0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 2

ВЕКТОРЫ. БАЗИС И КООРДИНАТЫ

ЗАДАЧА 1. В некоторой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы координаты трех вершин треугольника ABC: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$. Найдите координаты точки $N(x_N, y_N, z_N)$ пересечения медиан треугольника.

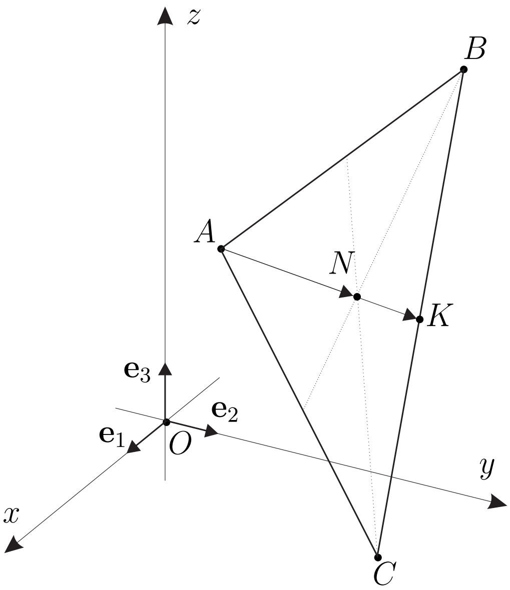

Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Имеем

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC};$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Итак, имеем в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ равенство

$$x_N\mathbf{e}_1 + y_N\mathbf{e}_2 + z_N\mathbf{e}_3 = \\ = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\mathbf{e}_3.$$

Следовательно,

$$x_N = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_N = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z_N = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

ЗАДАЧА 2. В тетраэдре $ABCD$ точки K и L — это соответственно середины ребёр $[AC]$ и $[BD]$, O — точка пересечения медиан грани ACD. Разложите

a) вектор $\overrightarrow{BO}$ по базису $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$;
b) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}\}$;
c) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$;
d) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$.

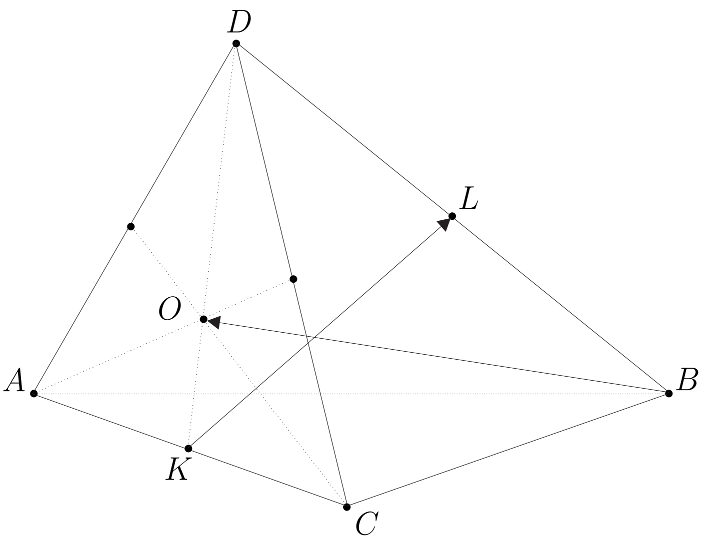

Рис. 2. К задаче 2.

Р е ш е н и е. a) Разложим вектор $\overrightarrow{BO}$ по базису $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD};$$
$$3\overrightarrow{BO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.$$

В силу результата задачи 2 консультации 1 имеем $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{BO} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

b) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

П е р в ы й с п о с о б. Заметим, что $\overrightarrow{AL}$ — медиана треугольника $\triangle ADB$. Согласно результату задачи 1 консультации 1 имеем

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right);$$
$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

В т о р о й с п о с о б. Заметим, что

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right).$$

□ Действительно, имеем

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL},$$
$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL},$$
$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \mathbf{0}, \quad \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{BL} = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}. \quad \boxtimes$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC};$$
$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right).$$

Итак,

$$\overrightarrow{KL} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

c) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$.

$\overrightarrow{KL}$ — это вектор медианы треугольника $\triangle KDB$. В силу результата задачи 2 консультации 1 имеем

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB}\right);$$

$$\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{KD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OD}.$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{KL} = \left\{-\frac{1}{2}, 1, 0\right\}.$$

d) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$.

Имеем

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 0 \cdot \overrightarrow{BO}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{KL} = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

З А Д А Ч А 3. На диагоналях $[AB_1]$ и $[CA_1]$ боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что прямые $l_{EF} \| l_{BC_1}$. Найти отношение $|EF| : |BC_1|$.

