Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра математики

Линейная алгебра
Домашнее задание № 3
Срок сдачи
15 мая 2026 г.

Москва
2026

ТЕМА 7

Билинейные и квадратичные функционалы

Примеры решения задач

Пример 7.1. Квадратичная форма $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ задана в некотором базисе своей матрицей Q. Найдите матрицы квадратичных форм $\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_4(\boldsymbol{x})$, являющихся ограничениями формы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ на подпространства P_1, P_2, P_3, P_4 и исследуйте их на знакоопределённость:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad P_2 = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right),$$

$$P_3 = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad P_4 = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Решение. Обозначим через X_1, X_2 базисные векторы подпространства P_1: $X_1 = (1;2;1;1)^T$, $X_2 = (1;3;1;1)^T$. Матрица Q_1 ограничения $\boldsymbol{Q}|_{P_1}(\boldsymbol{x})$ квадратичной формы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ на подпространство P_1 вычисляется по формуле

$$Q_1 = \left\|X_1, X_2\right\|^T Q \left\|X_1, X_2\right\| =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры полученной матрицы равны $\Delta_1 = 3$ и $\Delta_2 = 2$; согласно критерию Сильвестра квадратичная форма $\boldsymbol{Q}|_{P_1}(\boldsymbol{x})$ является положительно определённой.

Если теперь $X_1 = (1;1;-2;-1)^T$ и $X_2 = (-1;-1;3;2)^T$ — базисные векторы подпространства P_2, то матрица Q_2 ограничения $\boldsymbol{Q}|_{P_2}(\boldsymbol{x})$ квадратичной формы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ на подпространство P_2 вычисляется по формуле

$$Q_2 = \left\|X_1, X_2\right\|^T Q \left\|X_1, X_2\right\| =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 13 & -19 \end{pmatrix};$$

её угловые миноры равны $\Delta_1 = -9$ и $\Delta_2 = 2$; согласно критерию Сильвестра квадратичная форма $\boldsymbol{Q}|_{P_2}(\boldsymbol{x})$ является отрицательно определённой.

Обозначив через $X_1 = (1;1;-1;1)^T$ и $X_2 = (1;1;-2;1)^T$ базисные векторы подпространства P_3, находим матрицу Q_3 ограничения $\boldsymbol{Q}|_{P_3}(\boldsymbol{x})$ квадратичной формы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ на подпространство P_3:

$$Q_3 = \left\|X_1, X_2\right\|^T Q \left\|X_1, X_2\right\| =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры равны $\Delta_1 = -3$ и $\Delta_2 = -1$; согласно критерию Сильвестра квадратичная форма $Q|_{P_3}(x)$ не является ни положительно определённой, ни отрицательно определённой, однако поскольку она невырождена, то является неопределённой.

Для подпространства P_4 рассуждения аналогичны:

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

ограничение $\boldsymbol{Q}|_{P_4}(\boldsymbol{x})$ квадратичной формы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ на подпространство P_4 является тождественно нулевой формой.

Пример 7.2. Приведите следующие квадратичные формы к каноническому виду методом Лагранжа:

$$\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{x}) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4x^1x^3 - 6x^2x^3 + 7(x^3)^2;$$
$$\boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{x}) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4x^1x^3 + 2(x^2)^2 - 6x^2x^3 + 5(x^3)^2;$$
$$\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{x}) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 - 2x^2x^3 + 4(x^3)^2$$

(здесь x^1, x^2, x^3 — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в некотором исходном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$). Сделайте выводы о знакоопределённости этих форм.

Решение. Для удобства переобозначим координаты вектора: $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$; тогда заданные квадратичные формы примут вид

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_1(x,y,z) &= x^2 - 2xy + 4xz - 6yz + 7z^2;\\
\boldsymbol{Q}_2(x,y,z) &= x^2 - 2xy + 4xz + 2y^2 - 6yz + 5z^2;\\
\boldsymbol{Q}_3(x,y,z) &= x^2 + 2xy - 4xz + y^2 - 2yz + 4z^2.
\end{aligned}$$

Выпишем матрицы данных квадратичных форм, они нам понадобятся позднее:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & -3 & 7\end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 5\end{pmatrix},\ Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим квадратичную форму $\boldsymbol{Q}_1(x,y,z)$. Выделим группу слагаемых, содержащих переменную x, и достроим её до полного квадрата:

$$\begin{aligned}
Q_1(x,y,z) &= \underline{x^2 - 2xy + 4xz} - 6yz + 7z^2 =\\
&= \left[x^2 - 2x\underline{(y-2z)} + \underline{(y-2z)^2}\right] - \underline{(y-2z)^2} - 6yz + 7z^2 =\\
&= [x - (y-2z)]^2 - \underline{y^2 - 2yz} + 3z^2 =
\end{aligned}$$

(продолжаем процесс, выделяя группу слагаемых, содержащих y)

$$\begin{aligned}
&= [x - y + 2z]^2 - \left[y^2 + 2yz + z^2\right] + 4z^2 =\\
&= [x - y + 2z]^2 - [y+z]^2 + 4z^2.
\end{aligned}$$

Введя новые переменные x', y', z' по формулам

$$X' = \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z\\ y + z\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = C_1^{-1}X, \tag{7.2.1}$$

перепишем квадратичную форму в виде

$$\boldsymbol{Q}(x',y',z') = x'^2 - y'^2 + 4z'^2.$$

Обратим внимание, что в формуле (7.2.1) фигурирует обратная матрица перехода C_1^{-1}, поскольку новые переменные X' выражены через старые X. Имеем

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: в новом базисе матрица квадратичной формы равна

$$Q_1' = C_1^T Q_1 C_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если в формулах замены переменных (7.2.1) положить не $z' = z$, а $z' = 2z$, то форма примет нормальный вид

$$\boldsymbol{Q}(x', y', z') = x'^2 - y'^2 + z'^2;$$

обратная и прямая матрицы перехода при этом будут иметь вид

$$\widetilde{C}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Данная квадратичная форма невырождена ($\operatorname{rk} \boldsymbol{Q}_1 = 3$), она не является знакоопределённой: её значения равны нулю на любом векторе $\boldsymbol{x}$, координаты $(x', y', z')^T$ которого в нормальном каноническом базисе удовлетворяют условию $x'^2 - y'^2 + z'^2 = 0$, например, на векторах $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ с координатами $X_1' = (0; 2; 2)^T$, $X_2' = (0; 2; -2)^T$; в исходном базисе эти векторы имеют координаты

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

На линейной оболочке каждого такого вектора квадратичная форма принимает нулевое значение, однако все многообразие таких векторов подпространством не является (в силу геометрической аналогии его часто называют конусом).

Для второй квадратичной формы $\boldsymbol{Q}_2(x, y, z)$ действуем аналогично:

$$\boldsymbol{Q}_2(x, y, z) = \underline{x^2 - 2xy + 4xz} + 2y^2 - 6yz + 5z^2 =$$
$$= \Big[x^2 - 2x\underline{(y - 2z)} + \underline{(y - 2z)^2}\Big] - \underline{(y - 2z)^2} + 2y^2 - 6yz + 5z^2 =$$
$$= \big[x - (y - 2z)\big]^2 + y^2 - 2yz + z^2 = \big[x - y + 2z\big]^2 + \big[y - z\big]^2.$$

Полагая

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ y - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2^{-1} X,$$

запишем канонический вид квадратичной формы (который получился нормальным):

$$\boldsymbol{Q}_2(x', y', z') = x'^2 + y'^2.$$

Матрица перехода C_2 к каноническому базису легко вычисляется:

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: в новом базисе матрица квадратичной формы равна

$$Q_2' = C_2^T Q_2 C_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма $\boldsymbol{Q}_2$ является вырожденной: $\operatorname{rk} \boldsymbol{Q}_2 = 2$ (см. обсуждение в примере 7.3).

Квадратичная форма $\boldsymbol{Q}_2$ является положительно полуопределённой (квазиопределённой): она не может принимать отрицательных значений, но нулевое значение принимает на подпространстве $L(\boldsymbol{e}_{3'})$, где $\boldsymbol{e}_{3'}$ — третий вектор нормального канонического базиса; это подпространство представляет собой ядро соответствующего билинейного функционала (см. пример 7.3).

