Некоммутативное операторное исчисление

- О. Хевисайд (1893) впервые на эвристическом уровне использовал понятие о функции от операторов, чтобы свести решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами к решению алгебраического уравнения:

$$D=\frac{d}{dx}, \qquad P(y)=\sum_{j=0}^{m} a_j y^j, \qquad P(D)u=f \quad \Rightarrow \quad u=Q(D)f, \quad Q(y)=\sum_k \sum_{l=1}^{m_k} \frac{b_{kl}}{(y-\lambda_k)^l},$$

где λ_k – корни многочлена $P(y)$, а m_j – их кратности. При этом

$$\frac{1}{D-\lambda}=e^{\lambda x}\frac{1}{D}e^{-\lambda x}, \qquad \text{так что} \qquad \frac{1}{(D-\lambda)^l}f=e^{\lambda x}\int^x\int^{t_1}\dots\int^{t_{n-1}}e^{-\lambda t_n}f(t_n)dt_n\dots dt_2dt_1.$$

- В.П. Маслов (1973) построил строгую математическую теорию функций от нескольких некоммутирующих операторов. Чтобы подставить в функцию $f(y_1,\dots,y_n)$ вместо её числовых аргументов некоммутирующие операторы $A_1,\dots,A_n$ он использовал номера Фейнмана (1951) $j_1,\dots,j_n$, обозначающие порядок действия операторов:

$$\overset{1}{A}\overset{2}{B}=BA, \qquad \overset{2}{A}\overset{1}{B}=AB, \quad [A,B]\equiv AB-BA=\overset{2}{A}\overset{1}{B}-\overset{2}{A}\overset{3}{B}=\overset{2}{A}(\overset{1}{B}-\overset{3}{B}).$$

В общем случае функция от операторов обозначается через $f(\overset{j_1}{A_1},\dots\overset{j_n}{A_n})$

- Эта теория дает конструкцию параметрикса для широкого класса уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, позволяет математически строго описать фундаментальные физические явления типа эффекта Черенкова и клина Кельвина, и имеет много других приложений, из которых приведем лишь два примера.

Примеры:

1. Формула Кэмпбелла – Хаусдорфа – Дынкина:

$$\ln\left(e^B e^A\right)=\int_0^t \psi\left(e^{-\tau\,\mathrm{ad}\,A}e^{-\tau\,\mathrm{ad}\,B}\right)e^{-\tau\,\mathrm{ad}\,A}d\tau(A+B)=B+A+\frac{1}{2}[B,A]+\cdots, \qquad \psi(x)=\frac{\ln x}{x-1}.$$

Существование разложения по коммутаторам и первые члены: J.E. Campbell 1897 Все члены ряда: Е.Б. Дынкин 1949
Интегральная формула на основе теории Маслова: М.В. Мосолова 1978

Интересный факт: сама формула не содержит функций от некоммутирующих аргументов и фейнмановских номеров, но в доказательстве без них не обойтись.

Приложения: теория групп и алгебр Ли

2. Формула коммутации h-псевдодифференциального оператора с быстроосциллирующей экспонентой:

$$f(\overset{2}{x},-ih\overset{1}{\nabla})e^{i\frac{S(x)}{h}}=e^{i\frac{S(x)}{h}}\left[f(x,\nabla S)-ih\left(\left\langle\frac{\partial f}{\partial p}(x,\nabla S),\nabla\right\rangle+\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}\,\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(x,\nabla S)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right\}\right)+O\left(h^2\right)\right].$$

Приложения: теория глобальных квазиклассических (коротковолновых) асимптотик

Литература:

В.П. Маслов, *Операторные методы*, М.: Наука, 1973.

М.В. Карасев, В.П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, М.: Наука, 1991.

В.Е. Назайкинский, Б.Ю. Стернин, В.Е Шаталов, *Методы некоммутативного анализа*, М.: Техносфера, 2002.