МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**В.Т. Волков, Д.В. Минаев,
И.Е. Могилевский, В.Ю. Попов, Н.Е. Шапкина**

Теория функций комплексной переменной с примерами и задачами

Пособие по математике для студентов физических, физико-математических и инженерных специальностей

Москва 2024

Волков В. Т., Минаев Д. В.,
Могилевский И. Е., Попов В. Ю.,
Шапкина Н. Е.,
Теория функций комплексной переменной с примерами и задачами. Пособие по математике для студентов физических, физико-математических и инженерных специальностей

Учебное пособие «Теория функций комплексной переменной с примерами и задачами» написано на основе многолетнего опыта чтения авторами лекций и проведения семинарских занятий по данному курсу на физическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова.

Пособие состоит из 19 разделов, соответствующих темам читаемого курса. По каждой теме приведено подробное изложение теоретического материала с доказательствами основных теорем, сопровождаемое примерами с решениями и упражнениями для самостоятельной работы. При этом нам представляется методически важным демонстрация подходов и основных математических идей на примере решения задач.

Подбор задач имеет целью помочь студентам в освоении теоретического материала, расширить понимание ими основных разделов читаемого курса и методов, используемых при доказательстве теорем. Для лучшего освоения материала каждый разобранный пример сопровождается аналогичной задачей, которая может быть использована как для самостоятельного решения, так и для разбора на занятии. В конце каждого раздела приводится список задач для самостоятельного решения, а также вопросов и теоретических задач, разъясняющих и углубляющих некоторые аспекты читаемого курса и включенных в экзаменационные билеты.

Предлагаемое учебное пособие соответствует читаемому в настоящее время на физическом факультете МГУ курсу лекций «Теория функций комплексной переменной». Для понимания материала не требуется специальной математической подготовки, кроме знания основ математического анализа. Пособие «Теория функций комплексной переменной» рассчитано на широкий круг студентов и преподавателей физических, физико-математических и инженерных специальностей. Оно имеет целью помочь студентам в их самостоятельной работе, а преподавателям – при чтении лекций, проведении практических занятий и подготовке экзаменационных материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

Определение 1.1 ***Комплексным числом*** *называется упорядоченная пара действительных чисел* $z = (a; b)$. *Первое число* $a = \operatorname{Re} z$ *называется действительной частью комплексного числа, второе число* $b = \operatorname{Im} z$ *называется мнимой частью комплексного числа.*

1.1. Основные операции над комплексными числами. Два комплексных числа $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2.$$

Суммой двух комплексных чисел $\boldsymbol{z_1 = (a_1; b_1)}$ **и** $\boldsymbol{z_2 = (a_2; b_2)}$ называется число

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2).$$

Произведением двух комплексных чисел называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Действительные числа являются частью множества комплексных чисел и имеют вид $a = (a; 0)$.

Произведение действительного числа a и комплексного $(b; c)$ есть $a \cdot (b; c) = (ab; ac)$.

Пример 1.1. *Умножить число* $(0; 1)$ *само на себя.*
Решение.

$$(0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1; 0) = -1.$$

Таким образом, квадрат комплексного числа $(0; 1)$ равен -1. Такое число, очевидно, не являющееся действительным, называется **мнимой единицей** и обозначается буквой i.
Задача 1.2. *Умножьте число* $(1; 0)$ *само на себя.*

Любое комплексное число $z = (a; b)$ в соответствии с приведенными определениями можно представить как

$$(a, b) = (a; 0) + (0; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1) = a + ib.$$

Это **алгебраическая форма комплексного числа**.

Операция **вычитания** определяется, опираясь на уже введенные операции сложения и умножения на число:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1) \cdot z_2 = (a_1 - a_2; b_1 - b_2).$$

Легко видеть, что операции сложения (вычитания) и умножения комплексных чисел могут быть произведены в алгебраической форме по обычным правилам работы со скобками.

