Семинар 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

§ 1. Кривые второго порядка

Задача 1. Докажите, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему есть величина постоянная, и найдите её.

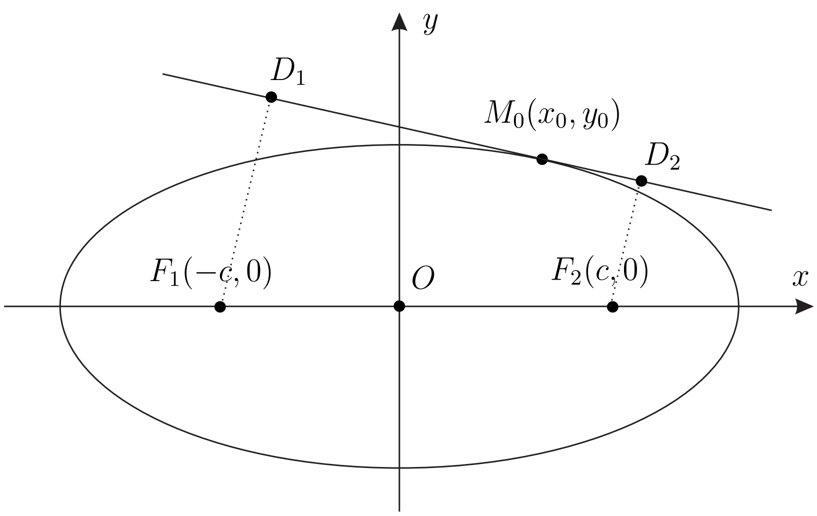

Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет следующий вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Расстояние от точки $F_1(-c,0)$ до касательной к точке $M_0(x_0,y_0)$ равно

$$d_1 = |F_1D_1| = \frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Расстояние от точки $F_2(c,0)$ до касательной к точке $M_0(x_0,y_0)$ равно

$$d_2 = |F_2D_2| = \frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Их произведение равно

$$d_1d_2 = \frac{1-\dfrac{c^2x_0^2}{a^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}} = \left\{\frac{y_0^2}{b^2} = 1-\frac{x_0^2}{a^2}\right\} =$$

$$= \frac{1-\dfrac{c^2}{a^4}x_0^2}{\dfrac{x_0^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{1}{b^2}} = \left\{c^2 = a^2-b^2\right\} = b^2\frac{1-\dfrac{c^2}{a^4}x_0^2}{1-\dfrac{c^2}{a^4}x_0^2} = b^2.$$

З а д а ч а 2. Докажите, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведённых в концах большой оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.

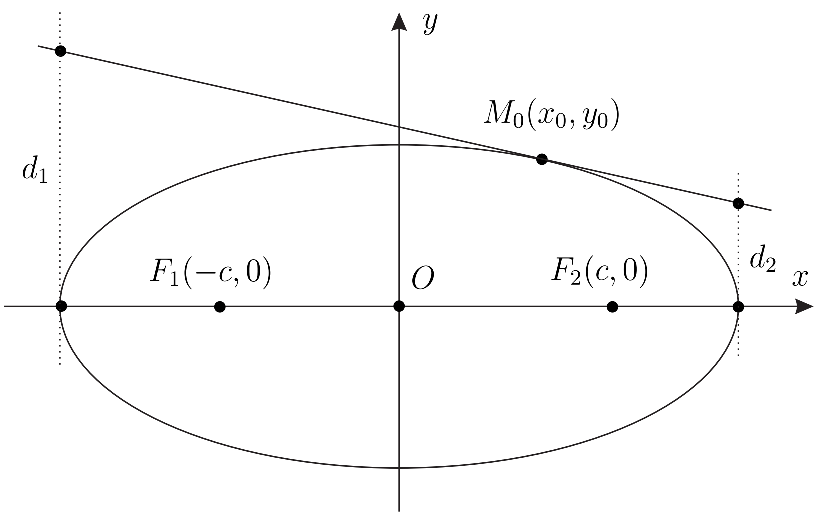

Рис. 2. К задаче 2.

Решение. Уравнения касательных в концевых точках большой оси эллипса имеют следующий вид:

$$x = -a \quad \text{и} \quad x = a.$$

Найдем координаты пересечения этих прямых с касательной

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

к точке $M_0(x_0, y_0)$. Действительно, точка $M_1(x_1, y_1)$ пересечения первой прямой с касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$

$$x_1 = -a, \quad y_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right);$$

точка $M_2(x_2, y_2)$ пересечения второй прямой с касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$

$$x_2 = a, \quad y_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

Очевидно, что соответствующие расстояния равны

$$d_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right), \quad d_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

Итак,

$$d_1 d_2 = \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_0^2}\frac{y_0^2}{b^2} = b^2.$$

Задача 3. Получите параметрические уравнения гиперболы.

Решение. Рассмотрим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Введём параметр

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right).$$

Для $x > 0$ имеем $t > 0$, а для $x < 0$ имеем $t < 0$. Поэтому при $x > 0$ положим $t = e^{-u}$ и получим уравнения

$$x = a\cosh u, \quad y = b\sinh u.$$

При $x < 0$ положим $t = -e^{-u}$ и получим равенство

$$x = -a\cosh u, \quad y = -b\sinh u.$$

Задача 4. Составьте уравнение гиперболы в системе координат, осями которой являются асимптоты гиперболы.

