ЛЕКЦИЯ 9А-10А
Пространства С. Л. Соболева

0. Неравенство Фридрихса

Лемма. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. Тогда существует такая константа C_Ω, что для всех $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ верно *неравенство Фридрихса*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1}$$

Доказательъство.

1. Докажем сначала это неравенство для бесконечно гладких функций u с носителем, вложенным в область Ω. Очевидно, продолжив любую из таких функций нулём всюду вне Ω, получим бесконечно гладкую функцию на всём $\mathbb{R}^N$. Пусть $a = \inf\{x_N \mid x \equiv (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega\}$, $b = \sup\{x_N \mid x \in \Omega\}$. Тогда, очевидно, для каждой из рассматриваемых функций и любой точки $x \equiv (x_1, \ldots, x_N)$ верно (с учётом неравенства Коши — Буняковского)

$$|u(x_1, \ldots, x_N)|^2 = \left| \int_a^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\, dt \right|^2 \leqslant \int_a^{x_N} 1^2\, dt \cdot \int_a^{x_N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, t) \right|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant d(\Omega) \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, t) \right|^2 dt \leqslant d(\Omega) \int_a^b |\nabla u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)|^2\, dt,$$

где $d(\Omega)$ — диаметр области Ω. Интегрируя по области Ω, имеем

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant d(\Omega) \int_a^b dx_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \ldots dx_{N-1} \left(\int_a^b |\nabla u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)|^2\, dt \right) =$$
$$= d(\Omega) \int_a^b dx_N \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \ldots dx_{N-1} \int_a^b |\nabla u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)|^2\, dt \right) \leqslant d^2(\Omega) \||\nabla u|\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Итак, для бесконечно гладких функций с носителем внутри Ω выполняется (1) с $C_\Omega = d(\Omega)$.

2. Рассмотрим общий случай произвольной функции $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. По самому определению пространства $W_0^{1,2}(\Omega)$ функции, рассмотренные в п. 1 доказательства, плотны в нём. Поэтому существует последовательность $\{u_k\}$ такая, что

$$\|u - u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \to 0. \tag{2}$$

Легко видеть, что и левая, и правая части неравенства Фридрихса мажорируются нормой в $W_0^{1,2}(\Omega)$, поэтому в силу (2) и неравенства треугольника имеем $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \to \|u\|_{L^2(\Omega)}$, $\||\nabla u_k|\|_{L^2(\Omega)} \to \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$. А поскольку (1) с общей константой C_Ω выполнено для всех u_k, то это неравенство выполнено и для u с той же константой.

Лемма доказана.

Следствие. Неравенство Фридрихса позволяет ввести на пространстве $W_0^{1,2}(\Omega)$ (где Ω — ограниченная область) эквивалентную норму

$$\|u\|'_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} \equiv \sqrt{\int_\Omega \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx},$$

что удобно в тех задачах математической физики, где старшая часть эллиптического дифференциального оператора представляет собой оператор Лапласа. (См. § 4 настоящей лекции и: Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.)

1. Ортогональные дополнения в соболевских пространствах

1. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству (здесь и далее используется обозначение $H^1 \equiv W^{1,2}$)

$$\left\{y \in H^1[a;b],\ \ \int_a^b y(x)\,dx = 0\right\}.$$

1) Заметим прежде всего, что L — замкнутое подпространство в $H^1[a;b]$. Действительно, если $\|y_n - y\|_{H^1[a;b]} \to 0$, то с помощью неравенства Коши—Буняковского получаем

$$\left|\int_a^b (y_n - y)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (y_n-y)^2\,dx} \cdot \sqrt{b-a} \leqslant \|y_n - y\|_{H^1[a;b]}\sqrt{b-a} \to 0.$$

2) Построим ортогональное дополнение в $H^1[a;b]$ к подпространству L. Для этого заметим, что оператор

$$Q : z(x) \mapsto z(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(x)\,dx$$