Сложение:

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = (a_1; b_1) + (a_2; b_2) \equiv (a_1 + a_2; b_1 + b_2) \quad \Longleftrightarrow \\ &z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\,; \end{aligned}$$

умножение:

$$\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 = (a_1; b_1) \cdot (a_2; b_2) \equiv (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + b_1a_2) \quad \Longleftrightarrow \\ &z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2 \cdot b_1b_2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) = (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + b_1a_2)\,. \end{aligned}$$

Комплексно сопряженным числом к $z = a + ib$ называют комплексное число

$$\overline{z} = a - ib.$$

Пример 1.3. *Доказать, что* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
Доказательство.

$$\begin{aligned} &\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = \\ &(a_1 + a_2) - i\ (b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Задача 1.4. *Докажите, что* $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

Модулем комплексного числа $z = a + ib$ называют действительное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, т.е. $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Пример 1.5. *Доказать, что* $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
Доказательство.

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + i(-i)b^2 + iba - aib = a^2 + b^2\,.$$

Операцию **деления комплексных чисел** определим как обратную к операции умножения: число $z = (a; b)$ называется **частным** от деления $z_1 = (a_1; b_1)$ на $z_2 = (a_2; b_2)$, если $z \cdot z_2 = z_1$.

Частное двух чисел можно получить, используя умножение на комплексно сопряженное к знаменателю число, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Действительно,

$$\frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} \cdot z_2 = \frac{z_1 \cdot (\overline{z}_2 \cdot z_2)}{|z_2|^2} = z_1$$

так как $z_2 \cdot \overline{z}_2 = |z_2|^2$.

Задача 1.6. *Докажите, что* а) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, б) $\overline{(\overline{z})} = z$.

Задача 1.7. *Найдите* а) $\overline{(z \cdot z)}$; б) $\overline{(z \cdot \overline{z})}$.
Ответ: а) $a^2 - b^2 - 2abi$; б) $a^2 + b^2$.
<u>Важно помнить:</u> $z \cdot \overline{z} = (a + bi)\,(a - bi) = a^2 + b^2$,

$$\mathrm{Re}\ z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\ z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Пример 1.8. *Вычислить* $(2 - i)\,(1 + 3i)$, *представив результат в алгебраической форме.*
Решение.

$$(2 - i)(1 + 3i) = 2 \cdot 1 - i \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot i - 3 \cdot i \cdot i = 5 + 5i.$$

Задача 1.9. *Найдите* $(2 + \ i)\,(1 - 3i)$.
Ответ: $5 - 5i$.

Пример 1.10. *Вычислить* $\dfrac{2 - i}{1 + 3i}$, *представив результат в алгебраической форме.*
Решение.

$$\frac{2 - i}{1 + 3i} = \frac{(2 - i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{-1 - 7i}{1 + 9} = -0,1 - 0,7i.$$

Задача 1.11. *Представьте* $\dfrac{2 + i}{1 - 3i}$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: $-0,1 + 0,7i$.

Задача 1.12. *Представьте* $\dfrac{1}{i}$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: $-i$.
<u>*Полезно помнить:*</u> $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \ \ i^4 = 1$.
В общем случае

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k, \\ i, & n = 4k + 1, \\ -1, & n = 4k + 2, \\ -i, & n = 4k + 3, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 1.13. *Представить* а) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{13}+1}\right)^2$, б) $(2+i)^4$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Решение.

$$\text{а)}\ \left(\frac{i^5+2}{i^{13}+1}\right)^2 = \left(\frac{i+2}{i+1}\right)^2 = \left(\frac{(i+2)(-i+1)}{(i+1)(-i+1)}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{2}\right)^2 = \frac{4-3i}{2};$$

$$\text{б)}\ (2+i)^4 = (3+4i)^2 = 24i-7.$$

Задача 1.14. *Представьте* а) $\dfrac{1+i^8}{i-3i^7}$, б) $\left(i^{15}-1\right)\left(i^3+2\right)$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: а) $-0,5i$; б) $-3-i$.

Задача 1.15. *Представьте* а) $\dfrac{1+i^{10}}{32}$; б) $\dfrac{(1+i)^{10}}{32}$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: а) 0 б) i.

1.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Будем рассматривать комплексное число $z=(x;y)$ как точку на плоскости с координатами $(x;y)$. Назовем эту плоскость **комплексной плоскостью**, $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$ (рис. 1).