Перейдём к квадратичной форме $\boldsymbol{Q}_3$:

$$\boldsymbol{Q}_3(x, y, z) = \underline{x^2 + 2xy - 4xz} + y^2 - 2yz + 4z^2 =$$
$$= \left[x^2 + 2x(y - 2z) + (y - 2z)^2\right] - \left(y - 2z\right)^2 + y^2 - 2yz + 4z^2 =$$
$$= \left[x + y - 2z\right]^2 + 2yz.$$

После замены переменных

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (7.2.2)$$

квадратичная форма примет вид

$$\boldsymbol{Q}_3(x', y', z') = x'^2 + 2y'z'.$$

Матрицу перехода от исходного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к промежуточному базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, обозначим C_3'; в формуле (7.2.2) фигурирует матрица $(C_3')^{-1}$ (переход от старых координат к новым).

Дальнейшее выделение полных квадратов невозможно, поскольку форма не содержит квадратов переменных y' и z'. В подобных случаях выполняется замена переменных, превращающая произведение переменных в разность квадратов:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' - z'' \\ y'' + z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \tag{7.2.3}$$

После такой замены переменных квадратичная форма примет канонический вид:

$$\boldsymbol{Q}_3(x'', y'', z'') = x''^2 + 2y''^2 - 2z''^2.$$

Матрицу перехода от промежуточного базиса $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ к каноническому базису $\boldsymbol{e}_{1''}, \boldsymbol{e}_{2''}, \boldsymbol{e}_{3''}$, фигурирующую в формуле (7.2.3), обозначим C_3''; матрица перехода C_3 от исходного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к каноническому базису $\boldsymbol{e}_{1''}, \boldsymbol{e}_{2''}, \boldsymbol{e}_{3''}$ равна

$$C_3 = C_3' C_3'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: матрица квадратичной формы в новом базисе равна

$$Q_3'' = C_3^T Q_3 C_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что матрица перехода к каноническому базису в данном случае не является треугольной.

Пример 7.3. Симметричные билинейные функционалы $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в трёхмерном вещественном векторном пространстве $V(\mathbb{R})$ получены поляризацией квадратичных функционалов из примера 7.2. Найдите ядра этих билинейных функционалов.

Решение. Ядром симметричного билинейного функционала называется множество

$$\ker \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{y} \in V : \forall \boldsymbol{x} \in V,\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\}$$

(на самом деле оно является подпространством в V). В координатной записи $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = X^T B Y$, поэтому условие $X^T B Y = 0$ может выполняться для любого вектора $X \in V$ только если $BY = O$, т.е.

для нахождения ядра $\ker \boldsymbol{B}$ требуется решить однородную систему уравнений. Для заданных матриц имеем

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker \boldsymbol{B}_1 = \{0\};$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker \boldsymbol{B}_2 = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right);$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker \boldsymbol{B}_3 = \{0\}.$$

Билинейные функционалы $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_3$ являются невырожденными, т.е. для них единственным вектором, B-ортогональным всему пространству V, является нулевой вектор. Однако это не означает, что соответствующие квадратичные формы $\boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ не могут принимать нулевых значений на ненулевых векторах (см. пример 7.2).

Билинейный функционал $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ вырожден, т.е. вектор $(-1; 1; 1)^T$ является B-ортогональным любому вектору пространства V. При этом, конечно, ограничение $\boldsymbol{B}_2|_{\ker \boldsymbol{B}_2}$ билинейного функционала $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ на одномерное подпространство $\ker \boldsymbol{B}_2$ вырождено: $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ker \boldsymbol{B}_2$.

Пример 7.4. Найдите ортогональные дополнения подпространства

$$P = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

относительно билинейных функционалов $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ из примера 7.3.

Решение. Ортогональным дополнением подпространства P относительно билинейного функционала $\boldsymbol{B}$ называется множество

$$P^{\perp} = \{\boldsymbol{y} \in V : \forall \boldsymbol{x} \in P,\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\}$$

(на самом деле оно является подпространством в V). В координатной записи $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = X^T BY$, поэтому условие $X^T BY = 0$ выполняется для любого вектора $X \in P$ только в том случае, если $(X^T B)Y = O$, т.е. для нахождения ядра $\ker B$ требуется решить однородную систему уравнений с основной матрицей $\left\|X_1, X_2\right\|^T B$, где

X_1, X_2 — столбцы координат векторов, образующих базис в подпространстве P. Для заданных матриц B_1, B_2 имеем

$$\left\|X_1, X_2\right\|^T B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 17 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^\perp = L\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right);$$

$$\left\|X_1, X_2\right\|^T B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & -6/5 & 11/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^\perp = L\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

Билинейный функционал $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ невырожден, так что для него $V = P \oplus P^\perp$. Для вырожденного билинейного функционала $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ имеем $\dim P = \dim P^\perp = 2$, $P \cap P^\perp = \ker \boldsymbol{B}_2\big|_P$.

Пример 7.5. Приведите квадратичные формы из примера 7.2 к каноническому виду методом Якоби.

Решение. 1. Матрица квадратичной формы $\boldsymbol{Q}_1$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

имеет угловые миноры

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -4$$

(напомним, что для удобства полагают $\Delta_0 = 1$). Таким образом, канонические коэффициенты квадратичной формы $\boldsymbol{Q}_1$ равны

$$b_{1'1'} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 1, \quad b_{2'2'} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -1, \quad b_{3'3'} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 4,$$

т.е. сама квадратичная форма имеет канонический вид

$$\boldsymbol{Q}_1(x', y', z') = x'^2 - y'^2 + 4z'^2.$$

Для краткости обозначим векторы канонического базиса $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Найдём координаты этих векторов в исходном базисе

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый вектор $\boldsymbol{f}_1$ канонического базиса полагаем равным $\boldsymbol{e}_1$; значение квадратичной формы на этом векторе равно

$$\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) = b_{1'1'} = 1.$$

Второй вектор $\boldsymbol{f}_2$ канонического базиса ищем в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \alpha_1 \boldsymbol{f}_1,$$

выбирая коэффициент α_1 так, чтобы вектор $\boldsymbol{f}_2$ оказался B_1-ортогональным линейной оболочке $L(\boldsymbol{f}_1) = L(\boldsymbol{e}_1)$:

$$0 = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{B}_1\big(\boldsymbol{e}_2 + \alpha_1 \boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1\big) = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1) + \alpha_1 \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1),$$

откуда

$$\alpha_1 = -\frac{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1)}{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)}.$$

Поскольку

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

имеем $\alpha_1 = 1$ и далее

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

значение квадратичной формы на этом векторе равно

$$\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2) = b_{2'2'} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -1.$$

Третий вектор $\boldsymbol{f}_3$ канонического базиса ищем в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_3 + \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2,$$

выбирая коэффициенты β_1 и β_2 так, чтобы вектор $\boldsymbol{f}_3$ оказался B_1-ортогональным линейной оболочке $L(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{B}_1\big(\boldsymbol{e}_3 + \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_1\big) = \\
&= \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_1) + \beta_1 \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) + \underline{\beta_2 \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1)} = \\
&= \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_1) + \beta_1 \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1), \\
0 &= \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{B}_1\big(\boldsymbol{e}_3 + \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2\big) = \\
&= \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_2) + \underline{\beta_1 \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)} + \beta_2 \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2) = \\
&= \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_2) + \beta_2 \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2);
\end{aligned}$$

подчёркнутые слагаемые равны нулю: $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1) = 0$. Поскольку

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

находим

$$\beta_1 = -\frac{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_1)}{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} = -2, \quad \beta_2 = -\frac{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_2)}{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)} = -1$$

и далее

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_3 + \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, канонический B_1-ортогональный базис построен:

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса к найденному равна

$${}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом, полученным в примере 7.2.