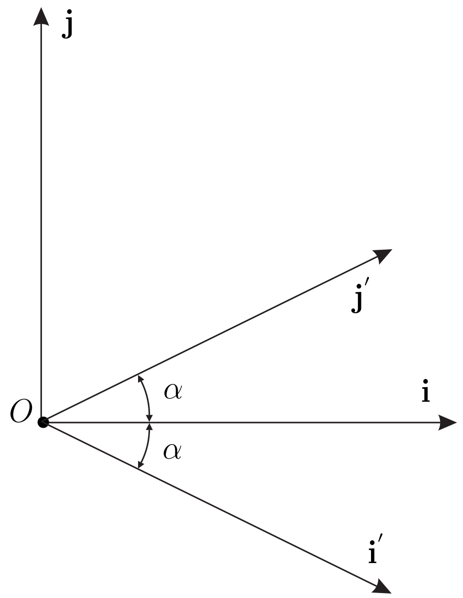

Рис. 3. К задаче 4.

Решение. Сначала рассмотрим исходный правый ортонормированный репер $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и новый правый нормированный репер $\{O, \mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'}\}$ направленный по асимптотам гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнения асимптот

$$y = \pm x \tan\alpha, \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

Общая линейная связь базисов $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ и $(\mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'})$ следующая:

$$(\mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j})R, \quad R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}$$

или в развёрнутом виде

$$\mathbf{i}^{'} = r_1^1\mathbf{i} + r_1^2\mathbf{j}, \quad \mathbf{j}^{'} = r_2^1\mathbf{i} + r_2^2\mathbf{j}.$$

Используя свойства скалярного произведения получим следующие равенства:

$$r_1^1 = (\mathbf{i}^{'}, \mathbf{i}) = \cos\alpha, \quad r_1^2 = (\mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$r_2^1 = (\mathbf{j}^{'}, \mathbf{i}) = \cos\alpha, \quad r_2^2 = (\mathbf{j}^{'}, \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Итак, имеем

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Итак, в новых координатах

$$X^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}, \quad X = RX^{'}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

исходное уравнение гиперболы

$$X^T AX = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}$$

примет следующий вид:

$$X^{'T} A^{'} X^{'} = 1, \quad A^{'} = R^T AR.$$

Вычислим матрицу $A^{'}$. Действительно,

$$A^{'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} - \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} & \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} \\ \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} & \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} - \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X^{'T} A^{'} X^{'} = \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \right) \left[(x^{'})^2 + (y^{'})^2 \right] + 2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \right) x^{'} y^{'}.$$

Заметим, что

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = 0, \quad \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{2}{a^2 + b^2}.$$

Итак, уравнение в новой системе координат пример следующий вид:

$$x^{'} y^{'} = \frac{1}{4} \left(a^2 + b^2 \right).$$

Задача 5. Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом (т.е. их касательные в точке пересечения перпендикулярны).

Решение. В силу оптических свойств эллипса и гиперболы касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы (смотри рисунок)

$$2(\alpha + \beta) = \pi,$$

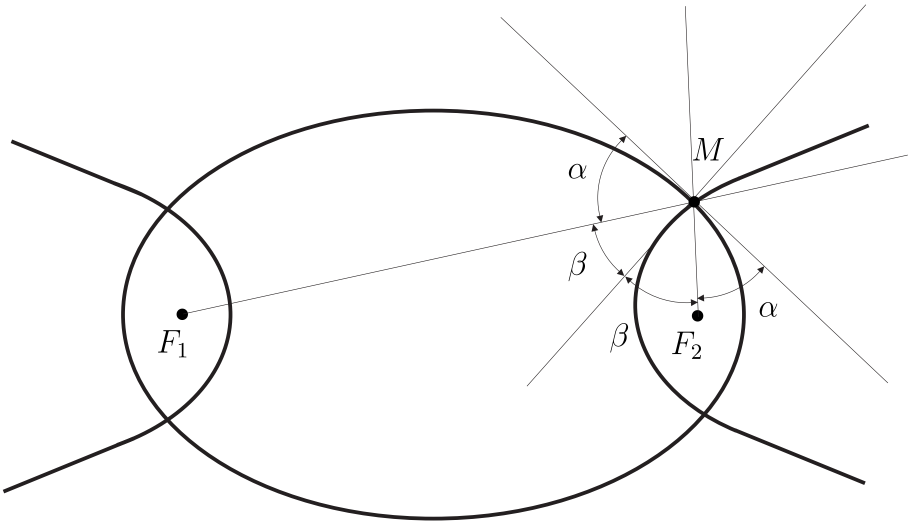

Рис. 4. К задаче 5.

а угол между касательными равен

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

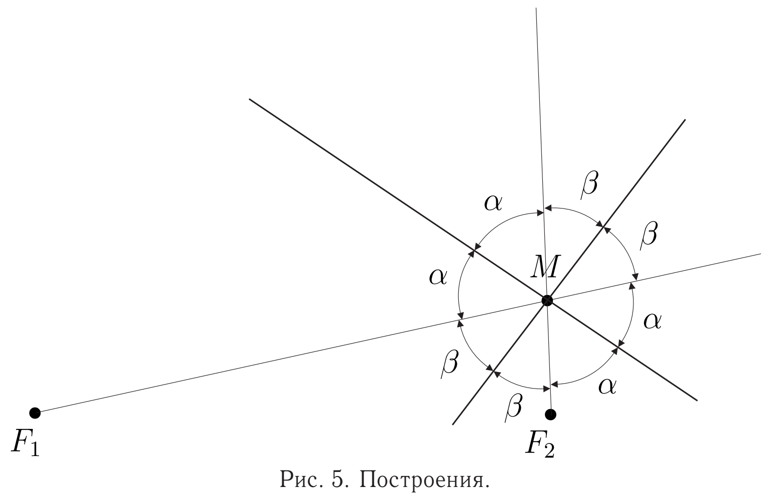

Рис. 5. Построения.