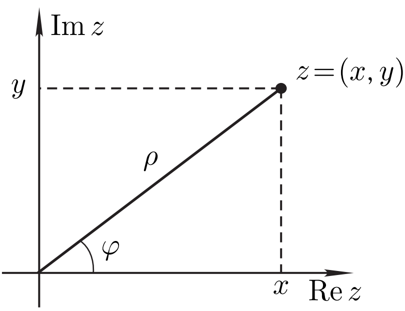


Рис. 1.

Таким образом, между комплексными числами и точками на комплексной плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие. Также можно ставить в соответствие комплексным числам не точки на комплексной плоскости, а векторы, идущие из начала координат в точку $z=(x;y)$.

Расстояние от начала координат до точки $z=(x,y)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ есть **модуль комплексного числа**. Модуль равен длине вектора, исходящего из начала координат, с концом в точке $(x;y)$.

Угол, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки, называется **аргументом комплексного числа ($\operatorname{Arg} z$)**. Отметим, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до аддитивного слагаемого: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $\varphi=\arg z\in[0;2\pi)$.

Некоторые простейшие множества точек на комплексной плоскости.
а) $|z - z_0| = a$ $(a > 0)$ — окружность с центром в точке z_0 радиуса a;
б) $|z - z_0| < a$ $(a > 0)$ — открытый круг с центром в точке z_0 радиуса a;
в) $|z - z_0| > a$ $(a > 0)$ — область вне круга с центром в точке z_0 радиуса a;
г) $a < |z - z_0| < b$ $(0 < a < b)$ — открытое кольцо с центром в точке z_0;
д) $\arg(z - z_0) = \varphi$ — луч, с началом в точке z_0, идущий под углом φ к положительному направлению действительной оси;
е) $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ — внутренность сектора с вершиной в точке z_0 и углом $\beta - \alpha$;
ж) $\mathrm{Re}\ z = a$ — прямая, параллельная мнимой оси, проходящая через точку $(a; 0)$;
з) $\mathrm{Im}\ z = b$ — прямая, параллельная действительной оси, проходящая через точку $(0; b)$.

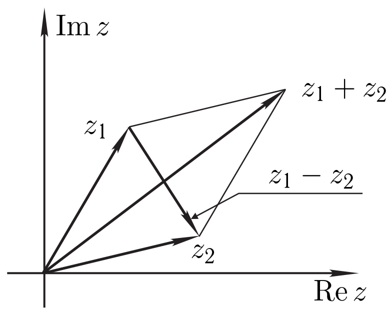


Рис. 2.

Сложение двух комплексных чисел можно рассматривать как **сложение двух векторов** на плоскости, аналогично с вычитанием (рис. 2). При этом справедливы **неравенства треугольника**

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\,; \;\; |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||\,,$$

где $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

Пример 1.16. *Изобразить на комплексной плоскости*
а) $|z - i| < 2$; *б)* $|z + 1 + i| > \sqrt{2}$; *в)* $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg(z + i) \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$.
Ответ: рис. 3.

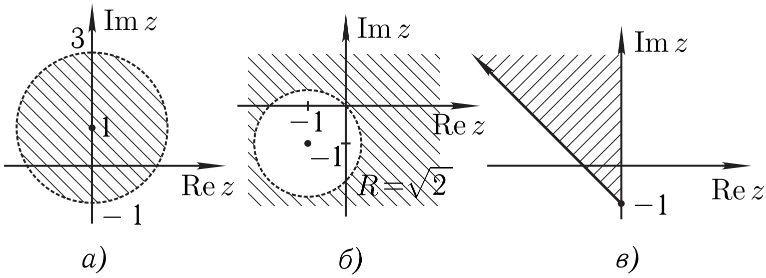


Рис. 3.