2. Рассмотрим квадратичную форму $\boldsymbol{Q}_2$; угловые миноры её матрицы

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

равны

$$\begin{array}{l} \Delta_0 = 1, \\ \Delta_1 = 1, \end{array} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

так что канонические коэффициенты суть

$$b_{1'1'} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 1, \quad b_{2'2'} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1, \quad b_{3'3'} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0$$

и канонический вид квадратичной формы есть

$$\boldsymbol{Q}_2(x', y', z') = x'^2 + y'^2.$$

Построим канонический базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$, исходя из базиса

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Первый вектор $\boldsymbol{f}_1$ канонического базиса полагаем равным $\boldsymbol{e}_1$; значение квадратичной формы на этом векторе равно

$$\boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) = b_{1'1'} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 1.$$

Второй вектор $\boldsymbol{f}_2$ канонического базиса ищем в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1)}{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} \boldsymbol{f}_1$$

(см. объяснение выше). Поскольку

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 2 & -3\\2 & -3 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -1,$$

имеем

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};$$

значение квадратичной формы на этом векторе равно

$$\boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2) = b_{2'2'} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1.$$

Третий вектор $\boldsymbol{f}_3$ канонического базиса ищем в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_3 - \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_1)}{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} \boldsymbol{f}_1 - \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_2)}{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)} \boldsymbol{f}_2.$$

Поскольку

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 2 & -3\\2 & -3 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2,$$

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 2 & -3\\2 & -3 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -1,$$

находим

$$\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Итак, канонический B_1-ортогональный базис и матрица перехода от исходного базиса имеют вид

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом, полученным в примере 7.2.

3. Для квадратичной формы $\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, матрица которой имеет вид

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

второй угловой минор равен нулю:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому метод Якоби неприменим. Перейдём к промежуточному базису, поменяв местами первый и третий базисные векторы (т.е. переставив переменные x и z):

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z', \\ y = y', \\ z = x'; \end{cases} \quad C_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (C_3')^{-1};$$

после этого квадратичная форма запишется в виде

$$\begin{aligned} Q_3(x', y', z') &= z'^2 + 2z'y' - 4z'x' + y'^2 - 2y'x' + 4x'^2 = \\ &= 4x'^2 - 2x'y' - 4x'z' + y'^2 + 2y'z' + z'^2, \end{aligned}$$

а ее матрица в промежуточном базисе $\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$ имеет вид

$$Q_3' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры этой матрицы равны

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

поэтому канонические коэффициенты квадратичной формы (диагональные элементы матрицы в каноническом базисе $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_{1''}$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_{2''}$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_{3''}$) суть

$$b_{1''1''} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 4, \quad b_{2''2''} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{3}{4}, \quad b_{3''3''} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = -\frac{1}{3},$$

а канонический вид квадратичной формы —

$$\boldsymbol{Q}_3(x'', y'', z'') = 4x''^2 + \frac{3}{4}y''^2 - \frac{1}{3}z''^2. \tag{7.5.1}$$

Будем искать канонический базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$, исходя из базиса

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в дальнейшем изложении координаты всех векторов указаны в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Первый вектор $\boldsymbol{f}_1$ канонического базиса полагаем равным $\boldsymbol{e}_{1'}$; значение квадратичной формы на этом векторе равно

$$\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 = b_{1''1''}.$$

Второй вектор $\boldsymbol{f}_2$ канонического базиса ищем в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_{2'} - \frac{\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{f}_1)}{\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)}\boldsymbol{f}_1.$$

Поскольку

$$\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1,$$

имеем

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix};$$

значение квадратичной формы на этом векторе равно

$$\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} = b_{2''2''}.$$

Третий вектор $\boldsymbol{f}_3$ канонического базиса ищем в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_{3'} - \frac{\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{f}_1)}{\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)}\boldsymbol{f}_1 - \frac{\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{f}_2)}{\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)}\boldsymbol{f}_2.$$

Поскольку

$$\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{f}_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\1 & 1 & -1\\-2 & -1 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1/4\end{pmatrix} = \frac{1}{2},$$

получаем

$$\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{-2}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/4}\begin{pmatrix}0\\1\\1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

Итак, канонический базис состоит из векторов

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1/4\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2/3\\1/3\end{pmatrix},$$

матрица перехода от исходного базиса к каноническому равна

$$C_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -2/3\\1 & 1/4 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Проверка: матрица квадратичной формы в базисе имеет вид

$$\begin{aligned} Q_3'' &= C_3^T Q_3 C_3 = \\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -2/3\\1 & 1/4 & 1/3\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\1 & 1 & -1\\-2 & -1 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -2/3\\1 & 1/4 & 1/3\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 3/4 & 0\\0 & 0 & -1/3\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

что согласуется с формулой (7.5.1).

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Квадратичная форма $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ задана в некотором базисе своей матрицей Q. Найдите матрицы квадратичных форм $\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_4(\boldsymbol{x})$, являющихся ограничениями формы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ на подпространства P_1, P_2, P_3, P_4 и исследуйте их на знакоопределённость:

$$Q = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -3 & 1\\-1 & 3 & 0 & 1\\-3 & 0 & -3 & 2\\1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix},$$

$$P_1 = L\left(\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -1\\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -3\\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad P_2 = L\left(\begin{pmatrix} 4\\ 1\\ -3\\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$P_3 = L\left(\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}\right), \qquad P_4 = L\left(\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -2\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

7.2. Приведите симметричную билинейную форму $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, заданную своей матрицей B в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, к каноническому виду методом Лагранжа:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2\\ -4 & 7 & -6\\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 7\\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

7.3. Приведите билинейные формы из задачи 7.2 к каноническому виду методом Якоби.

ТЕМА 8

Евклидовы пространства

Примеры решения задач

Пример 8.1. Подпространство P евклидова пространства E является линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Найдите ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на P и $P^{\perp}$. Координаты всех векторов заданы относительно некоторого ортонормированного базиса:

$$\text{(a)} \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(b)} \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Решение. (a) Обозначим ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на $P = L(\boldsymbol{a})$ и $P^{\perp}$ через $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$; ясно, что

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'', \quad \boldsymbol{x}' = \lambda \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{a}.$$

Умножая последнее равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$, получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{a}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Вычисляя скалярные произведения, находим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 30, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 150, \quad \lambda = \frac{1}{5},$$

$$\boldsymbol{x}' = \lambda \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Как и ранее, обозначив ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на $P = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ и $P^{\perp}$ через $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$, заметим, что

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'', \quad \boldsymbol{x}' = \lambda^1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda^2 \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \lambda^1 \boldsymbol{a}_1 - \lambda^2 \boldsymbol{a}_2.$$

Умножая последнее равенство скалярно поочередно на векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x} - \lambda^1\boldsymbol{a}_1 - \lambda^2\boldsymbol{a}_2) = 0,\\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x} - \lambda^1\boldsymbol{a}_1 - \lambda^2\boldsymbol{a}_2) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + \lambda^2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}),\\ \lambda^1(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) + \lambda^2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}).\end{cases}$$

Основной матрицей полученной неоднородной системы линейных уравнений с неизвестными λ^1 и λ^2 является матрица Грама векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$:

$$G = \begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}62 & 38\\ 38 & 26\end{pmatrix};$$

поскольку

$$\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x})\\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1\\ 3\\ -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-26\\ -20\end{pmatrix},$$

находим

$$\begin{pmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x})\\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}62 & 38\\ 38 & 26\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}-26\\ -20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\ -3/2\end{pmatrix}$$

и далее

$$\boldsymbol{x}' = \lambda^1\boldsymbol{a}_1 + \lambda^2\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/2\\ -3/2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-3\\ 2\\ -2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ -7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\ 2\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 1\\ -5\end{pmatrix}.$$

Пример 8.2. Примените процесс ортогонализации к векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, заданным своими координатами в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ трехмерного евклидова пространства. Запишите координаты векторов полученного ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ и матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 3\end{pmatrix}.$$

Решение. Шаг 1. Поскольку $\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{2}$, полагаем

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Находим вектор $\boldsymbol{f}_2$, ортогональный линейной оболочке $L(\boldsymbol{e}_{1'})$:

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \operatorname{pr}_{L(\boldsymbol{e}_{1'})} \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{e}_{1'} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\|\boldsymbol{f}_2\| = \sqrt{3}$, имеем

$$\boldsymbol{e}_{2'} = \frac{\boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим вектор $\boldsymbol{f}_3$, ортогональный линейной оболочке $L(\boldsymbol{e}_{1'}, bfe_{2'})$:

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \operatorname{pr}_{L(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})} \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{e}_{1'} - (\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{e}_{2'}.$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{a}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, \quad (\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{a}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -\sqrt{3};$$

таким образом,

$$\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\|\boldsymbol{f}_3\| = \sqrt{6}$, имеем

$$\boldsymbol{e}_{3'} = \frac{\boldsymbol{f}_3}{\|\boldsymbol{f}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения матрицы перехода C от базиса $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ составим матрицы $\boldsymbol{A} = \big\|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\big\|$ и $\boldsymbol{E}' = \big\|\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\big\|$, состоящие из указанных столбцов, и используем соотношение $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{A}C$; тогда

$$C = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Пример 8.3. Известна матрица Грама некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ двумерного евклидова пространства. Найдите матрицу перехода к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, получаемому из данного базиса ортогонализацией.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение. Квадратичная форма, задающая скалярное произведение в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 6xy + 13y^2.$$

Приведём её к нормальному виду методом Лагранжа:

$$x^2 + 6xy + 13y^2 = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2\right) - 9y^2 + 13y^2 = \\ = (x + 3y)^2 + 4y^2 = x'^2 + y'^2,$$

где

$$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = 2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.4. Дополните семейство векторов $\boldsymbol{e}_1 = (1; -1; 1; -3)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (-4; 1; 5; 0)^T$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением до ортогонального базиса. Разложите вектор $\boldsymbol{a} = (5; 3; -5; -9)^T$ по построенному ортогональному базису и найдите его ортогональную проекцию на линейную оболочку $L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

Решение. Заданные векторы ортогональны:

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Любой вектор $\boldsymbol{x}$, ортогональный линейной оболочке $L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = 0, \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad AX = O,$$

где $A = \|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\|^T$. Решая указанную систему, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

так что фундаментальную совокупность решений образуют векторы $\boldsymbol{f}_1 = (2; 3; 1; 0)^T$ и $\boldsymbol{f}_2 = (-1; -4; 0; 1)^T$. Каждый из этих векторов ортогонален линейной оболочке $L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, но между собой они не ортогональны, поэтому применим к ним процесс Грама—Шмидта. На первом шаге полагаем $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1$; далее,

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \mathrm{pr}_{L(\boldsymbol{g}_1)}\, \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{f}_2)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)}\boldsymbol{g}_1.$$

Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{f}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -14, \quad (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 14.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-14}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, в качестве ортогонального базиса в пространстве $\mathbb{R}^4$ можно взять базис

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы разложить вектор по найденному ортогональному (но не нормированному) базису, воспользуемся формулами Гиббса:

$$a^1 = \frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \right] \Big/ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = \frac{24}{24} = 1$$

и аналогично

$$a^2 = \frac{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)} = -1, \quad a^3 = \frac{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)} = 1, \quad a^4 = \frac{(\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4)} = 3.$$

Проекция вектора a на линейную оболочку $L(e_1, e_2)$ равна

$$\mathrm{pr}_{L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением подпространство P задано однородной системой линейных уравнений $AX = O$ с основной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -6 \\ -11 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

(см. пример 1.2). Найдите ортогональный базис в подпространстве P и дополните его до базиса пространства $\mathbb{R}^4$.

Решение. Введём векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (8; -5; 3; -6)^T, \quad \boldsymbol{f}_2 = (-11; 8; -6; 9)^T,$$

полученные транспонированием строк матрицы A; тогда уравнения системы $AX = O$ можно трактовать как условия ортогональности вектора $\boldsymbol{x}$ векторам $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$:

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{x}) = 0, \quad (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{x}) = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ образуют базис в ортогональном дополнении $P^\perp$ подпространства P. Они между собой не ортогональны; применим к ним процесс Грама—Шмидта: $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (8; -5; 3; -6)^T$,

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \mathrm{pr}_{L(\boldsymbol{e}_1)}\, \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)} \boldsymbol{e}_1,$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2) = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = -200, \ (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 134,$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{-200}{134} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{67} \begin{pmatrix} 63 \\ 36 \\ -102 \\ 3 \end{pmatrix};$$

положим $\boldsymbol{e}_2 = (63; 36; -102; 3)^T$. Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ортогональный базис в ортогональном дополнении $P^\perp$ подпространства P.

Система $AX = O$ была решена в примере 1.2; фундаментальная совокупность её решений (т.е. базис подпространства P) состоит из векторов $\boldsymbol{f}_3 = (2; 5; 3; 0)^T$ и $\boldsymbol{f}_4 = (1; -2; 0; 3)^T$, каждый из которых ортогонален линейной оболочке $L(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$; между собой эти векторы не ортогональны. Применим к ним процесс ортогонализации: $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_3 = (2; 5; 3; 0)^T$,

$$\boldsymbol{g}_4 = \boldsymbol{f}_4 - \mathrm{pr}_{L(\boldsymbol{e}_3)}\, \boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{f}_4 - \frac{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_4)}{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)} \boldsymbol{e}_3,$$

$$(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -8, \quad (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 38,$$

$$\boldsymbol{g}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-8}{38} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 27 \\ -18 \\ 12 \\ 57 \end{pmatrix};$$

положим $\boldsymbol{e}_4 = (27; -18; 12; 57)^T$. Векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ образуют ортогональный базис в подпространстве P.

Векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 63 \\ 36 \\ -102 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 27 \\ -18 \\ 12 \\ 57 \end{pmatrix}$$

образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{R}^4$; при этом $\mathbb{R}^4 = P \oplus P^\perp$.

Пример 8.6. В пространстве $\mathbb{R}[t]_2$ многочленов степени $\leqslant 2$ скалярное произведение элементов $\boldsymbol{x} = x(t)$ и $\boldsymbol{y} = y(t)$ задано формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt. \tag{8.6.1}$$

Найдите матрицу Грама стандартного базиса пространства. При помощи процесса ортогонализации постройте ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}[t]_2$, исходя из стандартного базиса.

Решение. Стандартный базис пространства $\mathbb{R}[t]_2$ состоит из векторов

$$\boldsymbol{e}_0 = 1, \quad \boldsymbol{e}_1 = t, \quad \boldsymbol{e}_2 = t^2 \tag{8.6.2}$$

или, короче, $\boldsymbol{e}_k = t^k$, $k = 0, 1, 2$. Элементы матрицы Грама равны

$$g_{jk} = (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \int_0^1 t^j\, t^k\, dt = \left.\frac{t^{j+k+1}}{j+k+1}\right|_0^1 = \frac{1}{j+k+1}.$$

Таким образом, матрица Грама имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}. \tag{8.6.3}$$

Применим процесс Грама—Шмидта к стандартному базису.