З а д а ч а 6. Докажите, что отрезок любой касательной к эллипсу, заключённый между касательными, проведёнными в концах большой оси, виден из любого фокуса под прямым углом.

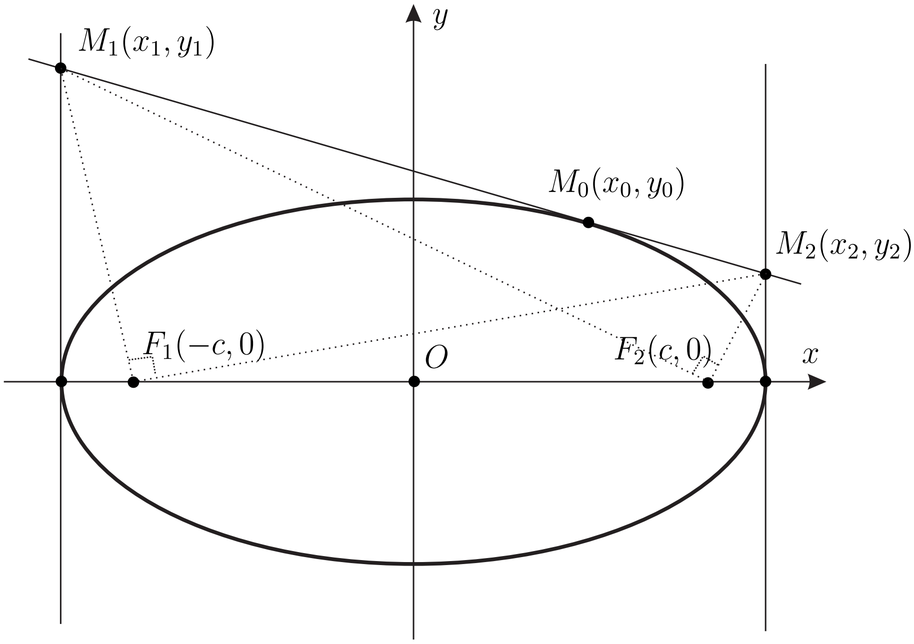

Рис. 6. К задаче 6.

Решение. Уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет следующий вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнения касательных к точкам с координатами $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ имеют вид $x = \mp a$. Найдём точки пересечения этих касательных с касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$. Итак, это точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ с координатами

$$x_1 = -a, \quad y_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right),$$

$$x_2 = a, \quad y_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

Уравнения прямых l_1 и l_2, проходящих через фокус $F_1(-c, 0)$ и точку $M_1(x_1, y_1)$ и через фокус $F_1(-c, 0)$ и точку $M_2(x_2, y_2)$, имеют следующий вид

$$\frac{x+a}{-c+a} = \frac{y-y_1}{-y_1}, \quad \frac{x-a}{-c-a} = \frac{y-y_2}{-y_2}.$$

Докажем, что направляющие векторы этих прямых ортогональны. Действительно,

$$(-c-a)(-c+a)+y_1y_2=-a^2+c^2+\frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)=\{c^2=a^2-b^2\}=$$
$$=-b^2+\frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)=-\frac{b^4}{y_0^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}-1+\frac{x_0^2}{a^2}\right)=0.$$

Задача 7. Докажите, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот есть величина постоянная, и найдите эту величину.

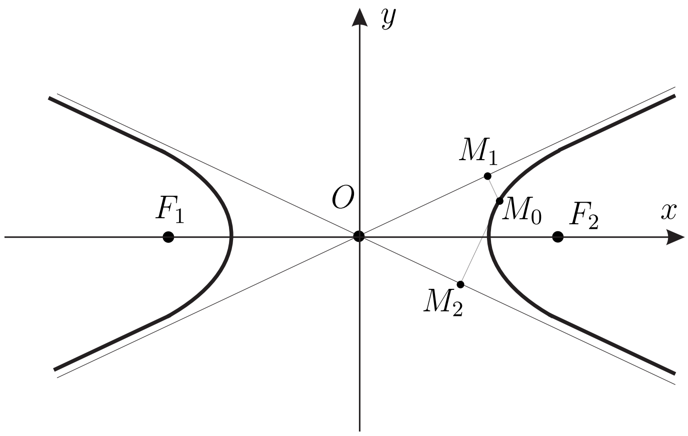

Рис. 7. К задаче 7.

Решение. Асимптоты для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеют следующий вид

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ гиперболы до асимптоты $y=\dfrac{b}{a}x$ равно

$$d_1=\frac{\left|y_0-\dfrac{b}{a}x_0\right|}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы до асимптоты $y = -\dfrac{b}{a}x$ равно

$$d_2 = \frac{\left|y_0 + \dfrac{b}{a}x_0\right|}{\sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}}.$$

Таким образом, имеем

$$d_1 d_2 = \frac{\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2 - y_0^2}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Задача 8. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между её асимптотами, делится точкой касания пополам.