Задача 1.17. *Изобразите на комплексной плоскости*
а) $|z-i-1| \leqslant 2$*;* *б)* $\frac{\pi}{2} < \arg(z-1) < \frac{3\pi}{2}$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Представьте комплексное число в алгебраической форме:
   а) $\frac{1+i}{1-i}$; б) $\frac{1}{i}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{1-i}$;
   д) $(3-2i)\,(4+i)$; е) $(3-2i)\,\overline{(4+i)}$;
   ж) $\frac{(3+2i)(4+i)}{2+2i}$; з) $\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^3$.
2. Пусть $z = a+bi$. Найдите а) $\frac{z}{\overline{z}}$; б) $z\,|z|$; в) $z+\overline{z}$;
   г) $(z+\overline{z})\,(z-\overline{z})$.
3. Для каждого комплексного числа z из пункта 1 найдите $|z|$ и $\arg z$.
4. Изобразите на комплексной плоскости множества точек, задаваемые уравнениями и неравенствами:
   а) $\operatorname{Im} z > 0$; б) $\operatorname{Im} iz > 2$; в) $\pi \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2\pi$;
   г) $\pi < \operatorname{Re} z < 2\pi$ д) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$;
   е) $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z+i) \leqslant \frac{3\pi}{4}$; ж) $|z-i| < 3$;
   з) $|z+1+i| > \sqrt{2}$; и) $1 < |z-1+2i| < 3$;
   к) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; л) $|z| > \operatorname{Re} z + 1$;
   м) $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$; н) $\overline{z} = z^2$; о) $3\,|z| - \operatorname{Re} z = 12$;
   п) $|z-i| + |z+i| = 4$; р) $|z-i| - |z+i| = 2$;
   с) $|z-1+i| = |z+3|$; т) $|z-2| + |z+2| > 3$;
   у) $|z-i| + |z+i| < 5$; ф) $|z+i| > |z-1|$.

1.4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Если ввести полярную систему координат

$(\rho;\varphi)$, то $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. При этом

$$\rho=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}=|z|=\left((\mathrm{Re}\ z)^2+(\mathrm{Im}\ z)^2\right)^{1/2},$$

а $\varphi=\arg z$ — аргумент комплексного числа (рис. 1).
Важно помнить: для комплексного числа 0=(0;0) модуль равен 0, а аргумент не определен.

Представление комплексного числа в виде

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

Определим e^{ix}, где x — любое действительное число, как

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

Это соотношение называют **формулой Эйлера.**

Тогда $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, и мы получаем $z=\rho e^{i\varphi}$ — комплексное число **в показательной (экспоненциальной) форме**.

Теорема 1.1 *Пусть φ, $\psi\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$.
Тогда
1) $e^{i\cdot 0}=1$; 2) $e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi}=e^{i(\varphi+\psi)}$; 3) $e^{i(\varphi+2\pi k)}=e^{i\varphi}$;
4) $e^{-i\varphi}=\dfrac{1}{e^{i\varphi}}$; 5) $\left|e^{i\varphi}\right|=1$.*

Доказательство. 1) $e^{i\cdot 0}=\cos(0)+i\sin(0)=1$. Остальные утверждения теоремы доказываются с помощью формулы Эйлера аналогично.

Пример 1.18. *Представить комплексное число в показательной форме:*
а) $z=1$: $|1|=1$, $\arg 1=0$; $1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)=1\cdot e^{i\cdot 0}$;
б) $z=i$: $|i|=1$, $\arg i=\dfrac{\pi}{2}$; $i=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$;
в) $z=-e^{i\varphi}$: $-e^{i\varphi}=(-1)\cdot e^{i\varphi}=1\cdot e^{i\pi}\cdot e^{i\varphi}=1\cdot e^{i(\pi+\varphi)}$, следовательно, $\left|-e^{i\varphi}\right|=1$, $\arg\left(-e^{i\varphi}\right)=\pi+\varphi$.

Задача 1.19. *Представьте комплексное число в показательной форме:*
а) $z=e^{i\varphi}$; б) $z=-1$; в) $z=-i$.
Ответ: а) $1\cdot e^{i\varphi}$; б) $1\cdot e^{i\pi}$; в) $1\cdot e^{\frac{3\pi i}{2}}$.

Полезно помнить: $e^{i\cdot 0}=1$; $e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}=i$; $e^{i\cdot\pi}=-1$; $e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}=e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}=-i$.

Пример 1.20. *Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах*

а) $-2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

б) $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Задача 1.21. *Представьте комплексное число в показательной форме:*

а) -5; *б)* $z=-1-\sqrt{3}\,i$; *в)* $z=1+i$.

