **3**:2, с. 314-326.

[4] А.Г. Свешников "Принципы излучения"// *ДАН СССР* 1950. **3**:5. С. 517-520.

[5] А.Г. Свешников, А.С. Ильинский "Задачи проектирования в электродинамике" // *ДАН СССР* 1972. **204**:5, с. 1077-1080.

[6] А.С. Ильинский, В.В.Кравцов, А.Г.Свешников "Математические модели электродинамики" М.: Высшая школа, 1991.

[7] А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский "Избранные математические задачи теории дифракции", М.: Физический ф-т МГУ, 2012.

[8] A. N. Bogolyubov, A.L. Delitsyn, et al. “Singularities of normal modes in a waveguide with an inhomogeneous filling and reentering edges” // *Journal of Communications Technology and Electronics* — 2003. — **48**:7. — P. 715–722.

[9] А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников “Асимптотическое представление электромагнитного поля диэлектрического волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости” // *Журнал выч. мат. и мат. физ.* 2015. **55**:3, С. 446–459.

[10] А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов, А.Г. Свешников “Математическое моделирование волноведущих систем методом конечных разностей и конечных элементов” // *Физические основы приборостроения* 2013. **2**:1, С. 10-17.

[11] А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, М.И. Светкин “Гибридный метод численного решения уравнения Пуассона в области с диэлектрическим углом” // *Журнал выч. мат. и мат. физ.* 2015. **57**:8, С. 1321–1330.

Модель оптического потока для видеокодирования

А. Б. Альшин[1], Е. А. Альшина[2]

[1] *Intel, Russia.*
[2] *Huawei Technologies, Duesseldorf.*
E-mails: [1] *alexander.alshin@gmail.com,* [2] *elena.alshina@gmail.com*

При кодировании видео наилучшее сжатие при заданном качестве можно получить с использованием B-кадров, когда для текущего кадра предсказание строется с использованием уже закодированных кадров из прошлого и будущего. Модель оптического потока известна более 40 лет и нашла своё применение в таких областях как машиное зрение, трекинг, визуальная одометрия.

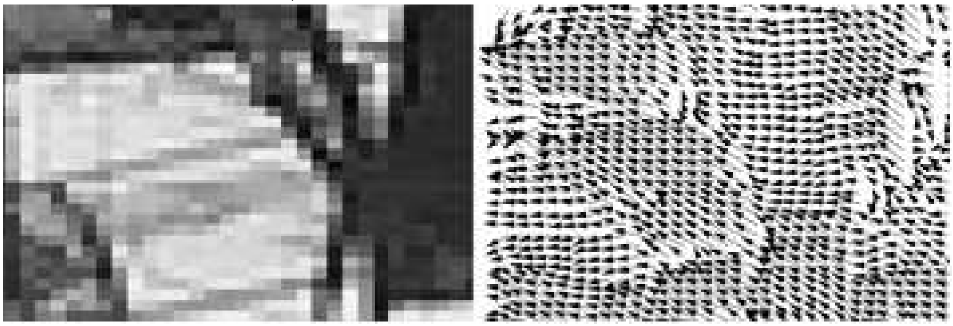
В этой работе будет представлен алгоритм, который на основе уравнения оптического потока улучшает предсказание B-кадров, что в свою очередь приводит к сокращению количества бит необходимых для их кодирования.

Модель оптического потока (1) предполагает, что вдоль траектории движения точки её яркость $I(x,y)$ не меняется:

$$\frac{\partial I}{\partial x}v_x + \frac{\partial I}{\partial y}v_y + \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Традиционно для предсказания B-кадров используется полусумма двух предсказаний из прошлого и будущего, что имеет второй порядок точности по времени. Используя модифицированный алгорим Лукаса — Канаде [1], можно оценить оптический поток (Рис. 1).

Рис. 1: Пример оптического потока (фрагмент кадра - слева, поле векторов движения - справа)



Главное отличие данной работы от предшествнников - это использование эрмитовой интерполяции, что позволяет достичь четвертого порядка точности.

Описанный алгоритм является одним из примерно 30 методов, включенных в прототип стандарта кидеокодирования нового поколения VVC/H.266, который позволяет улучшить сжатие на 37% по сравнению с текущим стандартом видеокодирования (HEVC/H.265). Вклад в сжатие от предложенного в работе алгоритма для последовательностей разного разрешения показан в таблице 1. Отрицательные значения BD-рейт означают снижение размера битового потока при сохранении уровня качества видео.

Таблица 1: Сокращение битового потока в результате применения предложенного алгоритма

Sequences		BD-rate gain		
		Y	U	V
4K	Traffic	-2.3%	-1.0%	-0.9%
1080p	Cactus	-3.4%	-1.8%	-1.3%
WVGA	Party Scene	-3.8%	-1.6%	-1.5%
WQVGA	BQSquare	-7.7%	-3.7%	-3.8%

Данное исследование было проведено авторами во время их работы в компании Samsung Electronics (2007-2018).

Литература

[1] Bruce D. Lucas and Takeo Kanade, “An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision” // *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, (1981), 674-679.

Численное решение поликонтактной задачи термомеханического взаимодействия системы тел

П. С. Аронов[1,2], М. П. Галанин[1,2], В. В. Лукин[1,2], А. С. Родин[1,2]

[1]*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва.*
[2]*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва.*
E-mail: galan@keldysh.ru

Доклад посвящен разработке алгоритма численного решения поликонтактной задачи термомеханического взаимодействия системы многих тел. Представлен краткий обзор распространенных методов. Использованные авторами данной работы алгоритмы основаны на методе декомпозиции области (МДО) в варианте метода Шварца. Его основной характеристикой и главным преимуществом является сведение решения общей задачи контактного взаимодействия нескольких тел к последовательности решений стандартных задач механики для каждого тела по отдельности в рамках итерационного процесса. На примере решения ряда двумерных задач с контактной поверхностью, имеющей сложную геометрическую форму, проведено исследование зависимости сходимости итерационного процесса от выбора итерационного параметра. Выполнено сравнение полученных результатов с результатами, вычисленными с помощью одного из вариантов метода множителей Лагранжа. Дискретизация решаемой нелинейной дифференциальной задачи выполнена методом конечных элементов. С помощью МДО проведено численное моделирование напряженно-деформированного состояния участка тепловыделяющего элемента с учетом контакта топливных таблеток друг с другом и с оболочкой. Задача решена в осесимметричной постановке. Представлены результаты расчетов, в которых количество таблеток варьировалось от единиц до сотен.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00252, 18-31-20020).