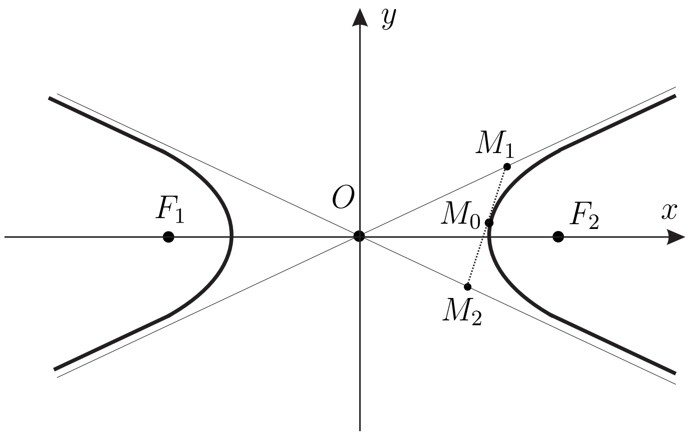

Рис. 8. К задаче 8.

Решение. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — это точки пересечения касательной

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

к точке $M_0(x_0, y_0)$ с асимптотами

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Требуется доказать, что

$$\overrightarrow{OM_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right) \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Найдём координаты точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Действительно,

$$y_1 = \frac{b}{a}x_1 \quad \text{и} \quad \frac{x_1x_0}{a^2} - \frac{y_1y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{ba^2}{x_0b - y_0a}, \quad y_1 = \frac{b^2a}{x_0b - y_0a};$$

$$y_2 = -\frac{b}{a}x_2 \quad \text{и} \quad \frac{x_2x_0}{a^2} - \frac{y_2y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{ba^2}{x_0b + y_0a}, \quad y_2 = -\frac{b^2a}{x_0b + y_0a}.$$

Таким образом, имеем

$$y_1 + y_2 = \frac{b^2a}{x_0b - y_0a} - \frac{b^2a}{x_0b + y_0a} = \\ = \frac{b^2a}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2}(x_0b + y_0a - x_0b + y_0a) = 2y_0\frac{b^2a^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2} = 2y_0;$$

$$x_1 + x_2 = \frac{ba^2}{x_0b - y_0a} + \frac{ba^2}{x_0b + y_0a} = \\ = \frac{ba^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2}(x_0b + y_0a + x_0b - y_0a) = 2x_0\frac{b^2a^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2} = 2x_0.$$

З а д а ч а 9. Докажите, что две параболы с общим фокусом и противоположно направленными осями пересекаются под прямым углом (т.е. касательные в точке пересечения взаимно перпендикулярны).

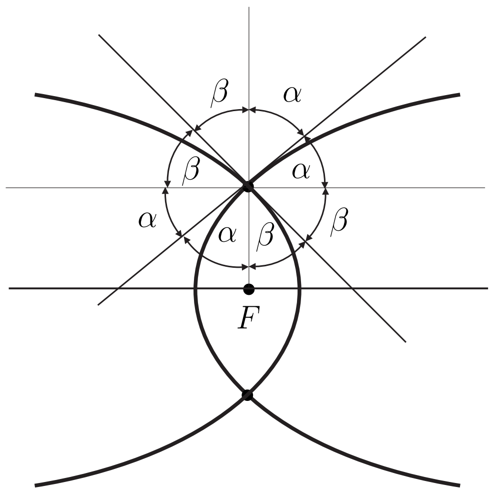

Рис. 9. К задаче 9.

Решение. В силу оптического свойства параболы оба смежных угла между касательными равны $\alpha + \beta$. Таким образом, имеем

$$2(\alpha + \beta) = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, угол между касательными равен $\pi/2$.

Задача 10. Докажите, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

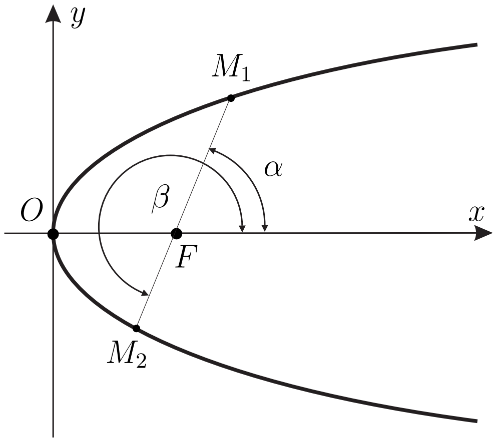

Рис. 10. К задаче 10.

Решение. Перейдем к полярной системе координат с полюсом в фокусе параболы F и с полярной осью, совпадающей с осью параболы. Тогда в этой системе координат уравнение параболы примет следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Проведём произвольную хорду через фокус параболы. Тогда в полярной системе координат точки пересечения хорды с параболой имеют следующие координаты: $M_1(r_1, \alpha)$ и $M_2(r_2, \beta)$, причём

$$\beta = \alpha + \pi, \quad r_1 = \frac{p}{1 - \cos\alpha}, \quad r_2 = \frac{p}{1 - \cos\beta}.$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1 - \cos\alpha}{p} + \frac{1 + \cos\alpha}{p} = \frac{2}{p},$$

где $r_1 = |FM_1|$, $r_2 = |FM_2|$.