является ортопроектором на L. В самом деле, очевидно, что Q — проектор (т. е. $Q^2 = Q$) и что его образ совпадает с L. ($\operatorname{Im} Q \subset L$, как можно проверить; $\operatorname{Im} Q \supset L$, поскольку функции из L оператор Q оставляет без изменений.) Осталось доказать, что Q — самосопряжённый оператор. Имеем при произвольных $z(x), w(x) \in H^1[a;b]$:

$$\begin{aligned}
(z, Qw)_{H^1[a;b]} &= \int_a^b \left[z(x)\cdot(Qw)(x) + z'(x)\cdot(Qw)'(x)\right] dx = \\
&= \int_a^b \left[z(x)\left(w(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b w(t)\,dt\right) + z'(x)\left(w(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b w(t)\,dt\right)'\right] dx = \\
&= \int_a^b \left[z(x)w(x) + z'(x)w'(x)\right] dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b w(t)\,dt \int_a^b z(x)\,dx; \\
(Qz, w)_{H^1[a;b]} &= \int_a^b \left[(Qz)(x)\cdot w(x) + (Qz)'(x)\cdot w'(x)\right] dx = \\
&= \int_a^b \left[\left(z(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\,dt\right) w(x) + \left(z(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\,dt\right)' w'(x)\right] dx = \\
&= \int_a^b \left[z(x)w(x) + z'(x)w'(x)\right] dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\,dt \int_a^b w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Итак, $(z, Qw)_{H^1[a;b]} = (Qz, w)_{H^1[a;b]}$. Но если Q — ортопроектор на L, то

$$L^\perp = \mathrm{Im}\,(I - Q) = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b z(x)\, dx \mid z(x) \in H^1[a;b] \right\}.$$

Нетрудно видеть, что в $L^\perp$ содержатся все константы и только они. Итак, $L^\perp$ состоит в точности из всех элементов $H^1[a;b]$, имеющих представителя-константу.

2. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству

$$L = \left\{ y \in H^1[a;b],\;\; y(a) = y(b) = 0 \right\}.$$

Такое условие ставится корректно, поскольку, как следует из первой теоремы вложения (см. лекцию основного курса), каждая функция из $H^1[a;b]$ имеют непрерывный представитель.

1) Заметим, что L — замкнутое подпространство в $H^1[a;b]$. Это верно в силу непрерывности вышеупомянутого вложения, т. е. оценки $\|y(x)\|_{C[a;b]} \leqslant C\|y(x)\|_{H^1[a;b]}$ с некоторой константой C, общей для всех функций $y \in H^1[a;b]$. Действительно, из $\|y_n - y\|_{H^1[a;b]} \to 0$ следует $\|y_n - y\|_{C[a;b]} \to 0$, а поэтому если $y_n(a) = y_n(b) = 0$, то $y(a) = y(b) = 0$.

2) Для построения ортогонального дополнения $L^\perp$ подпространства L рассмотрим сначала достаточно гладкие функции (скажем, $z \in C^2[a;b]$). Выбирая y равными всевозможным гладким функциям из L, имеем

$$0 = \int_a^b (yz + y'z')\, dx = \int_a^b (yz - yz'')\, dx + yz'\big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (yz - yz'')\, dx, \tag{3}$$

где внеинтегральные члены при интегрировании по частям равны нулю в силу условия $y(a) = {}$ $= y(b) = 0$. В силу основной леммы вариационного исчисления из (3) имеем $z - z'' = 0$, или

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{4}$$

Итак, все C^2-гладкие функции из $L^\perp$ образуют линейную оболочку функций e^x, e^{-x}. Остаётся вопрос, нет ли в $L^\perp$ негладких функций, не входящих в (4). Можно опираться на задачу 8 и заметить, что подпространство L задано как ядро линейного оператора $A(y) = (y(a), y(b))^T$, $A : H_0^1(a;b) \to \mathbb{R}^2$. Тогда можно утверждать, что $\dim L^\perp = \dim \mathrm{Im}\, A = 2$, откуда следует, что никаких элементов, линейно независимых с e^x, e^{-x}, в пространстве $L^\perp$ нет.