Р е ш е н и е. Введём базис

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{CC_1}.$$

Разложим все необходимые для нас векторы по этому базису. Имеем

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c};$$
$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a} + \mathbf{c};$$
$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Поскольку по условию $\overrightarrow{AE} \| \overrightarrow{AB_1}$, то найдётся такое число μ, что

$$\overrightarrow{AE} = \mu\overrightarrow{AB_1} = \mu\left(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\right).$$

Поскольку по условию $\overrightarrow{CF} \| \overrightarrow{CA_1}$, то найдётся такое число ν, что

$$\overrightarrow{CF} = \nu\overrightarrow{CA_1} = \nu\left(\mathbf{a} + \mathbf{c}\right).$$

Кроме того, поскольку $\overrightarrow{EF} \| \overrightarrow{BC_1}$, то найдётся такое число λ, что

$$\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{BC_1} = \lambda(-\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Рассмотрим замкнутый цикл $CAEFC$. По правилу цикла имеем

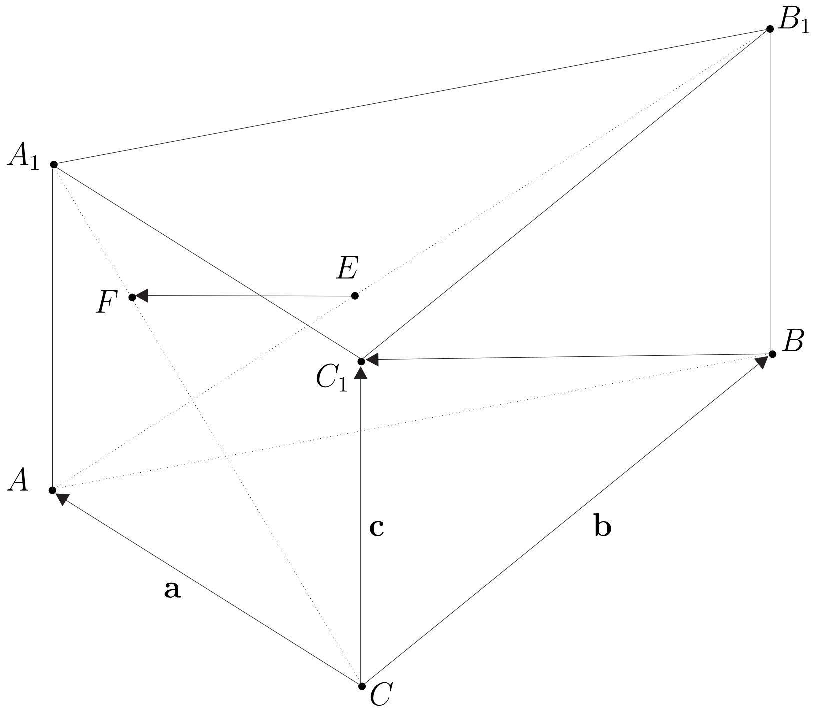

Рис. 3. К задаче 3.

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \\ = \mathbf{a} + \mu\left(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\right) + \lambda(-\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \nu\left(\mathbf{a} + \mathbf{c}\right),$$

$$(1 - \mu - \nu)\mathbf{a} + (\mu - \lambda)\mathbf{b} + (\mu + \lambda - \nu)\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — это базис, то имеют место равенства

$$1 - \mu - \nu = 0, \quad \mu - \lambda = 0, \quad \mu + \lambda - \nu = 0.$$

Эта система имеет единственное решение: $\lambda = \mu = 1/3$, $\nu = 2/3$. Итак,

$$\frac{|EF|}{|BC_1|} = \lambda = \frac{1}{3}.$$

ЗАДАЧА 4. Точки M, N, Q лежат соответственно на рёбрах $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ тетраэдра $ABCD$. Плоскость (MNQ) пересекает прямую l_{AD} в точке P. Известно, что

$$|DN| = |CN|, \quad |AM| = |BM|, \quad \frac{|CQ|}{|CB|} = n.$$

Найдите отношение $|DP|/|DA|$.

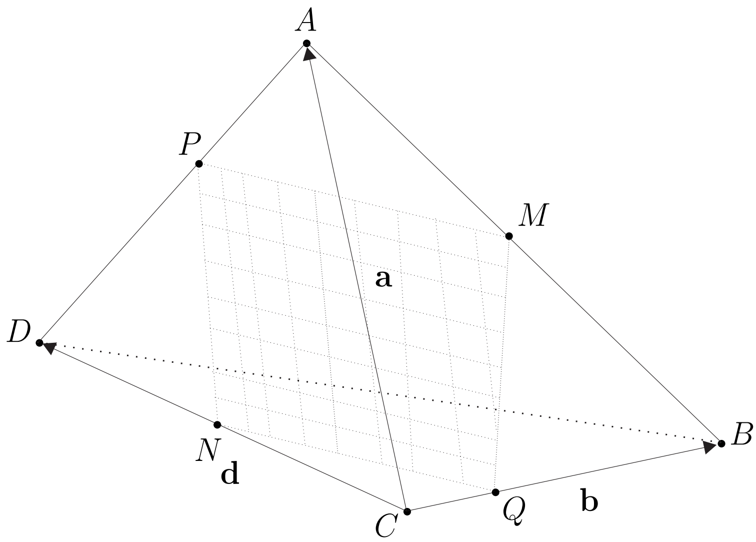

Рис. 4. К задаче 4.