Application of R-functions Theory to Solution of Inverse Problem of Ultrasonic Tomography

K. A. Budunova[1], V. F. Kravchenko[2], D. V. Churikov[3]

[1,2]*Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow, Russia*
[3]*Scientific and Technological Center of Unique Instrumentation of RAS, Moscow, Russia*
E-mails: [1]1917schw@mail.ru, [2]kvf-ok@mail.ru [3]mpio-nice@mail.ru

Application of R-functions theory [1,2] to inverse problem of ultrasonic tomography is discussed. Acoustic pressure $u(\mathbf{r},t)$ in domain $\Omega \times (0,T)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, meets the wave equation [3]

$$c(\mathbf{r})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(\mathbf{r},t)$$

with given boundary and initial conditions.
Set of values $U(\mathbf{r},t)$ of function $u(\mathbf{r},t)$ on the boundary $\partial\Omega$ of domain Ω is given as initial data. We should restore coefficient $c(\mathbf{r})$ by minimization of functional [3]

$$\Phi(c) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{r},t) - U(\mathbf{r},t)\right)^2 \, ds \, dt. \tag{1}$$

R-functions theory allows to take in account a priori known boundary conditions for coefficient $c(\mathbf{r})$ and than obtain more precise numerical solution [1]. For example, let on the boundary $\partial\Omega_1$ of investigated object be given condition

$$c(\mathbf{r}) \mid_{\partial\Omega_1} = \varphi(\mathbf{r}).$$

Then approximate solution $\tilde{c}(\mathbf{r})$ of problem (1) is found in the form

$$\tilde{c}(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r}) \sum_{k=0}^{N} a_k \psi_k(\mathbf{r}) + \varphi(\mathbf{r}),$$

where $\psi_k(\mathbf{r})$ are some basis functions, a_k are coefficients, $\omega(\mathbf{r})$ is R-function vanishing on $\partial\Omega_1$.
In the report results of numerical experiments are presented.
The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (Project no. 18-29-02108).

References

[1] V.F. Kravchenko, O.V. Kravchenko "Constructive Methods of Algebra of Logic, Atomic Functions, Wavelets, Fractals in Physics and Engineering". Edited by V.F. Kravchenko. Tekhnosfera, Moscow, 2018. 698 pages. [in Russian]

[2] V. F. Kravchenko, "Lectures on the Theory of Atomic Functions and Their Certain Applications", Radiotekhnika, Moscow, 2003. 510 pages. [in Russian]

[3] A.V. Goncharsky, S.Y. Romanov, S.Y. Seryozhnikov, "Inverse Problems of Layer-by-layer Ultrasonic Tomography with the Data Measured on a Cylindrical Surface" // *Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie*, **18**:3 (2017), 267-276.

Вероятностные характеристики приема сигналов с фазовой манипуляцией при передаче по трансионосферным линиям связи

В. В. Батанов[1], Л. Е. Назаров[2]

[1,2] *Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, г. Фрязино.*

E-mails: [1] *bvitaly@inbox.ru,* [2] *levnaz2018@mail.ru*

При распространении по спутниковым линиям передачи сигналы испытывают искажения за счет влияния ионосферы как дисперсионной среды [1]. По отношению к распространению в свободном пространстве эти искажения приводят к энергетическим потерям при корреляционной обработке, составляющей основу синхронизации и демодуляции сигналов. Суть искажений - изменение огибающей сигналов и возникновение межсимвольной (МСИ) и межканальной (МКИ) интерференций.

Актуальной является проблема оценивания этих энергетических потерь за счет влияния ионосферы спутниковых линий для класса сложных сигналов. В докладе при решении данной проблемы рассматриваются двумерные сигналы с 4-уровневой фазовой манипуляцией (ФМ4), широко используемые в приложениях.

Основу анализа распространения сигналов по ионосферным линиям представляет решение волнового уравнения относительно плоской волны $E(z,f)$ с частотой f, нормально падающей на слой неоднородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z,f)$ и распространяющейся по оси z [1].

$$\frac{d^2E(z,f,t)}{dz^2} + \frac{(2\pi)^2 f^2}{c^2}\varepsilon(z,f)E(z,f,t) = 0 \qquad (1)$$

Здесь c - скорость света.

В докладе даны методики оценивания энергетических потерь на основе использования (1), приведены численные результаты оценивания энергетических потерь за счет влияния ионосферы по отношению к распространению сигналов в свободном пространстве при наличии помехи в виде аддитивного белого гауссовского шума [2].

Литература

[1] Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука. 1967.

[2] Назаров Л.Е., Батанов В.В. Вероятностные характеристики обнаружения радиоимпульсов при распространении по ионосферным линиям передачи спутниковых систем связи. // *Радиотехника и электроника.* 2017. Т.62. №9. Стр.866-874.

Математические задачи теории волноведущих систем

А. Н. Боголюбов

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет.
E-mail: bogan7@yandex.ru

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 гг. классическими работами А.Н. Тихонова и А.А. Самарского «О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ» и «О возбуждении радиоволноводов», вышедшими в «Журнале технической физики» [1], [2].

Наряду с теорией регулярных волноводов, то есть однородных по длине прямолинейных волноводов постоянного сечения, в конце сороковых - начале пятидесятых годов появились работы по развитию методов расчета влияния различных плавных нерегулярностей в волноводе на распространяющуюся в нем основную моду. Одним из таких методов явился метод поперечных сечений предложенный в 1955 году в работе С.А. Щелкунова и П.Е. Краснушкина. Основной трудностью реализации метода поперечных сечений является необходимость на каждом шаге численно решать спектральную задачу, что сильно снижает его эффективность. Этот недостаток удалось преодолеть в начале 60-х годов в предложенном А.Г. Свешниковым неполном методе Галеркина. В 1963 году А.Г. Свешниковым предложен общий принцип формулировки проекционных соотношений неполного метода Галеркина, при котором имеет место сходимость метода в энергетических нормах операторов с разрывными коэффициентами [3].

В 50-х годах прошлого века А. Г. Свешниковым были предложены парциальные условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции позволяют редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями [4]. Использование разностных аналогов парциальных условий излучения оказалось наиболее эффективным методом для построения численных алгоритмов решения данного класса задач.

Разработанные методы позволяют рассматривать волноведущие системы со сложным неоднородным и анизотропным заполнением, в частности, биизотропным, гиромагнитным, киральным, фрактальным, а также волноводы на основе фотонных кристаллов.

Задачи синтеза волноведущих систем ставятся как задачи математического проектирования для определения основных характеристик синтезируемого объекта, при которых этот объект обладает требуемыми техническими и эксплуатационными свойствами. Наиболее полный и универсальный подход к решению задач синтеза волноведущих систем заключается в рассмотрении таких задач как математически некорректных, с применением для их решения метода регуляризации А.Н. Тихонова. Такой подход предложен в работах А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского [5]. На кафедре математики физического факультета МГУ под руководством А.Г. Свешникова проведено исследование ряда важных задач синтеза волноведущих систем.

В настоящее время при конструировании различных СВЧ-устройств все более широкое применение находят волноводы сложного сечения, применение которых позволяет создавать устройства, превосходящие по своим параметрам их аналоги на прямоугольных и круглых волноводах. Известно, что наличие ребер на границах и поверхностях разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения. Одним из способов преодоления проблем, связанных с наличием сингулярности у электромагнитного поля в окрестности ребра, является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики по гладкости электромагнитного поля в окрестности ребра. На кафедре математики физического факультета МГУ рассмотрен ряд задач, посвященных выделению сингулярной части электромагнитного поля волновода в окрестности ребер границы, поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости, в окрестности ребра металло-диэлектрического клина в волноводе.

Литература

[1] А.А. Самарский, А.Н. Тихонов “О представлении поля в волноводе в виде суммы ТЕ и ТМ” // *Журнал технич. физики* 1948. **28**, вып. 7. С. 959-970.