Заметим, что мы только что описали отличие $H_0^1(\Omega)$ от $H^1(\Omega)$ в случае $\Omega = (a;b)$.

Замечание. Может показаться, что если гладкие функции плотны в $H_0^1(a;b)$, то они плотны в любом его подпространстве. На самом деле a priori этого утверждать нельзя: подпространство банахова пространства B может даже *вовсе не пересекаться* с множеством, всюду плотным в B. Простой пример: прямая $y = \sqrt{2}x$ не пересекается с всюду плотным на плоскости множеством $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0,0)\}$.

2. Пример неограниченной функции из $W^{1,2}(\Omega)$

Как было отмечено выше, из первой теоремы вложения следует, что при размерности пространства $N = 1$ для функций из $W_0^{1,2}(\Omega)$ гарантируется существование непрерывного представителя. В случае высших размерностей это уже не так, что нетрудно продемонстрировать на примере функции

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \varepsilon \in (0; 1/2), \tag{5}$$

которую нельзя сделать непрерывной никаким переопределением на множестве меры нуль. Для определённости будем рассматривать область Ω, представляющую собой единичную сферу с центром в начале координат, и докажем, что функция (5) принадлежит пространству $W^{1,2}(\Omega)$.

С помощью частного признака сравнения несобственных интегралов легко видеть, что эта функция принадлежит $L^2(\Omega)$, т. к. $\varepsilon < 1/2 < 3$. Осталось доказать, что её частные производные по переменным x, y, z

1) принадлежат $L^2(\Omega)$;

2) действительно являются её обобщёнными производными.

Первый факт доказывается просто. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \left| \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \right|^2 \leqslant \frac{r^2}{r^{4+2\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{r^{2+2\varepsilon}},$$

где мы воспользовались сферическими координатами. В силу $2 + 2\varepsilon < 3$ полученная оценка показывает, что производная u_x принадлежат $L^2(\Omega)$. Аналогичная оценка имеет место и для остальных производных. Второй факт рекомендуется доказать самостоятельно (см. задачу 4), используя технику «вырезания особенности», подобно тому, как это было сделано при рассмотрении фундаментального решения в лекции 5г.

3. Пространства Соболева с отрицательными индексами

Напомним, что пространства с отрицательными индексами определяются как сопряжённые к соответствующим «обычным» пространствам:

$$W^{-k,p'}(\Omega) = \left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Введя эти пространства, можно рассматривать дифференциальные операторы, определённые на всём исходном пространстве Соболева. Для примера рассмотрим пространство $H_0^1[a; b]$ с «усечённым» скалярным произведением

$$(u, v)_{H_0^1[a;b]} = \int_a^b u'(x)v'(x)\, dx \tag{6}$$

и пространство

$$H^{-1}[a; b] = \left(H_0^1[a; b]\right)'.$$

Это позволяет определить оператор второй производной

$$D^2 : H_0^1[a;b] \to H^{-1}[a;b]$$

следующим образом: пусть при каждом $u \in H_0^1[a;b]$ элемент $w \equiv D^2 u \in (H_0^1[a;b])'$ есть ограниченный линейный функционал, действующий по правилу

$$\langle w, v \rangle = -\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx, \tag{7}$$

где $\langle .,. \rangle$ — скобки двойственности между $H_0^1[a;b]$ и $H^{-1}[a;b]$. Легко видеть, что правая часть соотношения (7) действительно задаёт ограниченный линейный функционал на $H_0^1[a;b]$, поэтому такое определение корректно. Его мотивировка также понятна: если $u \in C^2[a;b]$, то из (7) с помощью интегрирования по частям с учётом граничных условий получаем:

$$\langle w, v \rangle = -\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx = \int_a^b u''(x)v(x)\,dx,$$

то есть для $u \in C^2[a;b]$ функционал w представляется в виде

$$\langle w, v \rangle = \int_a^b U(x)v(x)\,dx,$$

где $U(x) = u''(x)$, причём функция $U(x)$ не может быть равна никакой другой непрерывной функции (почему?).