Шаг 0. Имеем $\|\boldsymbol{e}_0\|^2 = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_0) = g_{00} = 1$, поэтому полагаем

$$\boldsymbol{e}_{0'} = \frac{\boldsymbol{e}_0}{\|\boldsymbol{e}_0\|} = 1.$$

Шаг 1. Найдём вектор $\boldsymbol{f}_1$, ортогональный линейной оболочке $L(\boldsymbol{e}_{0'})$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \mathrm{pr}_{L(\boldsymbol{e}_{0'})}\, \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{e}_{0'}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_{0'} = t - \frac{1}{2};$$

мы использовали тот факт, что

$$(\boldsymbol{e}_{0'}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1) = g_{01} = \frac{1}{2}.$$

Квадрат нормы вектора $\boldsymbol{f}_1$ равен

$$\|\boldsymbol{f}_1\|^2 = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12},$$

поэтому

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{f}_1\|} = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Шаг 2. Найдём вектор $\boldsymbol{f}_2$, ортогональный линейной оболочке $L(\boldsymbol{e}_{0'}, \boldsymbol{e}_{1'})$:

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \mathrm{pr}_{L(\boldsymbol{e}_{0'}\boldsymbol{e}_{1'})}\, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{e}_{0'}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_{0'} - (\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_{1'}.$$

Вычисляем требуемые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{e}_{0'}, \boldsymbol{e}_2) = \int_0^1 1 \cdot t^2 dt = \frac{1}{3},$$

$$(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_2) = \int_0^1 \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{12}};$$

таким образом,

$$\boldsymbol{f}_2 = t^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Квадрат нормы вектора $\boldsymbol{f}_2$ равен

$$\|\boldsymbol{f}_2\|^2 = (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2) = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180};$$

поэтому

$$\boldsymbol{e}_{2'} = \frac{\boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_2\|} = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right).$$

Итак, базис в пространстве $\mathbb{R}[t]_2$, ортонормированный относительно скалярного произведения (8.6.1), состоит из векторов (многочленов)

$$\boldsymbol{e}_{0'} = 1, \quad \boldsymbol{e}_{1'} = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad \boldsymbol{e}_{2'} = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right). \tag{8.6.4}$$

Выполним проверку. Матрица перехода от старого (стандартного) базиса (8.6.2) к новому базису (8.6.4) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{12}/2 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{12} & -6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу Грама нового базиса (вычисления опущены):

$$G' = C^T G C = \mathbb{1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Подпространство P евклидова пространства E является линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Найдите ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на P и $P^\perp$. Координаты всех векторов заданы относительно некоторого ортонормированного базиса:

(a) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.2. Примените процесс ортогонализации к векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, заданным своими координатами в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ четырехмерного евклидова пространства. Запишите координаты векторов полученной ортонормированной системы $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ и матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейной оболочки $L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ этой линейной оболочки.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

8.3. В трёхмерном евклидовом пространстве примените процесс ортогонализации к векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, заданным своими координатами в некотором (неортогональном) базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, матрица

Грама G которого известна. Запишите координаты векторов полученного ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8.4. Известна матрица Грама некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ трёхмерного евклидова пространства. Найдите матрицу перехода C к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, получаемому из данного базиса ортогонализацией.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

8.5. Дополните семейство $\boldsymbol{e}_1 = (1; -1; 1; -1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (1; 2; 2; 1)^T$ векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением до ортогонального базиса. Разложите вектор $\boldsymbol{a} = (7; 4; 2; 1)^T$ по построенному ортогональному базису и найдите его ортогональную проекцию на линейную оболочку $L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

8.6. В пространстве $\mathbb{R}[t]_3$ многочленов степени $\leqslant 3$ скалярное произведение задано формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_{-1}^{1} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Найдите матрицу Грама стандартного базиса пространства. Применив процесс ортогонализации к стандартному базису, постройте в $\mathbb{R}[t]_3$ ортонормированный базис.

8.7. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}[t]_2 \times \mathbb{R}[t]_2 \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре $\boldsymbol{x} = x(t)$, $\boldsymbol{y} = y(t)$ многочленов степени $\leqslant 2$ ставит в соответствие вещественное число

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x(-1)y(-1) + x(0)y(0) + x(1)y(1).$$

Докажите, что это отображение может служить скалярным произведением в пространстве $\mathbb{R}[t]_2$. Найдите матрицу Грама стандартного базиса пространства относительно этого скалярного произведения. Применив процесс ортогонализации к стандартному базису, постройте в $\mathbb{R}[t]_2$ ортонормированный базис.

ТЕМА 9

Линейные операторы в евклидовых пространствах

Примеры решения задач

Пример 9.1. В пространстве $\mathbb{R}[t]_2$ многочленов степени $\leqslant 2$ скалярное произведение элементов $\boldsymbol{x} = x(t)$ и $\boldsymbol{y} = y(t)$ задано формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_0^1 x(t)y(t)dt \tag{9.1.1}$$

(см. пример 8.6). Найдите матрицу D^* оператора $\boldsymbol{D}^*$, сопряжённого оператору дифференцирования $\boldsymbol{D} = d/dt$, в стандартном базисе пространства.

Решение. Матрица D оператора дифференцирования $\boldsymbol{D}$ и матрица Грама G скалярного произведения (9.1.1) в стандартном базисе были найдены в примерах 5.3 и 8.6 соответственно:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Матрица D^* сопряжённого оператора вычисляется следующим образом:

$$D^* = G^{-1} D^T G =$$
$$= \begin{pmatrix} =1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 12 & -24 & -26 \\ 0 & 30 & 30 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления произведения $G^{-1}D^T$ целесообразно воспользоваться методом, описанным в примере 2.2:

$$\|G \mid D^T\| = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}}$$

$$\xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & -36 & 60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 192 & -360 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -180 & 360 & 0 \end{array}\right) = \|I \mid G^{-1}D^T\|$$

и далее

$$(G^{-1}D^T)G =$$

$$= \begin{pmatrix} -36 & 60 & 0 \\ 192 & -360 & 0 \\ -180 & 360 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 12 & -24 & -26 \\ 0 & 30 & 30 \end{pmatrix}.$$

Пример 9.2. Найдите двумерное инвариантное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$, заданного в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ трёхмерного векторного пространства $V(\mathbb{R})$ матрицей (см. пример 6.6)

$$\begin{pmatrix} 11 & 14 & 6 \\ -8 & -9 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся тем фактом, что если P — инвариантное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to V$, то ортогональное дополнение $P^\perp$ является инвариантным подпространством сопряженного оператора $\boldsymbol{A}^*$. Поскольку

$$\dim P + \dim P^\perp = \dim V,$$

двумерное инвариантное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$ можно найти как ортогональное дополнение одномерного инвариантного подпространства сопряжённого оператора $\boldsymbol{A}^*$.

Введём в пространстве скалярное произведение так, чтобы базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ был ортонормированным относительно этого скалярного произведения. Тогда матрица сопряжённого оператора в этом базисе получается из матрицы исходного оператора транспонированием. Собственные значения операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^*$ одинаковы; в примере 6.6 было установлено, что оператор $\boldsymbol{A}$ (а потому и оператор A^*) имеет единственное (вещественное) собственное значение $\lambda_1 = 3$. Найдём соответствующий собственный вектор оператора A^*:

$$A^* - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ 14 & -9 & 4 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ 14 & -12 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ортогональное дополнение линейной оболочки $L(\boldsymbol{x}^*)$ и будет искомым двумерным инвариантным подпространством оператора $\boldsymbol{A}$; однородная система линейных уравнений, определяющая это подпространство, имеет вид

$$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow 2y^1 + 3y^2 + 2y^3 = 0,$$

где $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, y^3)^T \in L^{\perp}(\boldsymbol{x}^*)$. Найдём базис в этом подпространстве, т.е. фундаментальную совокупность решений построенной системы:

$$2y^1 + 3y^2 + 2y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что найденная линейная оболочка $\boldsymbol{L}(y_1, \boldsymbol{y}_2)$ совпадает с линейной оболочкой $\boldsymbol{L}(x_1, \boldsymbol{x}_2)$ из примера 6.6:

$$\left\|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\right\| = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 9.3. Самосопряжённый оператор $\boldsymbol{A}$ задан своей матрицей A в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ евклидова пространства. Постройте ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, состоящий из собственных векторов оператора.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}. \tag{9.3.1}$$

Решение. (a) Найдём собственные значения:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 9\lambda - \lambda^3,$$

так что $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$. Все собственные значения простые (т.е. имеют алгебраическую кратность 1), поэтому каждому из них соответствует одномерное собственное подпространство; собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, автоматически получатся ортогональными. Найдём их:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Г.-Ж.}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};$$

$$A-\lambda_3 I=\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&-2&-2\\2&-2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Г.-Ж.}}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Нормируем найденные векторы; поскольку $\|\boldsymbol{x}_1\|=\|\boldsymbol{x}_2\|=\|\boldsymbol{x}_3\|=3$, имеем

$$\boldsymbol{e}_{1'}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_{2'}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_{3'}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Матрица оператора в этом базисе диагональна: $A'=\mathrm{diag}(-3;0;3)$. Отметим, что матрица перехода $C=\|\boldsymbol{e}_{1'},\boldsymbol{e}_{2'},\boldsymbol{e}_{3'}\|$ от исходного ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_{1'},\boldsymbol{e}_{2'},\boldsymbol{e}_{3'}$, состоящему из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$, ортогональна:

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&2&-2\\2&1&2\end{pmatrix},\quad C^{-1}=C^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

(b) Строки матрицы A попарно пропорциональны, поэтому, очевидно, её ранг равен 1, так что два собственных значения равны нулю, $\lambda_1=\lambda_2=0$, а третье λ_3 легко найти, пользуясь инвариантностью следа: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}\,A=14$ и $\lambda_3=14$. Находим собственные векторы:

$$A-\lambda_{1,2}I=$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Г.-Ж.}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$A-\lambda_3 I=\begin{pmatrix}-13&2&3\\2&-10&6\\3&6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Г.-Ж.}}\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&-2/3\\0&0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Вектор $\boldsymbol{x}_3$ автоматически ортогонален векторам $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$; его достаточно нормировать: $\|\boldsymbol{x}_3\|=\sqrt{14}$, $\boldsymbol{e}_{3'}=\boldsymbol{x}_3/\|\boldsymbol{x}_3\|$. К векторам $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ применим процесс ортогонализации:

$$\|\boldsymbol{x}_1\|=\sqrt{5},\quad \boldsymbol{e}_{1'}=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$(\boldsymbol{e}_{1'},\boldsymbol{x}_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{6}{\sqrt{5}},$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{e}_{1'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{y}_2\| = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{14}{5}}, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \frac{\boldsymbol{y}_2}{\|\boldsymbol{y}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Итак, ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$, имеет вид

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{3'} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора в этом базисе диагональна: $A' = \operatorname{diag}(0; 0; 14)$.

Пример 9.4. Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:

(a) $\boldsymbol{Q}_1(x, y, z) = -x^2 + 4xz + y^2 - 4yz$;
(b) $\boldsymbol{Q}_2(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 12yz + 9z^2$.

Решение. Рассмотрим линейный оператор $\boldsymbol{A}$, матрица $A_{\text{ЛО}}$ которого в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равна матрице $A_{\text{КФ}} = Q$ квадратичной формы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$. Поскольку матрица симметрична, $A_{\text{ЛО}} = A_{\text{КФ}}$, оператор является самосопряжённым, и из его собственных векторов можно составить новый ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, в котором матрица $A'_{\text{ЛО}}$ оператора диагональна (при этом на её диагонали стоят собственные значения). Матрица перехода C от ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ ортогональна, т.е. $C^{-1} = C^T$. Имеем

$$\begin{aligned} A'_{\text{ЛО}} &= {}^{-1}A_{\text{ЛО}}, \\ A'_{\text{КФ}} &= {}^{T}A_{\text{КФ}} = {}^{-1}A_{\text{ЛО}} = A'_{\text{ЛО}}; \end{aligned}$$

итак, в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ матрица квадратичной формы также является диагональной. Матрицы заданных квадратичных форм

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

совпадают с матрицами из примера 9.3, где были проведены все необходимые вычисления:

$$Q'_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -3/\sqrt{70} & 1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{5} & -6/\sqrt{70} & 2/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{70} & 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, заданные квадратичные формы приводятся к каноническим видам

$$\boldsymbol{Q}_1(x', y', z') = -3x'^2 + 3z'^2, \quad \boldsymbol{Q}_2(x', y', z') = 14z'^2$$

ортогональными преобразованиями с матрицами C_1 и C_2 соответственно:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_k \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C_k^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Пример 9.5. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — ортономированный базис в евклидовом пространстве V, $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ — базис, связанный с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ соотношениями

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{f}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3.$$

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ задан своей матрицей A_f в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Докажите, что оператор $\boldsymbol{A}$ является самосопряжённым, и постройте из его собственных векторов ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$. Составьте матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ и убедитесь, что она является ортогональной.

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ и матрица Грама базиса $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_f = C^T I C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

поскольку матрица Грама ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — единичная.

Оператор $\boldsymbol{A}$ является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица A_f в произвольном базисе обладает тем свойством, что матрица $G_f A_f$ симметрична. Проверим это свойство:

$$G_f A_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 12 \\ 15 & 26 & 19 \\ 12 & 19 & 17 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$:

$$\det(A_f - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 3 \\ 3 & 10-\lambda & -1 \\ 3 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ 3 & 10-\lambda & 9-\lambda \\ 3 & 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(9-\lambda)^2$$

(при вычислении определителя сначала прибавили второй столбец к третьему, затем из второй строки вычли третью и разложили определитель по последнему столбцу); таким образом, собственные значения оператора равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ и $\lambda_3 = 0$. Найдём собственные векторы (все вычисления производятся в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$):

$$A_f - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$A_f - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим ортогональность найденных векторов относительно скалярного произведения, заданного матрицей Грама G_f; для этого найдём матрицу Грама базиса $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$:

$$G_x = \|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\|^T G_f \|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\| =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 19 & 0 \\ 19 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

как и следовало ожидать, собственные векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ автоматически ортогональны собственному вектору $\boldsymbol{x}_3$ (отметим сразу, что $\|\boldsymbol{x}_3\| = \sqrt{9} = 3$, так что $\boldsymbol{e}_{3'} = (-1; 1/3; 1/3)^T$); между собой векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ не ортогональны, поэтому придётся провести ортогонализацию:

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{x_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{19}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{17} \begin{pmatrix} 12 \\ -19 \\ 17 \end{pmatrix};$$

все необходимые в этих вычислениях скалярные произведения содержатся в матрице Грама G_x. Нормируем вектор $\boldsymbol{y}_2$:

$$\|\boldsymbol{y}_2\|^2 = \left(\frac{3}{17}\right)^2 \begin{pmatrix} 12 \\ -19 \\ 17 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -19 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{81}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{e}_{2'} = \frac{\boldsymbol{y}_2}{\|\boldsymbol{y}_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 12 \\ -19 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица перехода D от базиса $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{17} & 4/\sqrt{17} & -1 \\ 3/\sqrt{17} & -19/(3\sqrt{17}) & 1/3 \\ 0 & 17/(3\sqrt{17}) & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не является ортогональной, т.е. не удовлетворяет условию $DD^T = I$. Матрица перехода $S = CD$ от ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, состоящему из собственных векторов оператора, уже ортогональна: $SS^T = I$; она равна

$$S = CD = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{17} & 4/\sqrt{17} & -1 \\ 3/\sqrt{17} & -19/(3\sqrt{17}) & 1/3 \\ 0 & 17/(3\sqrt{17}) & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3/\sqrt{17} & 2/(3\sqrt{17}) & -2/3 \\ 2/\sqrt{17} & -7/(3\sqrt{17}) & -2/3 \\ 2/\sqrt{17} & 10/(3\sqrt{17}) & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Пример 9.6. Самосопряжённый оператор $\boldsymbol{A}$ задан своей матрицей A_f в некотором неортогональном базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Найдите матрицу Грама этого базиса.

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$:

$$\det(A_f - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2),$$

так что оператор имеет простые собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Найдём координаты собственных векторов в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$:

$$A_f - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A_f - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A_f - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Грама базисов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ и $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ связаны соотношением $G_x = C^T G_f C$, или $G_f = (C^{-1})^T G_x C^{-1}$, где C — матрица перехода от исходного базиса $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ к базису $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку оператор является самосопряжённым, базис, состоящий из векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, является ортонормированным, т.е. его матрица Грама — единичная: $G_x = I$. Итак, получаем

$$G_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для проверки вычислим матрицу $G_f A_f$:

$$G_f A_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

она оказалась симметричной, поэтому оператор $\boldsymbol{A}$ действительно является самосопряжённым.

Решение задачи не является единственным: базис из собственных векторов матрицы A_f можно взять иначе (например, переставить векторы местами или умножить их на произвольные ненулевые коэффициенты); тогда получится другая матрица Грама G_f.