[2] А.А. Самарский, А.Н. Тихонов “О возбуждении радиоволноводов”// *Журнал технич. физики.* 1947. **27**, вып. 11, 12. С. 1283-1296.

[3] А.Г. Свешников “К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах” // *Журнал выч. мат. и мат. физ.* 1963. **3**:2, с. 314-326.

[4] А.Г. Свешников “Принципы излучения”// *ДАН СССР* 1950. **3**:5. С. 517-520.

[5] А.Г. Свешников, А.С. Ильинский “Задачи проектирования в электродинамике” // *ДАН СССР* 1972. **204**:5, с. 1077-1080.

Работы А.Г. Свешникова в области задач нестационарной электродинамики, сильноточной электроники и динамики плазмы

А. А. Быков

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.
E-mail: abkov@yandex.ru

В 1980–х и 1990–х годах группа сотрудников кафедры математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, сотрудников ИАЭ им. И.В. Курчатова и нескольких других организаций под руководством А.Г. Свешникова выполнила цикл работ, направленных на математическое моделирование, компьютерное моделирование, проектирование и техническую реализацию нескольких классов приборов, основанных на использовании различных физических принципов и явлений, объединенных некоторыми принципиально важными общими чертами: (1) наличие неквазистационарного электромагнитного поля (ЭМП), (2) неограниченная область, занимаемая ЭМП, излучение ЭМ энергии в виде направляемых волноводных мод или волн открытого пространства, (2) наличие пучка заряженных частиц (электронов, ионов), и/или плазмы, (3) взаимодействие этих объектов, при котором происходит перекачка энергии в обе стороны.

Замечательная особенность этого цикла состоит в том, что (a) использование строго обоснованной математической модели, для которой была дана точная постановка задачи, доказаны теоремы существования и единственности решения, устойчивости решения по отношению к малым возмущениям параметров, (b) создан численный алгоритм полной дискретизации, т.е. система алгебраических уравнений, пригодная для решения на ЭВМ, дано полное и строгое теоретическое обоснование численного алгоритма, доказаны теоремы сходимости к точному решению, (c) созданы коды для ЭВМ, полностью реализующие численный алгоритм, (d) получены результаты, которые были затем использованы при практическом проектировании приборов, основанных на упомянутых принципах.

Наиболее важные достижения этого цикла работ состояли в том, что (A) сформулированы и строго обоснованы нестационарные условия излучения для электромагнитных полей в неограниченных областях в декартовой, цилиндрической, сферической системах координат, (B) построен полный дискретный аналог системы уравненйи Максвелла для сеточных функций, представляющих поля и токи на системе сдвинутых сеток, обеспечивающий точное выполнение дискретных алалогов законов сохранения энергии и других важных физических величин, свойствененых каждой конкретной задаче, (C) сформулированы и обоснованы условия излучения для сеточных полей в неограниченных областях, (D) построен дискретный аналог системы уравнений движения частиц, также удовлетворяющий законам сохранений, (E) дано описание взаимодействия сеточных полей и крупных частиц, причем для гибридной системы выполнены законы сохранения полной энергии и импульса поле+частицы. Приводятся библиографические ссылки на основные работы цикла.

Литература

[1] А. Р. Майков, А. Д. Поезд, А. Г. Свешников, С. А. Якунин, ЖВМиМФ, **29**:7 (1989), 1000–1011.

Распространение многочастотной электромагнитной волны в нелинейном плоском волноводе

Дмитрий Валовик

440026, г. Пенза, ул. Красная, 40, Пензенский госуниверситет.
E-mail: dvalovik@mail.ru

В работе изучено распространение многочастотной электромагнитной волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, где

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_k e^{-i\omega_k t}, \quad \mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{H}_k e^{-i\omega_k t} \tag{1}$$

и $n \geqslant 2$, в плоском диэлектрическом волноводе $\Sigma = \{(x, y, z) : 0 \leqslant x \leqslant h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ толщины $h > 0$. Волновод экранирован бесконечно проводящими стенками при $x = 0$ и $x = h$. Диэлектрическая проницаемость волновода имеет вид $\epsilon = \epsilon_l + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |\mathbf{E}_k|^2$, где $\epsilon_l, \alpha_i > 0$ – постоянные; магнитная проницаемость μ волновода совпадает с магнитной проницаемостью вакуума.

Компоненты $\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k$ поля $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ имеют вид

$$\mathbf{E}_k = (0, E_y^{(k)}, 0)^\top, \quad \mathbf{H}_k = (H_x^{(k)}, 0, H_z^{(k)})^\top, \tag{2}$$

где $E_y \equiv e_y^{(k)}(x) e^{i\gamma_k z}$; здесь $e_y^{(k)}(x)$ – вещественные функции, γ_k – неизвестные вещественные параметры.

Компоненты $\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k$ поля $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_k = -i\epsilon\omega_k \mathbf{E}_k, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_k = i\mu\omega_k \mathbf{H}_k, \end{cases} \tag{3}$$

где $k = \overline{1, n}$; касательные компоненты электрического поля обращаться в нуль на идеально проводящих стенках волновода, кроме этого, мы считаем, что величины $e_y^{(k)}(x)|_{x=0}$ имеют фиксированные ненулевые значения [1].

Задача о распространении волн сводится к нахождению таких наборов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, что существуют нетривиальные (по каждой компоненте) поля $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, удовлетворяющие перечисленным выше требованиям [1, 2]. Таким образом, физическая задача о распространении волн является многопараметрической задачей на собственные значения для нелинейной системы уравнений (3).

Доказано, что существуют два типа решений изучаемой задачи: решения, которые переходят в решения соответствующих линейных задач при $\alpha_k \to +0$, и решения этим свойством не обладающие.

Работа поддержана РНФ, грант № 18-71-10015.

Литература

[1] D.V. Valovik, “Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena” // *Journal of Optics*, **19**:11 (2017), 115502 (16 pages).

[2] V.Yu. Kurseeva, S.V. Tikhov, D.V. Valovik, “Nonlinear multiparameter eigenvalue problems: Linearised and nonlinearised solutions” // *Journal of Differential Equations*, **267**:4 (2019), 2357–2384.

Обратная задача восстановления комплексной диэлектрической проницаемости диафрагмы по модулю коэффициента прохождения и модулю коэффициента отражения

Е. Д. Деревянчук[1], Е. В. Гусарова[2]

[1,2]*Пенза, Пензенский Государственный Университет.*
E-mails: [1]katyader11@yandex.ru, [2]gusarova.gu@yandex.ru

Постановка задачи. Данная работа является продолжением работ авторов [1]–[2]. Отличием данной работы от предыдущих работ является то, что известны значения не амплитуды и фазы падающей или прошедшей волн, а только значения амплитуд падающей волны и прошедшей. Целью данной работы является разработка численно-аналитического метода решения поставленной обратной задачи. Рассмотрим постановку задачи. В прямоугольном волноводе расположена односекционная диафрагма. Вне диафрагмы внутри волновода диэлектрическая и магнитная проницаемости равны 1, т.е. $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Диафрагма заполнена изотропным материалом с известной магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0 = 1$ и неизвестной комплексной диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon^{'} + i\varepsilon'' \tag{1}$$

где $\varepsilon' = Re(\varepsilon)$, $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$, где σ – проводимость, ω – круговая частота. В волноводе распространяется ЭМ-волна H_{10} с TE-поляризацией. Волновод работает в одномодовом режиме.