Вычислим теперь норму w как элемента $H^{-1}[a;b]$. По определению нормы функционала с учётом выбранного в $H_0^1[a;b]$ скалярного произведения (6) имеем

$$\|w\| = \sup_{v \neq \theta} \frac{\left| \int_a^b u'v'\,dx \right|}{\|v\|_{H^1[a;b]}} \leqslant \sup_{v \neq \theta} \frac{\sqrt{\int_a^b (u')^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (v')^2\,dx}}{\sqrt{\int_a^b (v')^2\,dx}} = \|u\|_{H^1[a;b]},$$

причём, как показывает выбор $v = u$, равенство достигается. Итак,

$$\|D^2 u\|_{H^{-1}[a;b]} = \|u\|_{H^1[a;b]},$$

и на первый взгляд трудно вычисляемая норма в «странном» пространстве оказывается очевидной в том случае, где она естественным образом возникает. (Пример подобной трактовки производных см., напр.: Корпусов М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: Либроком, 2010. С. 173—190, особ. замечание 1 на с. 177.)

В данном случае мы привели пример элемента $w \in H^{-1}[a;b]$ как результата применения дифференциального оператора. Оказывается, все элементы пространств с отрицательными индексами носят подобный характер. Именно, верна

Теорема. (См.: Свешников А. Г., Корпусов М. О. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Т. 1. Геометрические и топологические свойства линейных пространств. М: Красанд, 2011. С. 324, теорема 34.) Всякий элемент $f^* \in W^{-k,p'}(\Omega)$ может быть представлен в виде

$$f^* = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \partial^\alpha g_\alpha(x), \quad \text{где} \quad g_\alpha(x) \in L^{p'}(\Omega).$$

Рекомендуется сравнить этот результат с теоремой о представлении обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4. Применение пространств Соболева в линейных задачах математической физики

Рассмотрим на примере простой ситуации, как можно провести исследование линейной задачи математической физики с использованием несколько другого подхода, чем изложен в предыдущем параграфе. Он не требует введения пространств отрицательного индекса, но существенно опирается на факты из теории гильбертовых пространств.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$\begin{cases} -\triangle u + \lambda u = f, \quad f \in L^2(\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

с числовым параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ в ограниченной области Ω. Известно, что существование классического решения этой задачи, вообще говоря, нельзя гарантировать без требования гёльдеровости правой части f и некоторых условий гладкости на границу области. (См., напр.: Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка.) Однако можно ослабить требования и искать обобщённое решение в смысле Соболева, т. е. элемент $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий задаче (8) в некотором обобщённом смысле. Чтобы обеспечить «обратную совместимость», т. е. гарантировать, что классическое решение (если оно существует) удовлетворяет обобщённой задаче, поступим при построении последней следующим образом. Умножим уравнение из (8) на $\overline{w}$, где w — произвольная функция из $C_0^2(\Omega)$, черта означает комплексное сопряжение. После интегрирования по частям получим:

$$(u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2},$$

где учтены граничные условия $w \in C_0^2(\Omega)$ и выбор «усечённого» скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$. (В данном параграфе мы используем комплексные пространства; при этом скалярные произведения выбираем линейными по первому аргументу и сопряжённо-линейными по второму.) Заметим теперь, что в силу плотности множества $C_0^2(\Omega)$ (и даже $C_0^\infty(\Omega)$) в пространстве $H_0^1(\Omega)$ можно заменить $w \in C_0^2(\Omega)$ на $w \in H_0^1(\Omega)$ (проведите эти рассуждения самостоятельно; аналогичное уже было сделано выше). В итоге получаем задачу

$$\begin{cases} \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (u, w)_{H^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2}, \\ \hfill u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{9}$$

где условие $u \in H_0^1(\Omega)$ задаёт не только функциональное пространство, в котором ищется решение, но и граничные условия. Как мы покажем, результаты относительно разрешимости задачи (9) непосредственно следуют из теории вполне непрерывных линейных операторов.