Ответ: а) $5e^{i\pi}$; б) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$; в) $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

При **умножении двух комплексных чисел** их **модули перемножаются,** а **аргументы складываются**:

если $z_1 = a_1 + ib_1 = \rho_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = a_2 + ib_2 = \rho_2 e^{i\beta}$,

то $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i\alpha + i\beta}$, $|z_1 \cdot z_2| = \rho_1 \cdot \rho_2$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \alpha + \beta$.

При **делении двух комплексных чисел** их **модули делятся** (модуль знаменателя не равен нулю), а **аргументы вычитаются**: $z_1 = a_1 + ib_1 = \rho_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = a_2 + ib_2 = \rho_2 e^{i\beta}$, то $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\alpha - i\beta}$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\arg\frac{z_1}{z_2} = \alpha - \beta$.

Полезно помнить: алгебраической формой записи комплексных чисел удобно пользоваться при операциях сложения и вычитания, а показательной — при умножении, делении, возведении в целую степень, извлечении целого корня (возведение в рациональную степень).

1.5. Возведение в целую степень.

С помощью формулы Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \left(e^{i\varphi}\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

мы получаем

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n \left(e^{i\varphi}\right)^n = \\ = \rho^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Пример 1.22. *Представить число* $(1+i)^3$ *в алгебраической форме.*

Решение.

$$(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} e^{3i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -2+2i.$$

Задача 1.23. *Представьте число* $\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{13}$ *в показательной форме.*
Ответ: $2^{13}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Пример 1.24. *Представить число* $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}$ *в алгебраической форме.*
Решение.

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}=\left(\frac{2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{40}=\frac{2^{40}\cdot e^{-i\frac{40\pi}{3}}}{2^{20}\cdot e^{i\frac{40\pi}{4}}}=\frac{2^{40}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{2^{20}}=2^{20}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}=$$
$$=2^{20}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2^{20}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 1.25. *Представьте число* $\left(\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{20}$ *в алгебраической форме.*
Ответ: $2^{-11}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

Извлечение корня n-ной степени.

Определение 1.2 *Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое число w, что $w^n=z$.*

При извлечении корня представим число в виде $z=|z|e^{i\operatorname{Arg}z}=|z|e^{i(\arg z+2\pi k)}$, $k\in\mathbb{Z}$, тогда будут найдены **все** значения корня:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|e^{i(\arg z+2\pi k)}}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{\frac{i(\arg z+2\pi k)}{n}}=$$
$$=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,1,\ldots,n-1$.

Таким образом корень n-той степени из комплексного числа имеет n различных значений (легко проверить, что значение корня при $k=n$ совпадет с значением при $k=0$, значение корня при $k=n+1$ совпадет с значением при $k=1$ и т.д.). Модули этих комплексных чисел одинаковы и равны $\sqrt[n]{|z|}$, а аргументы различаются на число, кратное $\dfrac{2\pi}{n}$. Точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-ой степени, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке $z=0$.

Пример 1.26. *Представить комплексное число* $\sqrt[3]{-27}$ *в алгебраической и тригонометрической формах.*
Решение.

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27e^{i\pi+2\pi ki}} = 3e^{\frac{i\pi+2\pi ki}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right).$$

При $k=0$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

при $k=1$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}\right) = 3\,(-1 + i\cdot 0)\,;$$

при $k=2$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 1.27. *Представьте* $\sqrt[4]{1}$ *в алгебраической форме.*
Ответ: $z_1 = 1$; $z_2 = i$; $z_3 = -1$; $z_4 = -i$.

Пример 1.28. *Решить уравнение* $z^4 + 4 = 0$, *представить решение в тригонометрической форме.*
Решение.

$$z^4 + 4 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad z^4 = -4 \quad\Longleftrightarrow\quad z = \sqrt[4]{-4}\,;$$

$$z = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)\right),$$

$k = 0; 1; 2; 3.$

Задача 1.29. *Решите уравнение* $z^3 + i = 0$, *представьте решение в показательной форме.*

Ответ: $e^{\frac{\frac{3\pi}{2}i+2\pi ki}{3}}$, $\quad k = 0; 1; 2.$

1.6. Задачи для самостоятельного решения.

1. Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

   а) $\dfrac{1+i}{1-i}$; б) $\dfrac{1}{i}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$; д) $(1+i)^{20}$;

   е) $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$; ж) $(1-i)^{20}$; з) $(1+i)^{10}$.