§ 2. Векторы

Задача 11. Пусть $A_1(\mathbf{r}_1)$, $A_2(\mathbf{r}_2)$, $A_3(\mathbf{r}_3)$ — точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что точка $B(\mathbf{r})$ лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 + \alpha_3\mathbf{r}_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0; 1]$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

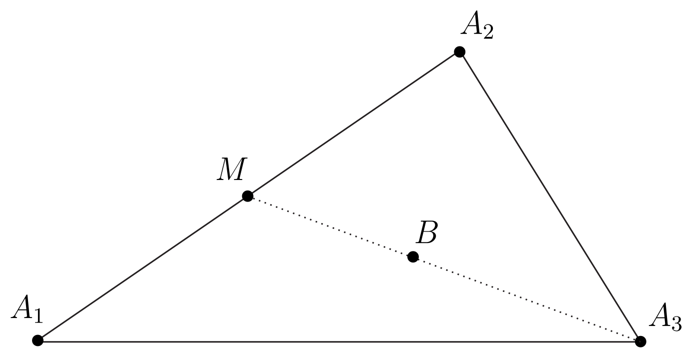

Рис. 11. К задаче 11.

Решение. Пусть точка B лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$. Через вершину A_3 и точку B проведём прямую. Пусть M — это точка пересечения этой прямой и отрезка A_1A_2. Для того чтобы точка B лежала внутри треугольника $A_1A_2A_3$ необходимо и достаточно, чтобы точка B была внутренней точкой отрезка A_3M, а точка M — внутренней точкой отрезка A_1A_2. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{r}_M = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1],$$
$$\mathbf{r}_B = \alpha_3\mathbf{r}_M + \alpha_4\mathbf{r}_3, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad \alpha_3, \alpha_4 \in [0, 1].$$

Итак, имеем

$$\mathbf{r}_B = \beta_1\mathbf{r}_1 + \beta_2\mathbf{r}_2 + \beta_3\mathbf{r}_3,$$

где

$$\beta_1 = \alpha_3\alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_3\alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_4.$$

Очевидно, что $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in [0, 1]$ и $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$.

Задача 12. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Решение. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AD}$. Введём репер $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. В этом репере

$$A(0,0,0), \quad B(1,0,0), \quad C(0,1,0), \quad D(0,0,1), \quad P(1/2,0,0), \quad M(0,0,1/2).$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right), \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).$$

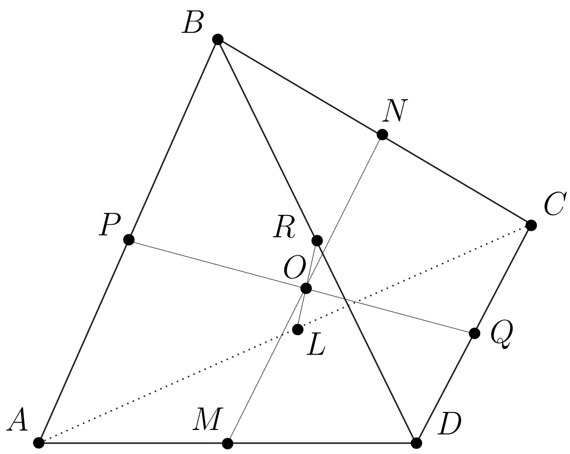

Рис. 12. К задаче 12.

Поэтому

$$N(1/2, 1/2, 0), \quad Q(0, 1/2, 1/2).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = (0, 1/2, 0), \quad \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = (-1/2, 0, 1/2),$$
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = (-1/2, 1/2, 1/2).$$

Докажем, что векторы $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PQ}$ лежат в одной плоскости, т. е. компланарны. С этой целью докажем, что их смешанное произведение равно нулю. Действительно,

$$\left(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}\right) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PQ}$ компланарны. Поэтому отрезки PQ и MN пересекаются. Докажем, что точка O пересечения этих отрезков делит их пополам.

Итак, пусть

$$\overrightarrow{PO} = \lambda \overrightarrow{PQ}, \quad \overrightarrow{MO} = \mu \overrightarrow{MN}.$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a});$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{c}).$$

Из цикла $APOMA$ имеем равенство

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \vartheta,$$

где

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

Итак, имеем

$$\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}) - \frac{\mu}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{c}) - \frac{1}{2}\mathbf{c} = \vartheta;$$
$$(1 - \lambda - \mu)\mathbf{a} + (\lambda - \mu)\mathbf{b} + (\lambda + \mu - 1)\mathbf{c} = \vartheta.$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно независимы, то $\lambda = \mu = 1/2$.

Аналогичным образом можно рассмотреть отрезки MN и RL и доказать, что они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, все три отрезка MN, PQ и RL пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Задача 13. Разложите вектор $\mathbf{a}$ на две составляющие, одна из которых лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$, а другая перпендикулярна этой плоскости.

Решение. Имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{n}, \quad \mathbf{a}_2 \perp \mathbf{n}.$$

Поэтому имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \Rightarrow \lambda = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}.$$

Итак,

$$\mathbf{a}_1 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}.$$

Задача 14. Решите векторное уравнение $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ (здесь $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}$ — заданные векторы) и укажите необходимое и достаточное условие существования решения.