Для этого перепишем задачу (9) в операторном виде. Заметим, что при $f \in L^2(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega)$ выражения

$$(f, w)_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{и} \quad (u, w)_{L^2(\Omega)}$$

задают соответственно сопряжённо-линейный функционал и полуторалинейную форму в $H_0^1(\Omega)$ (проверьте это, пользуясь нашим определением скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$ и информацией из параграфа 0). Поэтому в силу теорем Рисса—Фреше (о представлении лениейного функционала в гильбертовом пространстве) и Лакса—Мильграма (о представлении полуторалинейной формы) для случая комплексного гильбертова пространства можно утверждать, что существуют такие функция $F \in H_0^1(\Omega)$ и линейный ограниченный оператор $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, что

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega) \quad (v, w)_{L^2(\Omega)} = (Av, w)_{H_0^1(\Omega)}, \;\; (f, w)_{L^2(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}. \tag{10}$$

Тогда (9) можно переписать в виде

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(Au, w)_{H_0^1(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

В силу произвольности $w \in H_0^1(\Omega)$ и свойств скалярного произведения последнее равенство эквивалентно задаче

$$(E + \lambda A)u = F, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{11}$$

Из (11) сразу видно, что при $\lambda = 0$ (уравнение Пуассона) решение существует и единственно, $u = F$. (Конечно, не стоит удивляться «лёгкости» получения этого результата: во-первых, мы использовали мощные результаты теории гильбертовых и соболевских пространств, а во-вторых, мы рассматриваем обобщённые, «ослабленные» решения.) Рассмотрим случай $\lambda \neq 0$.

Докажем, что оператор A является вполне непрерывным. Для этого (см. задачу 9) докажем, что он переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Итак, пусть $v_n \rightharpoonup v$ в $H_0^1(\Omega)$. Тогда, во-первых, $v_n \to v$ в $L^2(\Omega)$ в силу теорем о компактных вложениях, а во-вторых, $Av_n \rightharpoonup Av$ в $H_0^1(\Omega)$, поскольку (см. задачи к лекции 6а—7а) непрерывный оператор непрерывен и в смысле слабой сходимости. Снова используя теорему о компактном вложении, получаем $Av_n \to Av$ в $L^2(\Omega)$. Далее, с учётом определения оператора A (см. (10)) имеем

$$\begin{aligned}(Av_n - Av, Av_n - Av)_{H_0^1(\Omega)} &= (v_n - v, Av_n - Av)_{L^2(\Omega)} = \\ &= (v_n, Av_n)_{L^2(\Omega)} - (v_n, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av_n)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} \to \\ &\to (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} = 0,\end{aligned}$$

где мы использовали непрерывность скалярного произведения по отдельным аргументам и по их совокупности. Итак, $Av_n \to Av$ в $H_0^1(\Omega)$, что и требовалось.

Установим также, что оператор A самосопряжён. Имеем

$$(Av,w)_{H_0^1(\Omega)} = (v,w)_{L^2(\Omega)} = \overline{(w,v)_{L^2(\Omega)}} = \overline{(Aw,v)_{H_0^1(\Omega)}} = (v,Aw)_{H_0^1(\Omega)}.$$

Теперь дальнейшие результаты следуют из теории вполне непрерывных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. (См., напр.: Волков В. Т., Ягола А. Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций.) Мы получаем:

1) существует не более чем счётное число значений $\lambda = \lambda_k$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$, для которых задача (11) имеет нетривиальное решение при $f \equiv 0$;

2) все такие значения (которыми мы будем называть *собственными значениями задачи Дирихле для оператора Лапласа в области* Ω) действительны;

3) при $\lambda \neq \lambda_k$ задача (11) имеет единственное решение.