2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа, представьте его в показательной форме:

   а) i^3; б) i^4; в) $(1-i)^{10}$; г) $(1+i)^{20}$.

3. Вычислите (для комплексных чисел результат представьте в алгебраической и показательной формах):

   а) $z-\dfrac{1}{\overline{z}}$, если $z=i-1$; б) $z-\dfrac{1}{\overline{z}}$, если $z=i+1$;

   в) $\dfrac{z}{\overline{z}}$, если $z=3i+1$; г) $\left|(1+3i)\,\overline{(3+i)}\right|$;

   д) $\left|\dfrac{3+i}{1-3i}\right|$; е) $\left|\left(\dfrac{2+4i}{3+i}\right)^3\right|$; ж) $\left|(1+i)^6\right|$;

   з) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{3-i}{2+i}\right)^{13}$; и) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2-i}{3+i}\right)^{11}$.

4. Найдите значение выражения $z=z_1z_2$, если x — действительное число:

   а) $z_1=x+3i$, $z_2=1+2i$ и $\mathrm{Re}\,z=-4$;
   б) $z_1=x+5i$, $z_2=2-i$ и $\mathrm{Re}\,z=9$;
   в) $z_1=x+3i$, $z_2=1+2i$ и $\mathrm{Im}\,z=7$;
   г) $z_1=1+ix$, $z_2=2x+i$ и $\mathrm{Im}\,z=1$;
   д) $z_1=2-i$, $z_2=5+ix$ и $\mathrm{Re}\,z=5$.

5. Найдите все решения уравнения. Результат представьте в показательной, алгебраической и тригонометрической формах.

   а) $z^3-8=0$; б) $z^4-1=0$; в) $z^4+1=0$;
   г) $z^2+z+1=0$; д) $z^2-4z+13=0$; е) $|z|=z^2$.

1.7. Последовательности комплексных чисел.

Определение 1.3 ***Последовательностью комплексных чисел*** *$\{z_n\}$ называют упорядоченное счетное множество комплексных чисел.*

Члены последовательности (ее элементы) располагаются в порядке возрастания их номеров.

Определение 1.4 *Говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к комплексному числу z , если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n\geqslant N$ выполняется соотношение $|z_n-z|<\varepsilon$. Это число называется* ***пределом последовательности*** *$\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.*

Пример 1.30. *а) Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{i}{n}=0$.

Решение. По определению предел равен нулю, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N$ выполняется неравентво $\left|\frac{i}{n}\right| < \varepsilon$. Найдем N.

$$\left|\frac{i}{n}\right| = \frac{|i|}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

б) Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \arg\frac{(-1)^n}{n}$, *если он существует.*

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \arg\frac{(-1)^n}{n}$, не существует, так как $\arg\frac{(-1)^n}{n} = 0$ при четных n, и $\arg\frac{(-1)^n}{n} = \pi$ при нечетных n.

Задача 1.31. *Найдите а)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{in}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(i)^n$.

Ответ: а) 0; б) не существует.

Каждый член последовательности $\{z_n\}$ имеет вид $z_n = a_n + ib_n$, то есть одновременно заданы две действительные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, причем $z_n = a_n + ib_n$.

Теорема 1.2 *Последовательность $\{z_n\}$ сходится к $z = a + ib$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\}$ сходится к a, а $\{b_n\}$ сходится к b.*

Доказательство.

Необходимость. Последовательность $\{z_n\}$ сходится, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - z| < \varepsilon$. Тогда для $\forall n \geqslant N$ верно $|a_n - a| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon$, $|b_n - b| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon$, следовательно, $a_n \to a$, $b_n \to b$.

Достаточность. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то есть $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $\forall n \geqslant N_1$ и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $\forall n \geqslant N_2$, следовательно, $\exists N = \max(N_1, N_2)$: $|z_n - z| < |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$ для $\forall n \geqslant N$.

Определение 1.5 *Последовательность $\{z_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число A, что для любого номера n выполняется неравенство $|z_n| < A$.*

Теорема 1.3 *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Последовательность сходится, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon)$: для $\forall n \geqslant N\ \ |z_n - z| < \varepsilon$, следовательно, все члены последовательности, начиная с некоторого номера N, находятся внутри круга радиуса ε с центром в точке z. Тогда все члены последовательности находятся внутри круга с центром в точке 0, включающего круг радиуса ε и все члены последовательности $x_1, \ldots x_N$. В силу конечности ε и N такой круг, очевидно, существует.

