Лекция 5

ПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Теоремы о представлении произвольного распределения

Теорема 1. *Пусть* $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ — *это произвольное распределение.* [1]) *Тогда найдется такой компакт* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$, *такой мультииндекс* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ *и такая непрерывная функция* $f(x) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что имеет место представление*

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}), \tag{1.1}$$

где $\alpha = (n+2, n+2, ..., n+2)$.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что компакт $\mathrm{K} \subset \mathrm{Q}$, где

$$\mathrm{Q} \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^N :\ 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k = \overline{1, N}\right\}.$$

Введем оператор.

$$\partial_x \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{x_1}\partial_{x_2}\cdots\partial_{x_N}.$$

Для любой функции $\psi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{Q}), \tau_{\mathrm{Q}})$ имеет место следующее представление:

$$\psi(x) = \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_{y_1}\partial_{y_2}\cdots\partial_{y_N}\psi(y) = \\ = \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_y\psi(y), \tag{1.2}$$

[1]) Мы используем термин *распределение* наряду с термином *обобщенная функция*.

из которого получим следующую оценку:

$$|\psi(x)| \leqslant \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_0^1 dy_2 \cdots \int\limits_0^1 dy_N |\partial_y \psi(y)| \leqslant \max_{x \in \mathrm{Q}} |\partial_x \psi(x)| . \quad \boxtimes \tag{1.3}$$

Шаг 2. Напомним, что на локально выпуклом пространстве $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ топология τ_{K} определяется счетной системой норм:

$$\|\psi\|_n \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \psi(x)| .$$

Из (1.2) заменой

$$\psi(x) \leftrightarrow \partial^\alpha \psi(x)$$

вытекает равенство

$$\partial^\alpha \psi(x) = \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_y \partial_y^\alpha \psi(y). \tag{1.4}$$

С одной стороны, можно точно также получить следующее равенство:

$$\partial_y \partial_y^\alpha \psi(y) = \int\limits_0^{y_1} dz_1 \int\limits_0^{y_2} dz_2 \cdots \int\limits_0^{y_N} dz_N \partial_z \partial_z \partial_z^\alpha \psi(z). \tag{1.5}$$

С другой стороны, в силу итогового неравенства (1.3)

$$\max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \psi(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^{\alpha_0} \psi(x)| , \quad |\alpha_0| = n.$$

Кроме того, в силу промежуточного неравенства в (1.3) справедливы следующие неравенства:

$$|\partial^{\alpha_0} \psi(x)| \leqslant \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_0^1 dy_2 \cdots \int\limits_0^1 dy_N |\partial_y \partial_y^{\alpha_0} \psi(y)|,$$

$$|\partial_y \partial_y^{\alpha_0} \psi(y)| \leqslant \int\limits_0^1 dz_1 \int\limits_0^1 dz_2 \cdots \int\limits_0^1 dz_N |\partial_z \partial_z \partial_z^{\alpha_0} \psi(z)|.$$

В итоге последовательного применения этих неравенств и того факта, что $\mathrm{meas}(Q) = 1$ мы получим следующую оценку:

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^{\alpha_0} \psi(x)| \leqslant \int\limits_Q |\partial_y^{n+1} \psi(y)|, \quad \partial_x^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{x_1}^{n+1} \partial_{x_2}^{n+1} \cdots \partial_{x_N}^{n+1}.$$

Итак, мы получили оценку

$$\|\psi\|_n \leqslant \int\limits_{\mathrm{Q}} \left|\partial_y^{n+1}\psi(y)\right| \, dy, \tag{1.6}$$

которое справедливо для всех $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{Q})$. С другой стороны, для любого распределения $f^* \in \mathcal{D}^{'}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$ и такое число $\mathrm{M} > 0$, что имеет место неравенство

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_n \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}) \,.$$

Поэтому отсюда и из (1.6) получим следующее неравенство:

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M} \int\limits_{\mathrm{K}} \left|\partial^{n+1}\varphi(x)\right| \, dx \tag{1.7}$$

для всех $\varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}) \subset (\mathcal{D}(\mathrm{Q}), \tau_{\mathrm{Q}})$.

Шаг 3. Теперь заметим, что оператор дифференцирования ∂^β, как мы уже отмечали, действует инъективно из $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ в $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$.

$\square$ Действительно, ядром оператора ∂^β являются полиномы по переменным $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$, которые, очевидно, принадлежат пространству $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ тогда и только тогда, когда это полиномы с нулевыми коэффициентами. Поэтому оператор

$$\partial^{n+1} : (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}) \to (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$$

является инъективным. $\boxtimes$

Шаг 4. Введем векторное пространство

$$\mathrm{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\partial^{n+1}\mathcal{D}(\mathrm{K})\right\},$$

которое действительно векторное, как инъективный образ векторного пространства. Определим теперь на X_n линейный функционал:

$$\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, \varphi\rangle\,, \quad \psi_n \stackrel{\text{def}}{=} \partial^{n+1}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{K}). \tag{1.8}$$

Причем из (1.7) вытекает, что для всех $\psi_n \in \mathrm{X}_n$ имеет место неравенство

$$|\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n| \leqslant \mathrm{M} \int\limits_{\mathrm{K}} \left|\partial^{n+1}\varphi(x)\right| \, dx = \mathrm{M} \int\limits_{\mathrm{K}} |\psi_n(x)| \, dx.$$