Решение. Докажем, что необходимым и достаточным условием разрешимости этого уравнения является условие $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Действительно, пусть существует решение $\mathbf{x}_0$ этого уравнения, тогда, очевидно, что

$$0 = (\mathbf{a}, [\mathbf{x}_0, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Необходимость доказана. Докажем достаточность. Пусть выполнено это условие, тогда

$$\mathbf{x}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

решение уравнения $[\mathbf{x_0}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$. Действительно, имеем

$$[\mathbf{x_0}, \mathbf{a}] = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{a}] = -\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}(\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{a})) = \mathbf{b}.$$

Задача 15. Рассматривается система уравнений

$$[\mathbf{a_1}, \mathbf{x}] = \mathbf{b_1}, \quad [\mathbf{a_2}, \mathbf{x}] = \mathbf{b_2},$$

где $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ не коллинеарны. Покажите, что условия

$$(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{a_1}, \mathbf{b_2}) + (\mathbf{a_2}, \mathbf{b_1}) = \mathbf{0}$$

необходимы для разрешимости этой системы. Найдите общее решение этой системы при выполнении этих условий и дополнительного условия $(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_2}) \neq \mathbf{0}$.

Решение. В силу решения задачи 14 имеем необходимое условие разрешимости каждого из уравнений следующие:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = 0, \quad (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0.$$

При выполнении этих условий решение каждого из уравнений можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_1 \tau,$$

где

$$\mathbf{x}_1 = \frac{[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]}{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)}.$$

Если решение системы уравнений существует, то при некоторых t_0 и τ_0 имеем

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_1 t_0 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_2 \tau_0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2 \tau_0 - \mathbf{a}_1 t_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = (\mathbf{x}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]);$$
$$(\mathbf{x}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = \frac{([\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1], [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)} = \frac{(\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]])}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1);$$
$$(\mathbf{x}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = -(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2).$$

Итак, пришли к условию

$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) = 0.$$

Пусть $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) \neq 0$, тогда

$$(\mathbf{b}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) t_0$$

и решение системы уравнений имеет следующий вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{x}_1)}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)} \mathbf{a}_1.$$

Задача 16. Докажите тождество $\Big([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]\Big) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^{\mathbf{2}}$.

Решение. Пусть $\mathbf{x} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Справедливо равенство

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Таким образом,

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{x}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2.$$

З а д а ч а 17. Докажите тождество

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. П е р в ы й с п о с о б. Пусть $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ — это некоторый правый ортонормированный базис в пространстве. Тогда имеем

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}.$$

Поскольку $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) = 1$, то

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

где

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{j}.$$

Справедливо равенство

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})[\mathbf{x},\mathbf{y}] = [\mathbf{x},\mathbf{y}](\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\ = \left| \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{x},\mathbf{a}) & (\mathbf{x},\mathbf{b}) & (\mathbf{x},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{y},\mathbf{a}) & (\mathbf{y},\mathbf{b}) & (\mathbf{y},\mathbf{c}) \end{vmatrix},$$

поскольку

$$(\mathbf{x},\mathbf{a}) = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3, \quad (\mathbf{x},\mathbf{b}) = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3,$$
$$(\mathbf{x},\mathbf{c}) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3,$$
$$(\mathbf{y},\mathbf{a}) = y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3, \quad (\mathbf{y},\mathbf{b}) = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3,$$
$$(\mathbf{y},\mathbf{c}) = y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3.$$

Р е ш е н и е. В т о р о й с п о с о б. Если $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$, то нетрудно доказать, что и правая и левая части равенства одновременно равны нулю. Пусть теперь $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq 0$. Тогда $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ — это базис в пространстве. Введём взаимный базис в пространстве

$$\mathbf{f}_1 = \frac{[\mathbf{b},\mathbf{c}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{[\mathbf{c},\mathbf{a}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}.$$

Пусть

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + y_3\mathbf{f}_3.$$

При этом справедливы следующие свойства:

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{f}_1, \mathbf{a}) = 1, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{c}) = 0, \\
(\mathbf{f}_2, \mathbf{a}) = 0, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{b}) = 1, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{c}) = 0, \\
(\mathbf{f}_3, \mathbf{a}) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{c}) = 1; \\
[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\mathbf{c}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.
\end{gathered}
$$

Если воспользоваться этими последними равенствами, то мы получим равенства

$$
[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \left[(x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{c} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\mathbf{b} + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\mathbf{a}\right] = \\
= \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.
$$

Осталось заметить, что

$$
\begin{gathered}
x_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad x_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{b}), \quad x_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{c}), \\
y_1 = (\mathbf{y}, \mathbf{a}), \quad y_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{b}), \quad y_3 = (\mathbf{y}, \mathbf{c}).
\end{gathered}
$$

Задача 18. Докажите тождество

$$
(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.
$$

Решение. Первый способ. В соответствии с первым способом решения задачи 17 имеем

$$
\begin{gathered}
\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{z} = z_1 \mathbf{i} + z_2 \mathbf{j} + z_3 \mathbf{k}; \\
\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}.
\end{gathered}
$$

Тогда

$$
(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\
= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| = \\
= \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.
$$

Решение. Второй способ. В соответствии со вторым способом решения задачи 17 имеем

$$
\mathbf{z} = (\mathbf{z}, \mathbf{a})\mathbf{f}_1 + (\mathbf{z}, \mathbf{b})\mathbf{f}_2 + (\mathbf{z}, \mathbf{c})\mathbf{f}_3,
$$

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{a}\begin{vmatrix} (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} - \mathbf{b}\begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} + \mathbf{c}\begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$(\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]) = \\ = (\mathbf{a},\mathbf{z})\begin{vmatrix} (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} - (\mathbf{b},\mathbf{z})\begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} + (\mathbf{c},\mathbf{z})\begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{a}) & (\mathbf{x},\mathbf{b}) & (\mathbf{x},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{y},\mathbf{a}) & (\mathbf{y},\mathbf{b}) & (\mathbf{y},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{z},\mathbf{a}) & (\mathbf{z},\mathbf{b}) & (\mathbf{z},\mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

§ 3. Прямые и плоскости

Задача 19. Составьте уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{a}_2$ и проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, не лежащую ни на одной из этих прямых.