Требуется по известным значениям амплитуды падающего поля и прошедшего поля восстановить комплексную диэлектрическую проницаемость.

Численный метод и численные результаты. Обратная задача сводится к решению краевой задачи для системы уравнений Максвелла. В результате ряда преобразований краевая задача сводится к решению нелинейной системы уравнений, которая решается с помощью метода Левенберга-Марквардта [2]. Предложенный метод был реализован в виде комплекса программ. Комплекс программм тестировался на нескольких сериях задач. Был выбран диапазон значений комплексной диэлектрической проницаемости: $2 \leq \varepsilon' \leq 23$, $0.5 \leq \varepsilon'' \leq 2$. Численные результаты показали, что максимальная относительная погрешность вычисления вещественной и мнимой частей не превышает $5,3$ %.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-3604.2018.1 и гранта Министерства образования и науки РФ(госзадание № 1.894.2017/4.6)

Литература

[1] Е. Д. Деревянчук, М. А. Логинов, В. В. Скоркин, О. В. Фролова, “Обратные задачи восстановления параметров анизотропной диафрагмы в прямоугольном волноводе” // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*,**3** (2019).

[2] E. D. Derevyanchuk, Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov “Reconstructing permittivity and permeability of multi-sectional anisotropic diaphragm's” // *Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium. Toyama, Japan, August.*, (2018).

О представлении электромагнитных полей в закрытых волноводах с помощью четырех потенциалов

Д. В. Диваков, М. Д. Малых[1], Л. А. Севастьянов, А. А. Тютюнник

Российский университет дружбы народов
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.
[1] *E-mail: malykh_md@pfur.ru*

Согласно теореме А.Н. Тихонова и А.А. Самарского электромагнитное поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в полом волноводе постоянного сечения S может быть представлено при помощи двух скалярных функций — потенциалов. В случае же волновода, заполненного неоднородным веществом, путем введения потенциалов не удается одновременно проинтегрировать часть уравнений Максвелла и уменьшить число искомых функций. Однако, главная польза от введения потенциалов состоит в переходе от разрывных компонент поля к непрерывным потенциалам.

Направим ось Oz декартовой системы координат по оси волновода и примем для краткости, что $\nabla = (\partial_x, \partial_y, 0)^T$ и $\nabla' = (-\partial_y, \partial_x, 0)^T$. Вместо четырех разрывных поперечных компонент электромагнитного поля предлагается использовать четыре потенциалы, связанные с полем соотношениям

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \frac{1}{\epsilon}\nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \frac{1}{\mu}\nabla' u_h. \tag{1}$$

Приняв это, можно установить следующую теорему [1].

Теорема. Пусть заполнение волновода не меняется вдоль оси и описывается кусочно-непрерывными функциями ϵ и μ, заданными на сечении S волновода. Для любого электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$, удовлетворяющего уравнениям Максвелла в волноводе, граничным условиям идеальной проводимости на стенках волновода и условиям сопряжения на линии разрыва заполнения волновода, найдутся такие функции $u_e, u_h : \mathbb{R} \to \overset{\circ}{W}{}^1_2(S)$ и $v_e, v_h : \mathbb{R} \to W^1_2(S)$, что справедливо равенство (1). Указанное представление единственно с точностью до аддитивных констант.

Эта замена позволяет работать в классических функциональных пространствах и обойти главную вычислительную сложность волноводных задач с разрывным заполнением — аппроксимацию разрывных функций [2].

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».

Литература

[1] М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов, “О представлении электромагнитных полей в закрытых волноводах с разрывным заполнением при помощи непрерывных потенциалов” // *ЖВМ и МФ*, **59**:2 (2019), 161–173.

[2] А. А. Тютюнник, “О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением” // *Вестник РУДН. Серия МИФ*, **26**:2 (2018), 129–139.

Полуклассические модели анализа эффектов квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников

Ю. А. Еремин[1], И. В. Лопушенко[2], А. Г. Свешников[2]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
[1]*факультет вычислительной математики и кибернетики,*
[2]*физический факультет.*
E-mail: [1]*eremin@cs.msu.ru*

Прогресс в области плазмоники ведет к тому, что масштабы элементов плазмонных структур переходят на наноразмерный уровень. В этом случае классическое описание полей в рамках теории Максвелла становится недостаточным, и начинают проявляться квантовые эффекты, такие как нелокальное экранирование и туннельные эффекты. Исследование влияния этих эффектов обеспечивает критическое понимание фундаментальных границ локализации и усиления поля в наноплазмонике, а также установление правильного функционирования плазмонных устройств. Для их описания используются как квазиклассические модели эффекта нелокальности, так и чисто квантовые, например TDDFT. В то же время TDDFT, которая хорошо подходит для объяснения экспериментальных результатов, применима лишь для частиц с размерами всего в несколько нанометров. В связи с этим квазиклассические модели являются наиболее востребованными, так как позволяют правильно описывать поведение оптических характеристик частиц диаметрами порядка 10–20нм [1].

Фундаментальной научной проблемой в рамках квантовой наноплазмоники является разработка и реализация наноразмерных источников когерентного излучения. Идея состоит в том, чтобы использовать плазмонные поля вместо фотонных, используемых в обычных лазерах. Дело в том, что плазмонные поля позволяют преодолеть дифракционное ограничение размера лазера. Плазмонный нанолазер (ПН) получил название SPASER [2]. Концепция ПН была впервые предложена Стокманом и Бергманом в 2003 году. Первая экспериментальная реализация ПН была опубликована Ногиновым с соавторами в 2009 году. В ней использовались резонаторы, состоящие из золотой наносферы со сферической оболочкой из прозрачного диэлектрика [2]. В настоящее время проводятся многочисленные исследования, посвященные разработке различных перспективных схем плазмонных нанолазеров.

В настоящем докладе представлена компьютерная технология, позволяющая исследовать влияние эффекта нелокальности на оптические свойства гибридных плазмонных структур в рамках модели обобщенного нелокального отклика (GNOR) [1]. В основу этой технологии положен метод дискретных источников [3]. Рассматриваются вопросы оптимизации характеристик резонаторов ПН с целью получения максимального усиления поля. Также обсуждается модель возбуждения препятствия релятивистским электроном (EELS) с учетом нелокальности [4]. Использование электронов позволяет повысить разрешающую способность методов спектроскопии в задачах характеризации плазмонных наноструктур.

Литература

[1] M. Wubs, A. Mortensen. “Nonlocal Response in Plasmonic Nanostructures”/Quantum Plasmonics. S.I. Bozhevolnyi et al. (eds.), Springer, Switzerland. 2017. P. 279-302.

[2] В. И. Балыкин. “Плазмонный нанолазер: современное состояние и перспективы” //Успехи физ. наук, **188**:9 (2018), 935-963.

[3] Ю. А. Еремин, А. Г. Свешников. “Метод Дискретных источников для исследования влияния нелокальности на характеристики резонаторов плазмонного нанолазера”
//ЖВМиМФ, **59**:10 (2019), 140-149.