Шаг 5. Следовательно, по теореме Хана–Банаха линейный функционал f_1^* можно продолжить с X_n до линейного функционал над $L^1(\mathrm{K})$. Иначе говоря, найдется такая функция $g(x) \in L^\infty(\mathrm{K})$, что имеет место равенство

$$\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x)\psi_n(x) \, dx = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x)\partial^{n+1}\varphi(x) \, dx.$$

Отсюда и из (1.8) мы пришли к равенству

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x) \partial^{n+1} \varphi(x)\, dx \quad \text{для некоторой} \quad g(x) \in L^{\infty}(\mathrm{K}). \quad (1.9)$$

Теперь продолжим функцию $g(x)$ нулем вне компакта K и, таким образом, получим, что $g(x) \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Шаг 6. Введем функцию

$$f(x) = (-1)^N \int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_N} dy_N g(y)$$

и тогда, интегрируя по частям в (1.9), получим равенство

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathrm{R}^N} f(x) \partial^{n+2} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{R}^N} f(x) \partial^{n+2} \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}), \quad (1.10)$$

где по построению функция

$$f(x) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Шаг 7. Теперь осталось положить $\alpha = (n+2, n+2, ..., n+2)$ и получить из (1.10) равенство

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathrm{R}^N} f(x) \partial^{\alpha} \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 вытекает, что локально каждая обобщенная функция $f^* \in \mathcal{D}'$ представима как производная конечного порядка от некоторой непрерывной функции. В следующей теореме мы докажем, что это, на самом деле, глобальный результат.

Дадим определение носителя основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 1. *Носителем функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ называется следующее множество*: [1])

$$\operatorname{supp}\{\varphi\} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

[1]) Чертой сверху мы как всегда обозначили замыкание множества.

Теперь мы можем дать определение носителя обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Сначала определим открытое множество

$$Q_f \stackrel{\text{def}}{=} \max_{G \subset \mathbb{R}^N} \{x \in G : \langle f^*, \varphi \rangle = 0, \ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{D}(G)\},$$

где G — открытое множество. Теперь дадим определение.

Определение 2. *Носителем обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ называется множество*

$$\operatorname{supp}\{f^*\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^N \backslash Q_f.$$

Теорема 2. *Пусть $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ и носитель $\operatorname{supp}\{f^*\} \subset \mathrm{K}$, где K — это компакт в $\mathbb{R}^N$. Тогда существуют такие непрерывные функции $f_\beta(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, что*

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \sum_{|\beta| \leqslant n+2} \int_{\mathbb{R}^N} f_\beta(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$ компакт — носитель обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$. Пусть U — это открытое множество в $\mathbb{R}^N$ такое, что $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ и $\overline{\mathrm{U}}$ компакт. Применим формулу (1.1) к компакту $\overline{\mathrm{U}}$:

$$\langle f^*, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \psi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \psi(x) \in \mathcal{D}\left(\overline{\mathrm{U}}\right).$$

Пусть теперь $\varphi(x) \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, а от функции $\psi(x)$ мы потребуем, чтобы она была равна 1 в окрестности компакта K.

Шаг 2. Поскольку K — это носитель обобщенной функции f^*, то имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle f^*, \varphi \rangle = \langle f^*, \psi\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \left(\varphi(x)\psi(x)\right) dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \sum_{\beta_i \leqslant \alpha_i = n+2} c_{\alpha\beta} \partial^{\alpha-\beta} \psi(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx = \\ = \sum_{\beta_i \leqslant n+2} \int_{\mathbb{R}^N} f_\beta(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx, \end{aligned}$$

где

$$f_\beta(x) \stackrel{\text{def}}{=} c_{\alpha\beta} f(x) \partial^{\alpha-\beta} \psi(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Тем самым мы пришли к следующему глобальному результату: каждая обобщенная функция с компактным носителем представима в виде

$$f^*(x) = \sum_{\alpha_i \leqslant n+2} \partial^\alpha \overline{f}_\alpha(x), \quad \overline{f}_\alpha(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-1)^{|\alpha|} f_\alpha(x),$$

где $f_\alpha(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть носитель обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'$ состоит из одной точки — $\operatorname{supp}\{f^*\} = \{0\}$, тогда имеет место равенство*:

$$f^*(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \partial_x^\alpha \delta(x).$$

§ 2. Свертка обобщенных функций

Сначала введем операцию свертки основных функций. Действительно, пусть $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ тогда рассмотрим следующее выражение:

$$\varphi * \psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{2.1}$$

Прежде всего отметим, что интеграл в правой части равенства (2.1) определен для всех $x \in \mathbb{R}^N$, поскольку обе функции из $\mathcal{D}$.

Кроме того, можно ввести оператор сдвига с отражением $\mathcal{T}_z$:

$$\mathcal{T}_z u(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(z-x),$$

с помощью которого легко преобразовать выражение (2.1):

$$\varphi * \psi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{T}_y \varphi(x)\psi(y)\,dy.$$

Теперь попробуем определить свертку основной и обобщенной функций. Пусть сначала обобщенная функция $f^* \in \mathcal{D}'$ является регулярной с представителем $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Тогда ее свертку с произвольной основной функцией $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ можно представить в следующем виде:

$$f^* * \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y) f(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)\mathcal{T}_y\varphi(x)\,dy.$$

Но это выражение нам подсказывает, как определить свертку произвольной обобщенной функции с основной функцией. Дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3. *Сверткой обобщенной функции* $f^* \in \mathcal{D}'$ *с основной функцией* $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ *называется следующая конструкция*:

$$f^* * \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*(y), \mathcal{T}_y \varphi(x) \rangle .$$