Решение. Введём базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$.

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{CD}.$$

Тогда из цикла $NPACN$ имеем

$$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \mathbf{0}. \tag{0.1}$$

Имеем

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\mathbf{d}, \tag{0.2}$$

$$\overrightarrow{PA} = (1-\lambda)\overrightarrow{DA} = (1-\lambda)(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}) = (1-\lambda)(\mathbf{a} - \mathbf{d}), \tag{0.3}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a}. \tag{0.4}$$

Отметим, что вектор $\overrightarrow{NP}$ лежит в плоскости $(QNPM)$, поэтому он однозначно разлагается по базису в этой плоскости, т. е. по двум не коллинеарным векторам в этой плоскости, например, по векторам $\overrightarrow{QN}$ и $\overrightarrow{QM}$:

$$\overrightarrow{NP} = \mu\overrightarrow{QN} + \nu\overrightarrow{QM}, \tag{0.5}$$

где

$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\mathbf{d} - n\mathbf{b}, \tag{0.6}$$

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - n\mathbf{b}. \tag{0.7}$$

После подстановки равенств (0.2)–(0.7) в равенство (0.1) и после приведения подобных слагаемых мы получим следующее равенство:

$$\left(-\frac{\nu}{2}+1-\lambda-1\right)\mathbf{a}+\left(\mu n+\nu n-\frac{\nu}{2}\right)\mathbf{b}+\left(-\frac{\mu}{2}-1+\lambda+\frac{1}{2}\right)\mathbf{d}=\mathbf{0} \tag{0.8}$$

Поскольку $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$ — это базис, то имеем Значит,

$$-\frac{\nu}{2}+1-\lambda-1=0,$$
$$n\mu+n\nu-\frac{\nu}{2}=0,$$
$$-\frac{\mu}{2}-1+\lambda+\frac{1}{2}=0.$$

Сложим первое и третье равенства, тогда получим

$$\mu+\nu=-1,$$

а из второго равенства получим $\nu=-2n$. Из первого равенства получаем, что $\lambda=n$.

ЗАДАЧА 5. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин, в системе координат $\{A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\}$, причём единицей масштаба на обеих осях системы координат является длина вектора $\overrightarrow{AB}$.

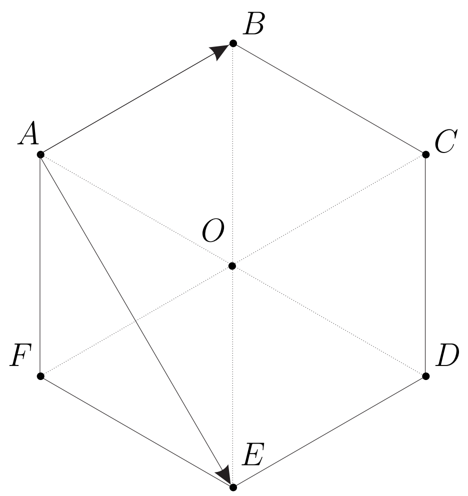

Рис. 5. К задаче 5.

Решение. Пусть $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AE}$ и O — это центр шестиугольника. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}+\mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2};$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \mathbf{a} - \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b});$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2};$$
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}.$$

Из этих равенств вытекают следующие равенства:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2},$$
$$\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}.$$

Кроме того, имеем

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = a, \quad |\mathbf{b}| = |\overrightarrow{AE}| = 2\cdot a\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,a,$$

где a — это длина стороны шестиугольника. По условию задачи $|\mathbf{a}| = 1$. Поэтому имеем

$$\mathbf{e}_a := \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{e}_b := \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}.$$

Отсюда

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_a, \quad \mathbf{b} = \sqrt{3}\,\mathbf{e}_b.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AA} = 0\cdot\mathbf{e}_a + 0\cdot\mathbf{e}_b = \{0,0\}, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = 1\cdot\mathbf{e}_a + 0\cdot\mathbf{e}_b = \{1,0\},$$
$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{e}_a + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_b = \left\{\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},$$
$$\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}+\mathbf{b} = 1\mathbf{a}_a + \sqrt{3}\,\mathbf{e}_b = \{1, \sqrt{3}\},$$
$$\overrightarrow{AE} = \mathbf{b} = 0\cdot\mathbf{e}_a + \sqrt{3}\,\mathbf{e}_b = \{0, \sqrt{3}\},$$
$$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_a + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_b = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Таким образом, имеем

$$A(0,0), \quad B(1,0), \quad C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$D(1, \sqrt{3}\,), \quad E(0, \sqrt{3}\,), \quad F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

З А Д А Ч А 6. Основание AD равнобочной трапеции $ABCD$ равно 8, высота равна 3, а углы, прилежащие к этому основанию, равны $\pi/4$. Принимая за ось абсцисс основание $\overrightarrow{AD}$, а за ось ординат — ось симметрии трапеции, направленную от большего основания к меньшему, найти в этой прямоугольной системе координат координаты вершин трапеции, точки M пересечения диагоналей трапеции и точки Q пересечения её боковых сторон.