Пример 9.7. Проверьте, что оператор $\boldsymbol{A}$, заданный матрицей A в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, является ортогональным, найдите его собственные значения и какую-либо максимальную ортонормированную систему собственных векторов. Опишите геометрический смысл оператора.

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. (a) Проверим соотношение $AA^T = I$, необходимое и достаточное для того, чтобы матрица A была матрицей ортогонального оператора в ортонормированном базисе:

$$AA^T = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\boldsymbol{A}$ ортогонален, поэтому его собственные значения (если таковые имеются) могут быть равны только 1 или -1. Матрица A симметрична, поэтому оператор $\boldsymbol{A}$ является самосопряжённым, корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ его характеристического многочлена вещественны (и, стало быть, являются собственными значениями), а из собственных векторов можно составить ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, в котором матрица A' оператора диагональна, причём на диагонали расположены собственные значения, равные ± 1. Поскольку $\operatorname{tr} A = -1$, реализуется случай $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем:

$$A - \lambda_1 I = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{x}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \quad \boldsymbol{e}_{1'} = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_3$, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, ортогональны вектору $\boldsymbol{x}_1$, т.е. удовлетворяют уравнению $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) = 0$:

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Между собой эти векторы не ортогональны, поэтому применим к ним процесс ортогонализации:

$$\|\boldsymbol{x}_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \mathrm{pr}_{L(\boldsymbol{e}_{2'})}\, \boldsymbol{x}_3 = \\ &= \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{e}_{2'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{y}_3\| = \frac{1}{5}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \boldsymbol{e}_{3'} = \frac{\boldsymbol{y}_3}{\|\boldsymbol{y}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Построенные векторы $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ образуют ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов ортогонального (и самосопряжённого) оператора $\boldsymbol{A}$. Матрица перехода от исходного ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к построенному ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ равна

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 0 & 1/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix};$$

она является ортогональной, что легко проверяется: $CC^T = I$.

В ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ матрица A' оператора $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

таким образом, оператор является оператором отражения трёхмерного пространства в прямой, направляющим вектором которой является вектор $\boldsymbol{e}_{1'}$: сам этот вектор под действием оператора переходит в себя, а векторы $\boldsymbol{e}_{2'}$ и $\boldsymbol{e}_{3'}$ меняют направление на противоположное.

(b) Проверим выполнение соотношения $AA^T = I$:

$$AA^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

таким образом, оператор является ортогональным. (Отметим, что в данном примере матрица несимметрична, т.е. соответствующий оператор самосопряжённым не является.) Найдём собственные значения оператора. Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни характеристического многочлена (которые в отличие от собственных значений могут быть комплексными), то

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr} A = \frac{5}{3}, \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1;$$

отсюда заключаем, что $\lambda_1 = 1$, а корни λ_2 и λ_3 являются взаимно сопряжёнными комплексными числами (напомним, что $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant |\lambda|$). Найдём соответствующий собственный вектор:

$$A - \lambda_1 I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ортогональное дополнение $P^\perp$ к линейной оболочке $P = L(\boldsymbol{x}_1)$ является двумерным инвариантным подпространством, которое не содержит собственных векторов; таким образом, оператор представляет собой вращение вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{x}_1$. Чтобы найти угол вращения, найдём ортонормированный базис в $P^\perp$ и подействуем на него оператором. Из условия ортогональности $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) = 0$ найдём два линейно независимых вектора в $P^\perp$:

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

они получились взаимно ортогональными, $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = 0$, поэтому ортогонализация не требуется; ортонормированный базис в $P^\perp$ состоит из векторов

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{y}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подействуем оператором $\boldsymbol{A}$ на векторы $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$:

$$\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\| = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & -2 \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

и выразим векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2$ через $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$:

$$\|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2\| =$$
$$= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}/6 & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}/6 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

таким образом, поскольку

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2\| = \|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\| \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

ограничение $\boldsymbol{A}\big|_{P^\perp}$ оператора $\boldsymbol{A}$ на двумерное инвариантное подпространство $P^\perp$ действует как вращение на угол φ, для которого $\cos\varphi = 1/3$, $\sin\varphi = -2\sqrt{2}/3$. Сам оператор представляет собой вращение на угол φ вокруг оси с направляющим вектором $x_1 = (1; 1; 0)^T$.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. В пространстве $\mathbb{R}[t]_2$ многочленов степени $\leqslant 2$ скалярное произведение элементов $\boldsymbol{x} = x(t)$ и $\boldsymbol{y} = y(t)$ задано формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x(-1)y(-1) + x(0)y(0) + x(1)y(1)$$

(см. пример 8.7). Найдите матрицу D^* оператора $\boldsymbol{D}^*$, сопряжённого оператору дифференцирования $\boldsymbol{D} = d/dt$, в стандартном базисе пространства.

9.2. Найдите двумерное инвариантное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$, заданного в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ трёхмерного векторного пространства $V(\mathbb{R})$ матрицей (см. задачу 6.4)

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -2 & -8 & -4 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ -5 & -11 & -6 \end{pmatrix}.$$

9.3. Самосопряжённый оператор $\boldsymbol{A}$ задан своей матрицей в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ евклидова пространства. Постройте ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, состоящий из собственных векторов оператора.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.4. Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:

(a) $\boldsymbol{Q}_1(x, y, z) = 2x^2 - 12xy - 2xz - y^2 + 4yz - 6z^2$;

(b) $\boldsymbol{Q}_2(x,y,z) = 2x^2 + 4xy - 2xz - y^2 + 4yz + 2z^2$
(ср. задачу 9.3).

9.5. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве V, $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ — базис, связанный с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ соотношениями

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ задан своей матрицей A_f в базисе $bff_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Докажите, что оператор $\boldsymbol{A}$ является самосопряжённым, и постройте ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ из его собственных векторов. Составьте матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ и убедитесь, что она является ортогональной.

$$A_f = \begin{pmatrix} 24 & -32 & 8 \\ -27 & 36 & -9 \\ -33 & 44 & -11 \end{pmatrix}.$$

9.6. Самосопряжённый оператор $\boldsymbol{A}$ задан своей матрицей A_f в некотором неортогональном базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Найдите матрицу Грама этого базиса.

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.7. Проверьте, что оператор $\boldsymbol{A}$, заданный матрицей A в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, является ортогональным, найдите его собственные значения и какую-либо максимальную ортонормированную систему собственных векторов. Опишите геометрический смысл оператора.

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

ТЕМА 10

Матричная экспонента

Примеры решения задач

Пример 10.1. Найдите экспоненту матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдём собственные значения и собственные векторы матрицы A. Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 15 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; соответствующие собственные векторы

$$(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}, \qquad \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x}_2 = 0, \qquad \begin{pmatrix} -6 & 15 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода C к диагонализирующему базису состоит из столбцов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$; вычислим также обратную матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\exp A' = \exp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix},$$

окончательно находим:

$$\exp A = C \exp A' C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6e - 5e^2 & 15e^2 - 15e \\ 2e - 2e^2 & 6e^2 - 5e \end{pmatrix}.$$

Пример 10.2. Найдите $\exp(tA)$ для матрицы A из предыдущего примера.