Теорема 1.4 *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{z_n\}$ ограничена, то соответствующие ей действительные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ также ограничены. Следовательно, $|a_n| \leqslant \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n + ib_n| = |z_n| < A$ для любого n, аналогично для $\{b_n\}$.

Так как $|a_n| < A$, то по теореме Больцано–Вейерштрасса для последовательностей действительных чисел существует $\{a_{nk}\} \to a$: $|a| \leqslant A$. Последовательности $\{a_{nk}\}$ соответствует $\{b_{nk}\}$, причем так как $|b_{nk}| \leqslant A$, существует $\{b_{nkl}\} \to b$, причем $\{a_{nkl}\} \to a$ откуда по теореме 1.2 $\{z_{nkl}\} \to z = a + ib : |z| \leqslant A$.

Теорема 1.5 *(критерий Коши) Необходимым и достаточным условием сходимости $\{z_n\} \to z$ является требование, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n \geqslant N$ и $\forall m > 0$, m, $n \in \mathbb{Z}$ $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$.*

Доказательство. Основано на теореме 1.2 и критерии Коши для последовательности действительных чисел.

<u>Необходимость.</u> Последовательность $\{z_n\}$ $(z_n = a_n + ib_n)$ сходится, поэтому по теореме 1.2 сходятся и последовательности действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1(\varepsilon)$: для $\forall n \geqslant N_1(\varepsilon)$ и $\forall m > 0$ $|a_{n+m} - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\exists N_2(\varepsilon)$: для $\forall n \geqslant N_2(\varepsilon)$ и $\forall m > 0$ $|b_{n+m} - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|z_{n+m} - z_n| = = |(a_{n+m} - a_n) + i(b_{n+m} - b_n)| \leqslant |a_{n+m} - a_n| + |b_{n+m} - b_n| < \varepsilon$ для $\forall n > N(\varepsilon)$, где $N = \max(N_1, N_2)$:.

<u>Достаточность.</u> Из того, что $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ для $\forall n \geqslant N$ и $\forall m > 0$ следует, что $|a_{n+m} - a_n| \leqslant |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$, $|b_{n+m} - b_n| \leqslant \leqslant |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$, из чего вытекает сходимость числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, а, значит, и последовательности $\{z_n\}$.

Теорема 1.6 *Если последовательности комплексных чисел $\{z_n\} \to z$, $\{w_n\} \to w$ $(z, w \in C)$, то $\{z_n \pm w_n\} \to z \pm w$, $\{z_n \cdot w_n\} \to z \cdot w$, $\left\{\dfrac{z_n}{w_n}\right\} \to \dfrac{z}{w}$, если $w \neq 0$.* Доказательство теоремы опирается на аналогичные теоремы для последовательностей действительных чисел.

Пример 1.32. *Доказать, что последовательность*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = 1, \quad \text{где} \quad z_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство.

$$\left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n-1\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{z_n^k}{n^k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{|z_n|^k}{n^k}=\left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)^n-1=$$
$$=e^{n\ln\left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)}-1=e^{|z_n|+o(1)}-1\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Задача 1.33. *Докажите, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^z$.

Неограниченно возрастающие последовательности.

Определение 1.6 *Если для* $\forall A>0\ \exists N(A)$: $|z_n|>A$ *для* $\forall n>N(A)$, *то последовательность* $\{z_n\}$ *называется* ***неограниченно возрастающей***.

Пример: а) $\{z_n\}=z^n$ при $|z|>1$; б) $\{z_n\}=n\cdot i^n$ — неограниченно возрастающие последовательности.

Такие последовательности не являются сходящимися в обычном смысле, но оказывается удобным считать, что существует точка $z=\infty$, и что всякая неограниченно возрастающая последовательность сходится к **бесконечно удаленной точке** $z=\infty$ комплексной плоскости.

Определение 1.7 *Комплексная плоскость C, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется* ***расширенной комплексной плоскостью***.