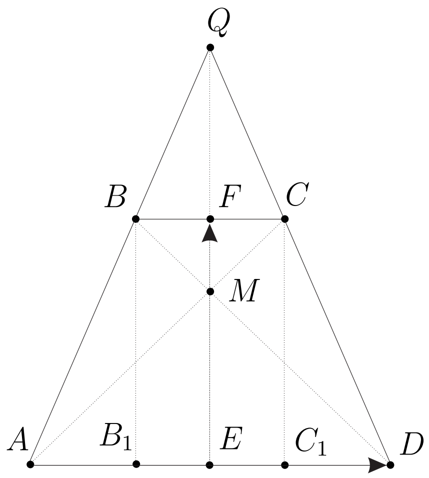

Рис. 6. К задаче 6.

Р е ш е н и е. Итак, нам задана прямоугольная декартова система координат $\{E, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EF}\}$. Сначала найдём координаты вершин трапеции. Пусть

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{EF} = \mathbf{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}.$$

Заметим, что $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{C_1C} = \mathbf{b}$. По условию задачи имеем

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{|\overrightarrow{BB_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|}, \quad |\overrightarrow{BB_1}| = 3.$$

Поэтому

$$|AB_1| = |BB_1| = 3,$$

$$|B_1C_1| = |AD| - 2|AB_1| = 8 - 6 = 2 \Rightarrow |EB_1| = |EC_1| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EB}_1 = -\frac{1}{8}\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{EC_1} = \frac{1}{8}\mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EB}_1 + \overrightarrow{B_1B} = -\frac{1}{8}\mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EC_1} + \overrightarrow{C_1C} = \frac{1}{8}\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Заметим, что $|\mathbf{a}| = 8$, $|\mathbf{b}| = 3$. Введём единичные векторы в направлении оси абсцисс и ординат:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{8}\mathbf{a}, \quad \mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{3}\mathbf{b}.$$

Тогда имеем

$$\mathbf{a} = 8\mathbf{e}_a, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{e}_b.$$

Поэтому имеем

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_a + 0 \cdot \mathbf{e}_b = \{4, 0\}, \quad \overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} = -4\mathbf{e}_a + 0 \cdot \mathbf{e}_b = \{-4, 0\},$$

$$\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{8}\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{e}_a + 3\mathbf{e}_b = \{-1, 3\},$$

$$\overrightarrow{EC} = \frac{1}{8}\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{e}_a + 3\mathbf{e}_b = \{1, 3\}.$$

Итак,

$$A(-4, 0), \quad D(4, 0), \quad B(-1, 3), \quad C(1, 3).$$

Теперь найдём координаты точки Q. С этой целью заметим, что

$$\frac{|QE|}{|AD|} = \frac{|QF|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|QE|}{|QF|} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$|QE| = |QF| + 3 \Rightarrow |QF| = 1, \quad |QE| = 3 + 1 = 4 \Rightarrow Q(0, 4).$$

Теперь найдём координаты точки M. Пусть

$$\lambda = \frac{|AM|}{|MC|}, \quad \mu = \frac{|EM|}{|MF|}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_C}{1 + \lambda}, \quad \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_E + \mu \mathbf{r}_F}{1 + \mu}. \tag{0.9}$$

Если рассматривать радиус–векторы относительно полюса E, то имеем

$$\mathbf{r}_E = \vartheta, \quad \mathbf{r}_A = -\frac{1}{2}\mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{8}\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_F = \mathbf{b}. \tag{0.10}$$

Из уравнений (0.9) и (0.10) приходим кравенству

$$-\frac{1}{1+\lambda}\frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{1}{8}\mathbf{a} + \mathbf{b}\right) = \frac{\mu}{\mu+1}\mathbf{b}.$$

В силу неколлинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ приходим к равенствам

$$-\frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{8}=0, \quad \frac{\lambda}{\lambda+1}=\frac{\mu}{\mu+1} \Rightarrow \lambda=\mu=4.$$

Итак,

$$\frac{|EM|}{|MF|}=4, \quad |EM|+|MF|=3 \Rightarrow |EM|=\frac{12}{5} \Rightarrow E(0,12/5).$$