Можно рассмотреть и случай более общего эллиптического оператора. Если он будет содержать и производные первого порядка, то оператор, роль которого в нашем рассуждении играет A, окажется, вообще говоря, несамосопряжённым (см., например, упомянутую выше книгу Ладыженской О. А.) и придётся использовать более общую теорию вполне непрерывных (компактных) операторов (см., напр.: Арсеньев А. А. Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. М.—Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2011).

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы по тексту.

1*. Улучшить константу в неравенстве Фридрихса, используя (с обоснованием!) экстремальное свойство первой собственной функции задачи Дирихле для оператора Лапласа. Показать на примере, что новая оценка действительно лучше (а по её смыслу, очевидно, является неулучшаемой).

2*. Доказать неравенство Фридрихса для неограниченных областей Ω, «вложенных в слой», т. е. таких, что для некоторой координаты x_k существуют такие d_1 и d_2, что $d_1 \leqslant \inf_{x\in\Omega} x_k \leqslant d_2$.

3. Для пространства $H_0^1(-1;1)$ с «усечённым» скалярным произведением указать «представление дельта-функции», т. е. найти такую функцию $y(x) \in H_0^1(-1;1)$, что

$$\forall z(x) \in H_0^1(-1;1) \;\; (y,z)_{H_0^1} = z(0), \quad (y,z)_{H_0^1} = \int_{-1}^{1} y'(x) z'(x)\,dx.$$

4. Завершить рассмотрение примера с $u(x,y,z) = 1/\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\varepsilon/2}$, доказав, что частные производные этой функции, существующие почти всюду в единичном шаре, являются обобщёнными производными этой функции в смысле Соболева. (*Указание*: необходимую для этого формулу «интегрирования по частям» можно получить из формулы Остроградского — Гаусса, применяя последнюю к вектор-функции $\{u(x)\varphi(x); 0; 0\}$.)

5. Доказать, что функция-«ступенька»

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1), \\ 1, & x \in [1;2] \end{cases}$$

имеет классическую производную всюду, кроме одной точки, но не имеет обобщённой производной в смысле С. Л. Соболева. (Ср. с результатом предыдущей задачи!)

6. Перенести рассуждения § 4 на случай более общего эллиптического оператора

$$Du = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

сформулировав некоторые условия на коэффициенты a_{ij}, b_i, c.

7*. Доказать, что семейство собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа всегда счётно (тогда как общая теория вполне непрерывных самосопряжённых операторов гарантирует лишь не более чем счётное количество характеристических чисел).

8*. Назовём *факторпространством* B/L банахова пространства B по его (замкнутому) подпространству L линейное пространство классов эквивалентности элементов пространства B, где x y тогда и только тогда, когда $x - y \in L$. Размерность пространства B/L называется *коразмерностью* подпространства L и обозначается $\operatorname{codim} L$.

1) Завершить определение, доказав, что введённое отношение действительно является отношением эквивалентности, и введя на B/L линейные операции. Доказать, что полученное пространство действительно является линейным.

2) Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный оператор, определённый на всём пространстве B_1. Доказать, что

$$\operatorname{codim} \ker A \equiv \dim(B_1 / \ker A) = \dim \operatorname{Im} A.$$

(Размерности могут быть и бесконечными!)

3) Доказать, что в гильбертовом пространстве $\operatorname{codim} L = \dim L^{\perp}$.

9. Доказать, что для линейного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве, достаточным условием полной непрерывности является следующее: для любой последовательности $\{x_n\}$ слабая сходимость $x_n \rightharpoonup x$ влечёт сильную сходимость $Ax_n \to Ax$. *Указание.* Учесть, что в рефлексивном банаховом пространстве из любой ограниченной последовательности можно извлечь слабо сходящуюся.