[4] Ю. А. Еремин, И. В. Лопушенко. “Анализ влияния квантового эффекта нелокальности в плазмонике с помощью метода дискретных источников” //Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 3, **6** (2019).

Помехоустойчивая обработка сигналов с увеличенной базой и использованием весовых функций

А. С. Зудилин[1], В. Ф. Кравченко[2], Л. Е. Назаров[3]

[1,3] *Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, г. Фрязино.*
[2] *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва.*
E-mails: [1] andreyzas78@gmail.com, [2] kvf-ok@mail.ru , [3] levnaz2018@mail.ru

В цифровой обработке сигналов применяются весовые функции, с их использованием решается ряд проблем, включая помехоустойчивую передачу информации по каналам с сосредоточенными по спектру помехами (ССП) [1]. Поиск решений этой задачи составляет самостоятельное направление в теории связи. В докладе приведены результаты по развитию этого направления для сигналов с ортогональным частотным мультиплексированием (OFDM-сигналы), интенсивно используемых в приложениях [1].OFDM-сигналы представляют сумму N парциальных сигналов, ортогональных на интервале T

$$\dot{s}(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \dot{\alpha}_m exp(j2\pi mt/T) \tag{1}$$

символы $\dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_1, ...\dot{\alpha}_{N-1}$ задаются информационными битами и сигнальными “созвездиями”.

ССП подобны парциальным сигналам в (1), что обусловливает их эффективность снижения помехоустойчивости. Методы снижения влияния ССП основаны на их компенсации и на увеличении базы сигналов в сочетании с весовой обработкой. В докладе рассмотрены проблемы разработки сигнальных конструкций с увеличенной базой на основе OFDM-сигналов и алгоритмов их приема с весовой обработкой при наличии ССП. Даны критерии оптимальности весовых функций, задающих максимальную помехоустойчивость передачи информации, и показано, что ряд весовых функций (Кайзера, Хэмминга, Кравченко [2]) практически удовлетворяют сформулированным критериям оптимальности.

Литература

[1] Назаров Л.Е., Зудилин А.С. Эффективность окон Кайзера и Кравченко-Кайзера при приеме сигнальных конструкций на основе OFDM-сигналов, устойчивых к сосредоточенным по спектру помехам. // *Физические основы приборостроения.* (2018). Т.7, №3(29), стр.26-36.

[2] Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018.

Спектральный метод расчета постоянных распространения в поперечно-неоднородных волноводах

А. С. Ильинский

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.
E-mail: celd@cs.msu.ru

Волноводы со слоистым диэлектрическим заполнением обладают многими важными и интересными свойствами. Вопрос о существовании и основных свойствах системы нормальных волн в поперечно–неоднородных волноводах привел к исследованию несамосопряженных спектральных задач.

В настоящем докладе рассмотрена задача о собственных волнах экранированной микрополосковой линии, представляющей собой идеально проводящую, идеально тонкую полоску, лежащую внутри регулярного волновода со слоистым заполнением.

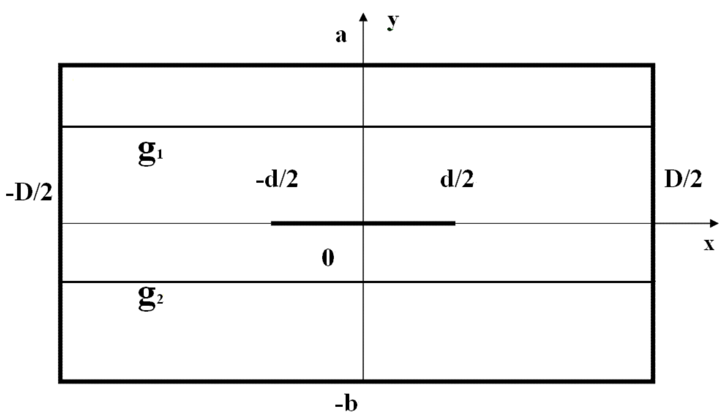


Рис. Экранированная щелевая линия

На основе спектрального представления электромагнитного поля в областях выше и ниже полоски получены представления полей нормальных волн через токи на идеально проводящей пластине. Условия на металлической пластине дают систему соотношений для определения постоянных распространения. Установлены условия разрешимости операторных уравнений и дескретность спектра нормальных волн [1].

Литература

[1] А.С. Ильинский Обоснование спектрального метода расчета постоянных распространения волноводов, микрополосковых и щелевых линий // *Радиотехника и электроника*, **2012. том 57. №9**, с. 996-1003.

О разрушении за конечное время решений нелинейного уравнения дрейфовых волн в плазме с произвольной положительной энергией

М. О. Корпусов

кафедра математики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.
E-mail: korpusov@gmail.com

В данном докладе мы рассмотрим следующую задачу Коши для $3+1$–мерного уравнения дрейфовых волн в плазме:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp u(x,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}(x,t)+|u(x,t)|^q=0, \quad u(x,0)=u_0(x), \quad u'(x,0)=u_1(x), \tag{1}$$

где $(x,t)=(x_1,x_2,x_3,t)\in\mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^1_+$,

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Дадим определение сильного решения задачи Коши (1).

Определение. *Функция*

$$u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2)}([0,T];H^1_0(\mathbb{R}^3))\cap\mathbb{C}^{(1)}([0,T];L^{q+1}(\mathbb{R}^3))$$

называется локальным во времени сильным решением задачи Коши (1), *если для всякой* $\phi(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];H^1_0(\mathbb{R}^3)\cap L^{q+1}(\mathbb{R}^3))$ *выполнено следующее равенство*:

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\left(\nabla_\perp\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\nabla_\perp\phi(x,t)\right)+\right.$$
$$\left.+\,u_{x_3}(x,t)\phi_{x_3}(x,t)-|u(x,t)|^q\phi(x,t)\right]dx\,dt=0, \tag{2}$$

где

$$\nabla_\perp=\left(\partial_{x_1},\partial_{x_2},0\right).$$

Кроме того, $u_0(x) \in H_0^1(\mathbb{R}^3) \cap L^{q+1}(\mathbb{R}^3)$ *и* $u_1(x) \in H_0^1(\mathbb{R}^3)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $q > 1$ *и выполнены условия*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla_\perp u_0(x)\right|^2 \, dx > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla_\perp u_0(x), \nabla_\perp u_1(x)\right) \, dx > 0, \tag{3}$$

а также либо $E(0) \leqslant 0$ *либо* $E(0) > 0$,

$$E(0) = \frac{1}{2}\| |\nabla_\perp u_1| \|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0x_3}\|_2^2 - \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^q u_0(x) \, dx, \tag{4}$$

и в этом последнем случае дополнительно выполнено неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla_\perp u_0(x), \nabla_\perp u_1(x)\right) \, dx \right)^2 > 2E(0) \int_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla_\perp u_0(x)\right|^2 \, dx, \tag{5}$$