Решение. Меняется лишь финальная часть решения:

$$\exp(tA') = \exp\left(t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix};$$

отсюда находим:

$$\begin{aligned}\exp(tA) = C\exp(tA')\,C^{-1} &= \begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix} =\\ &= \begin{pmatrix}6e^t - 5e^{2t} & 15e^{2t} - 15e^t\\ 2e^t - 2e^{2t} & 6e^{2t} - 5e^t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Пример 10.3. Найдите e^{tA} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен

$$\det(a - \lambda I) = \begin{vmatrix}a-\lambda & -b\\ b & a-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$

имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ — собственные значения матрицы, которым отвечают собственные векторы

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix},$$

так что матрица перехода к диагонализирующему базису и обратная к ней имеют вид

$$C = \begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 1\\ i & 1\end{pmatrix}.$$

Поскольку $A' = \operatorname{diag}(a+ib, a-ib)$, окончательно получаем

$$\begin{aligned}\exp(tA') &= \begin{pmatrix}e^{(a+ib)t} & 0\\ 0 & e^{(a-ib)t}\end{pmatrix},\\ \exp(tA) &= C\exp(tA')\,C^{-1} =\\ &= \begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(a+ib)t} & 0\\ 0 & e^{(a-ib)t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 1\\ i & 1\end{pmatrix} =\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{(a-ib)t} + e^{(a+ib)t}\right) & \frac{1}{2i}\left(e^{(a-ib)t} - e^{(a+ib)t}\right)\\ \frac{1}{2i}\left(e^{(a+ib)t} - e^{(a-ib)t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{(a-ib)t} + e^{(a+ib)t}\right)\end{pmatrix} =\\ &= e^{at}\begin{pmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Пример 10.4. Найдите e^{tA} для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим, что
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1 + A_2,$$
причём матрицы A_1 и A_2 коммутируют, поэтому $e^{tA} = e^{tA_1}e^{tA_2}$. Экспонента первой матрицы вычисляется элементарно:
$$e^{tA_1} = \exp\left(2t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Для второй матрицы найдём характеристический многочлен:
$$\det(A_2 - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda;$$
его корни равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Соответствующие собственные векторы суть
$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$
так что матрица перехода C к диагонализирущему базису и её обратная имеют вид
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 2i \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 2i & 1 & 1 \\ -2i & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Диагональная форма A_2' матрицы A_2 и экспонента $e^{tA_2'}$ равны
$$A_2' = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad e^{tA_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2it} \end{pmatrix}.$$
Находим e^{tA_2}:
$$\exp(tA_2) = C\exp(tA_2')\,C^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -2i & 2i \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2it} \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 2i & 1 & 1 \\ -2i & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2it} + \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{4}ie^{2it} - \frac{1}{4}ie^{-2it} & \frac{1}{4}ie^{2it} - \frac{1}{4}ie^{-2it} \\ \frac{1}{4}ie^{-2it} - \frac{1}{4}ie^{2it} & \frac{1}{8}e^{-2it} + \frac{1}{8}e^{2it} + \frac{3}{4} & \frac{1}{8}e^{-2it} + \frac{1}{8}e^{2it} - \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}ie^{-2it} - \frac{3}{4}ie^{2it} & \frac{3}{8}e^{-2it} + \frac{3}{8}e^{2it} - \frac{3}{4} & \frac{3}{8}e^{-2it} + \frac{3}{8}e^{2it} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4\cos 2t & -2\sin 2t & -2\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + 3 & \cos 2t - 1 \\ 6\sin 2t & 3\cos 2t - 3 & 3\cos 2t + 1 \end{pmatrix}.
$$

Окончательно получаем:

$$
e^{tA} = e^{tA_1}e^{tA_2} = \frac{e^{2t}}{4} \begin{pmatrix} 4\cos 2t & -2\sin 2t & -2\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + 3 & \cos 2t - 1 \\ 6\sin 2t & 3\cos 2t - 3 & 3\cos 2t + 1 \end{pmatrix}.
$$

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Найдите следующие матричные экспоненты:

$$
\text{(a)}\ \exp\left(t \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right); \quad \text{(b)}\ \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right);
$$

$$
\text{(c)}\ \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right); \quad \text{(d)}\ \exp\left(t \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right).
$$

Указания и ответы

7.1. $Q_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -22 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$, $Q_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
$\boldsymbol{Q}|_{P_1}$ отрицательно определена; $\boldsymbol{Q}|_{P_2}$ тождественно нулевая; $\boldsymbol{Q}|_{P_3}$ неопределена; $\boldsymbol{Q}|_{P_4}$ положительно определена

7.2.

$$\text{(a)}\ B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(b)}\ B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(c)}\ B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3. См. ответ к задаче 7.2

8.1.

$$\text{(a)}\ \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ x' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Указание: в п. (b) векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы.

8.2.

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

8.3.

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_{3'} = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}-19\\8\\3\end{pmatrix}.$$

8.4.

$$C = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

8.5. $\boldsymbol{e}_3 = (-4;-1;3;0)^T$, $\boldsymbol{e}_4 = (9;-27;3;39)^T$; координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ равны $(1;2;-1;0)^T$; проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на линейную оболочку $L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ равна $(3;3;5;1)^T$.

8.6.

$$G = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2/3 & 0\\0 & 2/3 & 0 & 2/5\\2/3 & 0 & 2/5 & 0\\0 & 2/5 & 0 & 2/7\end{pmatrix},\quad \begin{aligned}&\boldsymbol{e}_{0'} = 1/\sqrt{2},\quad \boldsymbol{e}_{1'} = \sqrt{3/2}\,t,\\&\boldsymbol{e}_{2'} = \sqrt{5/8}\,(3t^2-1),\\&\boldsymbol{e}_{3'} = \sqrt{7/8}\,(5t^3-3t).\end{aligned}$$

8.7. $G = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2/3}\\0 & 1/\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & \sqrt{3/2}\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{0'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{e}_{1'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}t$, $\boldsymbol{e}_{2'} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\boldsymbol{e}_0 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\boldsymbol{e}_1 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}t^2$.

9.1. $\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\3/2 & 0 & 1\\0 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

9.2. (a) $L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$, (b) $L\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

9.3. (a) $\lambda_1 = -5$: $\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;1;1)^T$; $\lambda_2 = -7$: $\boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1;-2;3)^T$; $\lambda_3 = 7$: $\boldsymbol{e}_{3'} = \frac{1}{\sqrt{42}}(-5;4;1)^T$.

(b) $\lambda_1 = -3$: $\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1;-2;1)^T$, $\lambda_{2,3} = 3$: $\boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1;0;1)^T$, $\boldsymbol{e}_{3'} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;1;1)^T$ или $\boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;1;0)^T$, $\boldsymbol{e}_{3'} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1;2;5)^T$.

9.4. См. ответ к задаче 9.3.

9.5. $\operatorname{rk} A_f = 1$, поэтому $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \operatorname{tr} A_f = 49$, в обозначениях примера 9.5

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ G_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \ G_f A_f = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 \\ -12 & 16 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad G_x = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 1 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{17} & 23/(7\sqrt{17}) & -8/7 \\ 0 & 17/(7\sqrt{17}) & 9/7 \\ 3/\sqrt{17} & -1/(7\sqrt{17}) & 11/7 \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{17} & 22/(7\sqrt{17}) & 3/7 \\ -2/\sqrt{17} & -5/(7\sqrt{17}) & 6/7 \\ 3/\sqrt{17} & -18/(7\sqrt{17}) & 2/7 \end{pmatrix}.$$

9.6. $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$, в обозначениях примера 9.6

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_f = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G_f A_f = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.7. (a) Собственное значение $\lambda_1 = -1$, соответствующий нормированный собственный вектор $\boldsymbol{x}_1 = (0; \sqrt{1/3}; \sqrt{2/3})^T$,

$$\big(L(\boldsymbol{x}_1)\big)^\perp = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2/3} \\ \sqrt{1/3} \end{pmatrix}\right), \quad A\big|_{(L(\boldsymbol{x}_1))^\perp} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2\sqrt{6}/5 \\ 2\sqrt{6}/5 & 1/5 \end{pmatrix};$$

оператор представляет собой вращение на угол φ, для которого $\cos\varphi = 1/5$, $\sin\varphi = 2\sqrt{6}/5$, вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{x}_1$ с последующим отражением в плоскости, перпендикулярной этой оси.

(b) $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{x}_1 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1)^T$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\boldsymbol{x}_2 = (1/\sqrt{2}; 0; 1)^T$, $\boldsymbol{x}_3 = (1; 1; 0)^T$. Оператор представляет собой отражение в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{x}_1$.

10.1.

(a) $\begin{pmatrix} e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{3t} - 2e^{2t} \\ e^{2t} - e^{3t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t & -5\sin t \\ 2\sin t & \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}$.