Решение. Будем искать уравнение искомой прямой в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{b}$. Из условия, что искомая прямая проходит через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и пересекает первую прямую приходим к выводу о том, что найдутся такие числа t_1 и τ, что

$$\mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \tau\mathbf{b} - t_1\mathbf{a}_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, [\mathbf{b},\mathbf{a}_1]) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{b}, [\mathbf{a}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0]) = 0.$$

Аналогичным образом получим равенство для второй прямой

$$(\mathbf{b}, [\mathbf{a}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0]) = 0.$$

Таким образом, в качестве направляющего вектора $\mathbf{b}$ искомой прямой можно взять вектор

$$\mathbf{b} = [[\mathbf{a}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0], [\mathbf{a}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0]].$$

Задача 20. Составьте уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{a}_2$ под прямыми углами (т.е. уравнение общего перпендикуляра к этим прямым).

Решение. Будем искать уравнение искомого перпендикуляра в следующем виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{b}\tau, \quad \mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2].$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через первую прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{a}_1$ и искомую прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{b}\tau$. Уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}]) = 0.$$

Аналогично уравнение плоскости, проходящей через вторую прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{a}_2$ и общий перпендикуляр имеет следующий вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}]) = 0.$$

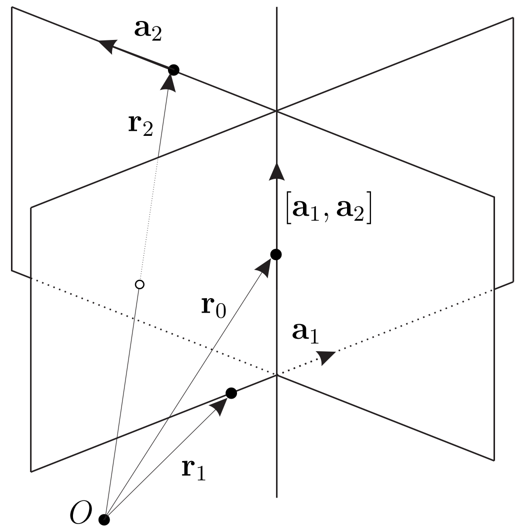

Рис. 13. К задаче 20.

Найдём радиус–вектор $\mathbf{r}_0$ какой–нибудь точки, лежащей на общем перпендикуляре. Будем искать этот радиус–вектор как пересечение уже указанных двух плоскостей и плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярную к первым двум. Итак, имеет место следующая система уравнений:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad \mathbf{n}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}], \quad D_1 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1),$$
$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2) = D_2, \quad \mathbf{n}_2 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}], \quad D_2 = (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2),$$
$$(\mathbf{r}_0, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) = 0.$$

Заметим, что

$$[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = A[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \quad A = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]] + D_2[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], \mathbf{n}_1]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2} = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$

З а д а ч а 21. Найти ортогональную проекцию прямой $l : [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$ на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

Р е ш е н и е. Будем искать уравнение ортогональной проекции в следующем виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}t.$$

Найдём сначала радиус–вектор $\mathbf{r}_1$, как точку пересечения прямой и плоскости:

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + t_0\mathbf{a},$$

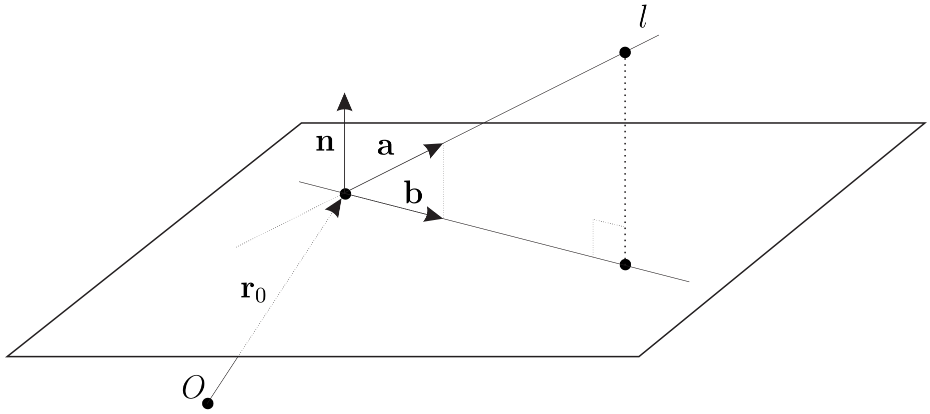

Рис. 14. К задаче 21.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \frac{D - (\mathbf{r_0}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a} \quad \text{при} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0.$$

Найдём теперь направляющий вектор $\mathbf{b}$ как ортогональную проекцию на плоскость вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \lambda\mathbf{n}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}),$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}.$$

Итак,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{D - (\mathbf{r_0}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a} + \left(\mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}\right) t.$$

З а д а ч а 22. Прямая задана как пересечение двух плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$. Запишите векторное параметрическое уравнение этой прямой, т.е. уравнение вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$.