тогда для времени T *из определения сильного решения справедлива следующая оценка:*

$$T \leqslant T_0,$$

$$T_0 = \frac{2}{q-1} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla_\perp u_0(x)\right|^2 \, dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla_\perp u_0(x), \nabla_\perp u_1(x)\right) \, dx} \quad \text{при} \quad E(0) \leqslant 0, \tag{6}$$

$$T_0 = \frac{2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla_\perp u_0(x)\right|^2 \, dx}{(q-1) \left[\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla_\perp u_0(x), \nabla_\perp u_1(x)\right) \, dx \right)^2 - 2E(0) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla_\perp u_0(x)\right|^2 \, dx \right]^{1/2}} \tag{7}$$

в случае $E(0) > 0$, *причем при* $t \in [0, T]$ *справедлива следующая оценка снизу:*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_\perp u(x,t)|^2 \, dx \geqslant \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla_\perp u_0(x)\right|^2 \, dx}{\left[1 - t/T_0\right]^{4/(q-1)}}. \tag{8}$$

Проверим совместность условий (3), $E(0) > 0$ и (5). Пусть $u_0(x) \in H_0^1(\mathbb{R}^3) \cap L^{q+1}(\mathbb{R}^3)$ таково, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_\perp u_0(x)|^2 \, dx > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^q u_0(x) \, dx > \frac{1}{2}\|u_{0x_3}\|_2^2. \tag{9}$$

Тогда при таком фиксированном $u_0(x)$ положим

$$u_1(x) = \lambda u_0(x), \quad \lambda \neq 0. \tag{10}$$

Выберем $\lambda^2 > 0$ настолько большим, чтобы было выполнено неравенство

$$E(0) = \frac{\lambda^2}{2}\||\nabla_\perp u_0|\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0x_3}\|_2^2 - \frac{1}{q+1}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^q u_0(x)\,dx > 0. \tag{11}$$

Докажем, что тогда выполнено неравенство (5). В самом деле, это неравенство примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\lambda^2\||\nabla_\perp u_0|\|_2^4 > \\ > 2\left(\frac{\lambda^2}{2}\||\nabla_\perp u_0|\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0x_3}\|_2^2 - \frac{1}{q+1}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^q u_0(x)\,dx\right)\||\nabla_\perp u_0|\|_2^2,\end{gathered} \tag{12}$$

которое, очевидно, выполнено в силу неравенств (9). Заметим, что наши условия (3), $E(0) > 0$ и (5) совместны для сколь угодно большой положительной энергии $E(0)$.

Построение биортогональных частотно–модифицированных вейвлетов Кравченко ориентированных на обращение свертки

В. Ф. Кравченко[1,3], О. В. Кравченко[1–3], А. В. Юрин[3]

[1] *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7*
[2] *ФИЦ ИУ РАН, ВЦ им. А.А. Дородницына, Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40*
[3] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5*
E-mails: kvf-ok@mail.ru, yualex@rambler.ru

В различных областях физики требуется учитывать влияние канала связи на регистрируемые сигналы. При этом имеют место искажения реального сигнала, зависящие от аппаратной функции и шумов. Если форма аппаратной функции известна, то задача восстановления сигнала сводится к решению интегрального уравнения. Математическое описание такой задачи предполагает использование свёрточной модели интегральных уравнений Фредгольма 1–го рода типа свертки, которая является некорректной [1, 2]. При ее решении выполняется оценка полезного сигнала на основе имеющейся априорной информации о сигнале, шуме, аппаратной функции. Для отыскания приближенного решения интегрального уравнения типа свертки на основе преобразования Фурье (ПФ) применяется метод регуляризации Тихонова [2]. Наилучших результатов при решении методами ПФ удается достичь, когда неискаженный сигнал $x(t)$ равномерно гладкий и эффективно аппроксимируется базисом Фурье. При этом теряется информация о локальном поведении функции. Для компактного представления сигнала $x(t)$, имеющего особенности, желательно, чтобы элементы базиса были локализованы. Вейвлет–базисы удовлетворяют такому требованию [3]. Выполняя пороговую обработку коэффициентов вейвлет–разложения [3] можно добиться почти оптимальной оценки полезного сигнала $x(t)$. Для решения интегрального уравнения типа свертки на основе ПФ предпочтительно выбрать вейвлеты с компактным носителем в частотной области, которые имеют быстрое затухание. Оптимальным с этой точки зрения являются ортогональные вейвлеты Кравченко [3]. С целью получения максимальной вычислительной эффективности проводится модификация ортогональных вейвлетов с использованием передаточной функции восстанавливающего фильтра. Такой подход порождает нестационарный кратномасштабный анализ, а блоки фильтров быстрых вейвлетных преобразований ориентированы на приближенное решение интегрального уравнения типа свертки.

Литература

[1] Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. М.: Советское радио, 1979, 271 с.

[2] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 285 с.

[3] Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. Под редакцией В.Ф. Кравченко. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018, 698 с.

Моделирование эффективных скоростей распада окислов азота в шлейфе выбросов промышленного предприятия

Ю. В. Мухартова[1], М. А. Давыдова[2]

[1,2] *МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики*
E-mails: [1]muhartova@yandex.ru, [2]m.davydova@physics.msu.ru

Работа посвящена моделированию эффективных скоростей распада окислов азота ($NO_x = NO + NO_2$), попадающих в атмосферу в результате выбросов промышленных предприятий. Окислы азота переносятся турбулентным воздушным потоком, а также вступают в достаточно сложную цепочку реакций. Метеорологические условия в окрестности предприятия считаются известными. В качестве первого шага в решении задачи описания шлейфа предприятия было предложено использовать упрощенную параметризацию слагаемых, отвечающих за стоки NO_x, а именно, считать их пропорциональными концентрации. Коэффициенты пропорциональности в «стоковых» слагаемых представляют собой эффективные скорости распада. Эффективные скорости распада окислов азота рассчитывались как величины, обратные временам жизни, за которые их концентрации уменьшаются в e раз по сравнению с максимальными значениями. Был рассмотрен ряд основных газофазных процессов дневной химии тропосферы с участием NO_x [1]. В первом приближении учтены 30 реакций с участием 14 веществ, концентрации 4 из которых (CO, CO_2, H_2O и O_2) считались постоянными (средние значения в атмосферном слое перемешивания), а для оставшихся 10 веществ (NO, O_3, NO_2, $O(^3P)$, NO_3, N_2O_5, OH, $O(^1D)$, HNO_2, HNO_3) решалась система кинетических уравнений с известными константами реакций [1]-[3]. Задача Коши для системы кинетических уравнений решалась с помощью разностной схемы, учитывающей структуру уравнений и обладающей вторым порядком погрешности аппроксимации [4]. Проведенные численные эксперименты продемонстрировали сильную зависимость эффективных скоростей распада NO_x от влажности воздуха и начальной (фоновой) концентрации озона. В дальнейшей работе найденные при соответствующих метеорологических условиях эффективные скорости распада окислов азота будут использованы в уравнениях диффузии-реакции-адвекции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-29-10080).

Литература

[1] Stockwell W.R. et.al, “A new mechanism for regional atmospheric chemistry modeling” // *Journal of Geophysical research* , **102**:D22 (1997), 25,847-25,879.

[2] DeMore W.B. et.al, “Chemical Kinetics and Photochemical Data for Use in Stratospheric Modeling” // NASA, California Institute of Technology – 1997.

[3] Кондратьев В.Н., “Константы скорости газофазовых реакций” // Издательство “Наука”, Москва – 1970.

