D.1. Решить однородную систему линейных уравнений, заданную своей основной матрицей.

(а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -13 & -5 & -10 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -13 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.

D.2. Решить неоднородную систему линейных уравнений, заданную своей расширенной матрицей.

(а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -13 & -5 & -10 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -13 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.

D.3. Найти базис в линейной оболочке заданных матриц и разложить каждую из матриц по найденному базису.

(а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$;

(б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

D.4.В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два подпространства: P — линейная оболочка столбцов и Q — решение однородной системы. Найти базис в сумме $P + Q$ заданных подпространств.

$$P = L\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right), Q = \{x^1 - 3x^2 + 2x^3 = 0\}.$$

D.5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два подпространства: P — линейная оболочка столбцов и Q — решение однородной системы. Найти базис в пересечении $P \cap Q$ заданных подпространств.

$$P = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), Q = \{x^1 + x^2 - 2x^3 = 0\}.$$

D.6. Записать матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ к базису $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$. Задан столбец координат X вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{2'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D.7. Матрица перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ к базису $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$ имеет вид $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Написать выражение требуемой координаты заданного тензора в базисе $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$ через координаты a_k^{ij} этого тензора в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

(а) $a_{2'}^{1'1'}$; (б) $a_{2'}^{1'2'}$; (в) $a_{1'}^{1'2'}$; (г) $a_{1'}^{2'2'}$; (д)$a_{2'}^{2'1'}$.

D.8. Составить матрицу оператора ортогонального проектирования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в стандартном ортонормированном базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$

(а) на линейную оболочку вектора $\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_2$;

(б) на ортогональное дополнение линейной оболочки вектора $\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_2$.

D.9. Найти ядро и образ линейного оператора $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, заданного своей матрицей A в некоторой паре базисов:

(а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -13 & -5 & -10 \end{pmatrix}$; (б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -13 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.

D.10. Записать матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ к базису $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$. Задана матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Найти матрицу A' оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{2'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

D.11. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного своей матрицей в некотором базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

(а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

D.11. В пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}$ квадратных матриц размера 2×2 задан линейный оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$, действующий по формуле
$\boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X \in \mathbb{R}^{2\times2}$. Запишите матрицу оператора $\boldsymbol{A}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$.

D.12. (а) Найти все инвариантные подпространства линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to V$ проектирования на подпространство $P \subset V$ вдоль подпространства $Q \subset V$.

(а) Найти все инвариантные подпространства линейного оператора транспонирования $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, действующего в пространстве квадратных матриц размером $n\times n$: $\boldsymbol{A}(X) = X^T$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

D.13. В пространстве V многочленов $\boldsymbol{x}(t)$ степени ≤ 2 задана билинейная форма $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Составить матрицу этой билинейной формы в стандартном базисе пространства V.

D.14. Записать матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ к базису $(\boldsymbol{e}_{1'},\boldsymbol{e}_{2'})$. Задана матрица B билинейной формы $\boldsymbol{B} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$. Найти матрицу B' билинейной формы $\boldsymbol{B}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_{1'},\boldsymbol{e}_{2'})$.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{2'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

D.15. Привести заданную симметричную билинейную (квадратичную) форму к диагональному виду методом Лагранжа:

(а) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x^1y^1 + 4x^2y^2 + 9x^3y^3 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 - 3x^1y^3 - 3x^3y^1 - 6x^2y^3 - 6x^3y^2$;

(б) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x^1y^1 + 5x^2y^2 + 10x^3y^3 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 - 3x^1y^3 - 3x^3y^1 - 5x^2y^3 - 5x^3y^2$.

D.16. Привести заданную симметричную билинейную (квадратичную) форму к диагональному виду методом ортогонального преобразования.

(а) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + x^1y^2 + x^2y^1 + x^1y^3 + x^3y^1 + x^2y^3 + x^3y^2$;

(б) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2x^1y^1 + 2x^2y^2 + 2x^3y^3 - x^1y^2 - x^2y^1 - x^1y^3 - x^3y^1 - x^2y^3 - x^3y^2$.

D.17. Применить к заданной системе векторов процесс ортогонализации

Грама Шмидта.

(а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$;

(б) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D.18. Для заданной матрицы A найти e^{tA} (не матрицы A, а матрицы tA).
(а) $\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 11 & -30 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$; (г) $\begin{pmatrix} 11 & 20 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$.

D.19. Построить ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов заданного самосопряженного оператора.
(а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

D.20. В пространстве V многочленов $\boldsymbol{x}(t)$ с вещественными коэффициентами степени ≤ 3 скалярное произведение задано формулой $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_0^1 \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}(t)dt$. Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{g}(t)$ вектора $\boldsymbol{x}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ на подпространство многочленов степени ≤ 1 и расстояние от этого вектора до его ортогональной проекции.

D.21. Привести две заданные квадратичные формы к диагональному виду одновременным преобразованием.
(а) $Q_1(\boldsymbol{x}) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 + 3(x^2)^2$, $Q_2(\boldsymbol{x}) = 4(x^1)^2 + 16x^1x^2 + 6(x^2)^2$.
(б) $Q_1(\boldsymbol{x}) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2$, $Q_2(\boldsymbol{x}) = 17(x^1)^2 + 8x^1x^2 + (x^2)^2$.