Р е ш е н и е. Направляющий вектор искомой прямой равен $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Будем искать радиус–вектор $\mathbf{r}_0$ как пересечение трёх плоскостей:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2) = D_2, \quad (\mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0.$$

Решение этой системы уравнений имеет следующий вид:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{n}_1]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$

З а д а ч а 23. Найдите радиус-вектор точки пересечения прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ с плоскостью $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение прямой в следующем виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{n}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Поскольку прямая и плоскость пересекаются, то $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$. Поэтому после подстановки векторного параметрического уравнения прямой в уравнение плоскости получим, что

$$t_0 = \frac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}.$$

Итак,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}.$$

Задача 24. Найдите проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ параллельно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ при условии $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$.

Решение. Заметим, что просто нужно найти радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ и плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. В результате получим (смотри задачу 23)

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \frac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}.$$

Задача 25. Найдите проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ параллельно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ при условии $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$.

Решение. Нужно найти радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки пересечения плоскости $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ и прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$. Действительно, имеем

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}.$$

Задача 26. Найдите ортогональную проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

Решение. Пусть $M_2(\mathbf{r}_2)$ — это искомая точка ортогональной проекции точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую. Тогда выполнено следующее условие:

$$\left(\overrightarrow{M_0M_2}, \mathbf{a}\right) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0.$$

Поскольку $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t_0$ при некотором t_0, то имеем

$$t_0 = \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}.$$

Задача 27. Найдите ортогональную проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на плоскость $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$.

Решение. Нужно найти точку $M_2(\mathbf{r}_2)$ пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и плоскости $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0$. Итак,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Задача 28. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$.

Решение. Общая формула для вычисления расстояния от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ имеет следующий вид:

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D|}{|\mathbf{n}|}.$$

Исходя из этой формулы получаем

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])|}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}.$$

Задача 29. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_2$.

Решение. В соответствии с предыдущей задачей имеем

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2, \mathbf{n}) - D_1|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|D_2 - D_1|}{|\mathbf{n}|}.$$

Задача 30. Найдите расстояние от точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

Решение. Запишем уравнение прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ в векторной параметрической форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Пусть $M_2(\mathbf{r}_2)$ — это ортогональная проекция точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую. Тогда в силу задачи 26 имеем

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}.$$

Таким образом, имеем

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| = \left|\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + (\mathbf{r}_0, \mathbf{a})\mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} - \mathbf{r}_0\right|.$$

Задача 31. Составьте уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}$.

Решение. Очевидно, уравнение следующее:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}]) = 0.$$

Задача 32. Найдите расстояние между параллельными прямыми $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}$.

Решение. С одной стороны, площадь треугольника $\triangle A_1A_2A_3$ равна

$$S_{A_1A_2A_3} = |[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}]|.$$

С другой стороны, равна

$$S_{A_1A_2A_3} = h|\mathbf{a}|,$$

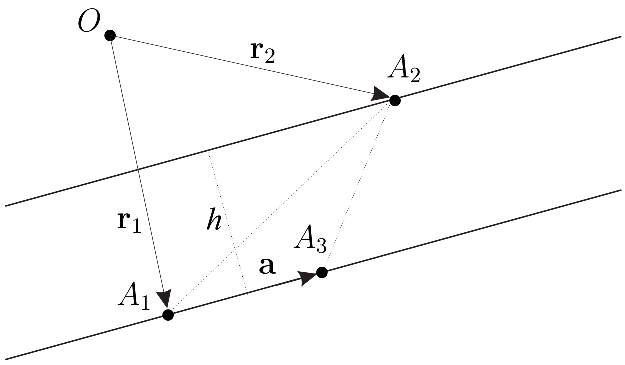

Рис. 15. К задаче 32.

где h — это искомое расстояние. Итак, имеем

$$h = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}.$$

Задача 33. Найдите расстояние между параллельными прямыми $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_1$ и $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_2$.

Решение. Запишем уравнения этих прямых в векторной параметрической форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}_1]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}_2]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Тогда в соответствии с задачей 32 получим

$$h = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2|}{|\mathbf{a}|}.$$

Задача 34. Составьте уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$ перпендикулярно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_3) = D_3$.

Решение. По условию задачи векторы $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ и $\mathbf{n}_3$ параллельны плоскости. Предположим, что $[\mathbf{n}_3, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]] \neq \vartheta$. Тогда уравнение искомой плоскости имеет следующий вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{n} = [\mathbf{n}_3, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]].$$

Осталось найти радиус–вектор $\mathbf{r}_0$ какой–нибудь точки M_0, лежащей на плоскости. Будем искать эту точку как точку пересечения трёх плоскостей:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2) = D_2, \quad (\mathbf{r}_0, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) = 0$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]] + D_2[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], \mathbf{n}_1]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}$$

З а д а ч а 35. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение прямой в векторной параметрической форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Тогда уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]) = 0.$$

З а д а ч а 36. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1$ и $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнения прямых в векторной параметрической форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)};$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]}{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)}.$$

Тогда искомое расстояние равно

$$h = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{r}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = \frac{1}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)} ([\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1], [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2),$$

$$(\mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = -(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2).$$

Тогда приходим к следующей формуле:

$$h = \frac{|(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$