[4] Белов А.А., Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В., “Моделирование химической кинетики в газах” // *Математическое моделирование* , **28**:8 (2016), 46-64.

Классическая разрешимость уравнения Розенау — Бюргерса и родственных ему уравнений на прямой и полупрямой

А. А. Панин[1], И. К. Каташева[2]

[1,2]*МГУ имени М. В. Ломонсова, физический факультет, кафедра математики*
E-mails: [1]*a-panin@yandex.ru,* [2]*katascheva.ik15@physics.msu.ru*

В работе [1] было предложено уравнение для описания волн на «мелкой» воде

$$u_{xxxxt} + u_t - u_{xx} - \mu(u^2)_x = 0, \tag{1}$$

которое отличается от уравнения Бюргерса $u_t - u_{xx} - (u^2)_x = 0$ наличием сильно диссипативного слагаемого u_{xxxxt}.

Насколько нам известно, исследование разрешимости этого уравнения производилось преимущественно в «интегральных» (лебеговских, соболевских и весовых) пространствах. Наша цель — исследование разрешимости этого уравнения в классическом смысле, а также установление достаточных условий разрушения его решения на прямой или полупрямой. (Отметим, что результаты о разрушении в трёхмерной и одномерной *ограниченных* областях получены в работах [2, 3].)

Исследование данного уравнения основано на методике полного обращения линейной части оператора уравнения (1). А именно, мы вводим оператор

$$M_{\xi,\tau} := \frac{\partial}{\partial\tau}\left(u_{\xi\xi\xi\xi} + \lambda u(\xi,\tau)\right) - \frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial\tau^2},$$

получаем для него 1-ю и 2-ю формулы Грина. Затем строим интегральное представление фундаментального решения оператора $M_{\xi,\tau}$ и получаем аналог 3-й формулы Грина. Далее рассматриваем три задачи: задача Коши, 1-я и 2-я начально-краевые задачи на полупрямой. С помощью

3-й формулы Грина они сводятся к интегральным уравнениям, которые исследуются методом сжимающих отображений.

Результаты о разрушении получаются с помощью метода нелинейной ёмкости [4]. Кроме того, с помощью абстрактной теоремы о непродолжаемом решении [5] получается результат о непродолжаемом решении рассматриваемого уравнения.

Литература

[1] Ph. Rosenau, "Dynamics of Dense Discrete Systems" // *Progress of Theoretical Physics*, **79**:5 (1988), 1028-1042.

[2] М. О. Корпусов, "О разрушении решений трехмерного уравнения Розенау–Бюргерса"// *ТМФ*, **170**:3 (2012), 342-349.

[3] А. А. Панин, "Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Розенау– Бюргерса с различными граничными условиями"// *ТМФ*, **177**:1 (2013), 93-110.

[4] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных"// *Тр. МИАН*, **234**. М.: Наука, 2001, 3-383.

[5] А. А. Панин, "О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра"// *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 884-903.

Математическое моделирование многослойных дифракционных структур

А. А. Петухов

МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
E-mail: petukhov@physics.msu.ru

В современной лазерной технике, системах коммуникации, космических исследованиях и многих других областях науки и техники широко применяются многослойные дифракционные структуры. Примерами таких структур являются, в частности, многослойные дифракционные решетки, различного рода вставки, помещенные в волновод, а также другие структуры подобного типа.

При моделировании многослойных дифракционных структур традиционно рассматривается два типа задач – прямые задачи анализа дифракционных структур и обратные задачи синтеза дифракционных структур с заданными характеристиками. Наибольший практический интерес представляет решение задач синтеза, однако для их эффективного решения, в первую очередь, требуется наличие эффективного и надежного метода решения соответствующей прямой задачи.

В докладе описываются разработанные автором гибридные методы математического моделирования широкого класса многослойных дифракционных структур, основанные на совместном применении неполного метода Галеркина и обобщенных матричных методов (метода матриц переноса, метода матриц рассеяния), а также обсуждается их программная реализация. Рассматриваются двумерные и трехмерные векторные и скалярные задачи дифракции плоской волны на многослойных дифракционных структурах, для решения которых применяются предлагаемые гибридные методы. Описывается решение ряда задач анализа и синтеза многослойных дифракционных структур для различных практических приложений.

Литература

[1] Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. "Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой" // *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия*, **66**:2 (2011), 20-23.

[2] Петухов А.А. "Совместное применение неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния для моделирования многослойных дифракционных решеток" // *Математическое моделирование*, **25**:6 (2013),41-53.

[3] Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Трубецков М.К. "Математическое моделирование многослойных дифракционных решеток" // *Физические основы приборостроения*, **3**:4 (2014), 20-27.

[4] Петухов А.А., Боголюбов А.Н., Трубецков М.К. "Гибридные методы моделирования волноводов, содержащих локальные неоднородные вставки с многослойным строением" // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*, **17**:3 (2016), 268-279.

Неполный метод Галеркина в вакуумной электронике СВЧ

В. Е. Родякин[1], В. М. Пикунов[2]

[1]*Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН — филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научно-исследовательский центр "Кристаллография и фотоника" РАН»*

E-mails: [1]vrodyakin@mail.ru, [2]vmpikunov@mail.ru

Эффективные алгоритмы неполного метода Галеркина, были разработаны в докторской диссертации А.Г.Свешникова «Методы исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах», защищенной в 1963 году. Им был предложен общий принцип формулировки проекционных соотношений неполного метода Галеркина, при котором имеет место сходимость метода.

Указанные методы успешно использовались в вакуумной электронике СВЧ при разработке и анализе электронных устройств на основе гофрированных и диафрагмированных замедляющих систем релятивистской сильноточной электроники [1], для исследования процессов электронно-волнового взаимодействия в электронных пучках мощных клистронных усилителей [2]. Эти алгоритмы интенсивно используются и в настоящее время при освоении терагерцового диапазона частот для создания вакуумных СВЧ устройств [3].

При численной реализации неполного метода Галеркина необходимо решать жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом направленной ортогонализации, разработанным и успешно реализованным в работах А.С. Ильинского и А.А. Быкова [4]. Применение неполного метода Галеркина, позволяющего свести решение исходной задачи к решению конечной системы уравнений, позволяет эффективно использовать вычислительные ресурсы и существенно расширить круг решаемых задач электроники СВЧ. В работе рассмотрено применение неполного метода Галеркина для численного анализа нелинейного взаимодействия плотных электронных потоков в мощных многолучевых клистронах. Приводятся сравнение с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН.

Литература

[1] В.М. Пикунов, А.Г. Свешников “Математическое моделирование задач сильноточной релятивистской плазменной СВЧ электроники” // В кн. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. М: 2008. Сер. Б. Т. VII-1. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Ч. 2. Гл. 3, с. 534-567.

[2] V. E. Rodyakin, A. N. Bogolyubov, V. M. Pikunov and M. I. Svetkin “Effects of Cavities RF Field Radial Non-Uniformity on Multiple-Beam Klystron Efficiency” PIERS 2017, St Petersburg, Russia, 22 - 25 May, 2017.

[3] А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, В.Е. Родякин, В.М. Пикунов “Математическая модель прямоугольной волноведущей системы с импедансными стенками” // *Ученые записки физического факультета Московского университета* 2016, №6, с. 1661106-1-1661106-3.

[4] А.А. Быков, А.С. Ильинский “Решение краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом направленной ортогонализа-

ции" *Журнал выч. мат. и мат. физ.* 1979 **19**:3, 631–639; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 19:3 (1979), 74–82

Wavelets as a tool for Physical Researches

Dmitry Sokoloff[1], Peter Frick[2], Rodion Stepanov[2]

[1] *Department of Physics, Moscow State University*
[2] *Institute of Continuous Media Mechanics, Perm.*
E-mails: [1] sokoloff.dd@gmail.com, [2] frick@icmm.ru, rodion@icmm.ru

Fourier analysis is a natural tool to find periodicities in periodic signals or in signals localized in time. If oscillation under discussion has an unstable frequency or signal duration substantially exceed the observation time scale as it happens, say, for sunspot data as an indicator of solar activity cycle, Fourier analysis have to be extended up to so-called wavelet analysis. Wavelet analysis can be considered as a local version of Fourier analysis. It is helpfull in particular, provided the researcher is interested mainly in various variations of the nominal frequency and amplitude of periodicity under discussion. Wavelets becomes a more or less standard tool in various physical problem from astrophysics up to medical physics. We present some problems which arise in application of wavelet technique in physical studies as well as some methods to elaborate them.

Объяснение явления пересыщения растворов в пористых средах на основе математического моделирования

Н. А. Тихонов

МГУ имени М.В. Ломоносова, физический ф-т.
E-mail: niktandr@yandex.ru

Математическое моделирование является эффективным методом теоретического исследования динамических процессов физической химии. При этом часто моделирование выступает не только для количественного описания явлений, механизм которых понятен, но как инструмент, позволяющий выявить физику новых эффектов. В представленном сообщении, в качестве примера, рассмотрен такой случай.

Имеет место явление изотермического пересыщения в пористой среде. Оно заключается в том, что внутри такой среды при ионном обмене образуется раствор концентрации существенно более высокой, чем максимальная растворимость вещества в обычных условиях, и, тем не менее, не происходить выпадения осадка внутри сорбента. Это явление имеет общий характер. В течение последних десятилетий оно наблюдается и используется в технологических процессах. В то же время, до настоящего времени оставался открытым вопрос, почему происходит стабилизация пересыщенного раствора.

В результате математического моделирования нам удалось оценить вклад различных факторов. На основе этого понять и показать, что рассматриваемое явление можно объяснить не изменением термодинамических условий в порах, а эффектом динамического равновесия между объединением частиц конденсированной фазы во внутренней части пор и их распадом вблизи поверхности зерен сорбента. Моделирование позволило провести количественную проверку предложенной гипотезы с использованием имеющихся опытных данных. Результат был новым, неожиданным и позволил по-новому интерпретировать явление.

Методы математического моделирования в задачах практической электродинамики

Ф. Б. Хлебников[1], А. А. Бузин[1], Е. Е. Евстафьев[1], Д. А. Коняев[1,2], Т. А. Кузьмич[1], И. Е. Могилевский[1], А. В. Никитенко[2], Н. Е. Шапкина[1,2], К. М. Шитикова[1]

[1] *119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, дом 1, строение 2, Физический Факультет*

[2] *125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13 Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН (ИТПЭ РАН)*

E-mail: [1]mnfkhl@gmail.com

Решение современных задач прикладной электродинамики, будь то задачи радиолокации или изучение свойств радиопоглащающих материалов, редко обходится без применения методов математического моделирования. В настоящее время сотрудники, студенты, аспиранты и выпускники кафедры математики совместно с сотрудниками института теоретической и прикладной электродинамики РАН участвуют в решении целого спектра актуальных практических задач, создают сложные математические модели электродинамических явлений, эффективность которых подтверждается экспериментальными данными.

Сегодня все актуальнее становится задача разработки высокоточных стендов для проведения радиофизических измерений специальных характеристик объектов. Такие стенды называют компактными полигонами, и несмотря на свою более чем полувековую историю, они совершенствуются до сих пор. Основными элементами компактного полигона являются безэховая камера, стены которой покрыты радиопоглощающим материалом, источник излучения, и коллиматор, преобразующий волну источника в квазиплоскую [1].

Исследования, ведущиеся на кафедре математики, затрагивают почти все основные элементы компактных полигонов. Синтезом и оптимизацией зеркальных коллиматоров со скруглёнными краями занимаются н.с. Д. А. Коняев, вед. программист Ф. Б. Хлебников и студентка С. С. Новикова. Использование таких коллиматоров может существенно повысить точность измерений, однако изготовление подобных коллиматоров — сложный и трудоёмкий процесс, и внедрению этой технологии должен предшествовать долгий этап тщательного моделирования.

Студентка кафедры математики Т. А. Кузьмич под руководством доцента Н. Е. Шапкиной занимается разработкой полноценной математической модели рупорной безэховой камеры. Построенная ей модель позволяет получить распределение электромагнитного поля во всей камере с учётом свойств реального поглощающего материала. Моделированию такого материала посвящена работа выпускника кафедры А. В. Никитенко, в настоящее время являющегося сотрудником ИТПЭ РАН, в которой рассмотрено, в том числе, и поведение РПМ при падении электромагнитной волны под острыми углами [2]. Наконец в курсовой работе студента Е. Е. Евстафьева под руководством Н. Е. Шапкиной начато исследование рассеяния поля в рабочей зоне на пилоне, поддерживающем объект в безэховой камере.

Двухпозиционная эффективная площадь рассеяния (ЭПР) — это величина, характеризующая интенсивность отражения электромагнитной волны объектом в произвольном направлении, не обязательно совпадающим с направлением на излучатель. Для её измерения можно использовать цилиндрический сканер, предназначенный для исследования поля в ближней зоне с последующим восстановлением поля в дальней зоне. Такие измерения требуют очень больших затрат времени, однако результаты исследований н.с. Д. А. Коняева и студентов К. М. Шитиковой и А. А. Бузина могут позволить проводить их значительно быстрее.

Теоретические работы доцента И.Е. Могилевского посвящены выделению сингулярной части электромагнитного поля в окрестности рёбер и конических точек. На основе полученного асимптотического представления удается сохранить скорость сходимости метода конечных элементов, соответствующую гладкому случаю, вводя в пространство пробных функций сингулярные функции, имеющие особенность заданного вида и точно аппроксимирующие сингулярную часть решения [3]. Данные исследования используются для расчёта электромагнитного поля в окрестности ребра пилона в безэховой камере. Активное участие в этой исследовательской работе принимает студент кафедры М. М. Шушарин.

Литература

[1] Балабуха Н. П., Зубов А. С., Солосин В. С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.

[2] Никитенко А.В, Зубов А.С., Шапкина Н.Е. Моделирование электромагнитного рассеяния на радиопоглощающем материале методом связанных волн. //Математическое моделирование // *Математическое моделирование.* Т. **26**, № 9, 2014, С. 18–32.

[3] Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е. Математическое исследование особенности электромагнитного поля волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // *Физические основы приборостроения.* — 2016. — Т. **5**, № 2. — С. 72–79.