Определение 1.8 ***Окрестностью бесконечно удаленной точки*** *называется область* $\{z:|z|>R\}$ — *множество точек вне круга достаточно большого радиуса R с центром в начале координат.*

Если $\{z_n\}$ неограниченно возрастающая, то $\xi_n=\dfrac{1}{z_n}\to 0$. Отсюда нетрудно получить правила арифметических действий с бесконечно удаленной точкой $z=\infty$: $\dfrac{1}{\infty}=0$; $\dfrac{1}{0}=\infty$; $z\cdot\infty=\infty$ $(z\neq 0)$; $z+\infty=\infty$; $\dfrac{z}{\infty}=0$, $z\neq\infty$. Операции $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ являются неопределенными.

1.8. Задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|\neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\ \neq 0$.
2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)\right)=\ln r\ +i\varphi+2\pi ki$, $k=0,1,2,\ldots$, $z=re^{i\varphi}$.

3. Докажите, что последовательность $\{\arg z_n\}$ может расходиться, если последовательность $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$.

§ 2. Функции комплексной переменной

Пусть на комплексной плоскости задано множество точек g, и каждому числу $z \in g$ по определенному закону ставится в соответствие одно комплексное число w: $z \to w$. Тогда говорят, что в области g задана **однозначная функция комплексной переменной** $w = f(z)$. При этом g называют **областью определения** функции $f(z)$, а множество точек $w = f(z)$ — **множеством значений** функции, которое обозначим D. Функция $f(z)$ осуществляет отображение $g \to D$.

В теории функций комплексной переменной также рассматриваются неоднозначные (**многозначные функции**), когда комплексному числу z ставится в соответствие несколько различных комплексных чисел.

Структура множеств g и D может быть весьма разнообразной. Мы будем рассматривать случаи, когда g и D — области на комплексной плоскости.

<u>Примеры однозначных функций:</u>

$$\text{а)}\ \ w = az + b; \quad \text{б)}\ \ w = z^n, \quad \text{в)}\ \ w = \frac{1}{z}.$$

<u>Пример многозначной функции</u>: $\quad w = \sqrt[n]{z}$.

Определение 2.1 ***Областью*** *g комплексной плоскости Z называется множество точек этой плоскости, удовлетворяющее условиям:*

1. *все точки $z \in g$ являются внутренними точками g;*
2. *любые точки z_1, $z_2 \in g$ можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, состоящих только из точек $z \in g$.*

В определении области условие 1 означает, что g — открытое множество, а условие 2, что g — связное множество.

Итак, область — открытое связное множество.

<u>Пример:</u> а) $|z| < 1$ — область; б) $|z| \leqslant 1$ — не область; в) $\{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z - 5i| < 1\}$ — не область.

Определение 2.2 *Точка z_0 называется* ***внутренней точкой*** *множества g, если существует ε-окрестность точки $z_0 : |z - z_0| < \varepsilon$, <u>все</u> точки которой принадлежат g.*

Пример: а) $z = 0$ — внутренняя точка множества $|z| < 1$; б) $z = i$ — не является внутренней точкой множества $|z| \leqslant 1$.

Определение 2.3 *Точка z_0 называется* ***граничной точкой*** *области g, если в любой ее ε-окрестности имеются как точки, принадлежащие g, так и не принадлежащие g.*

Пример: а) $z = 0$ — граничная точка множества $|z| > 0$; б) $z = i$ — граничная точка как множества $|z| \leqslant 1$, так и множества $|z| < 1$.

Определение 2.4 *Совокупность граничных точек области g называется* ***границей*** *∂g области g.*

Граница множества может состоять из конечного числа точек и даже из одной точки (как, например, у множества $|z| > 0$).

Определение 2.5 *Замыкание области g состоит в присоединении к g ее границы ∂g. Полученное множество называется* ***замкнутой областью***: $\overline{g} = g + \partial g$.

Пример: Множество $|z| \leqslant 1$ — замкнутое.

Рассмотрим случай, когда функция $w = f(z)$ задана в области g комплексной плоскости z и отображает ее на область D комплексной плоскости w, и это отображение однозначно.

Определение 2.6 *Пусть для любых точек z_1, $z_2 \in g$, $z_1 \neq z_2$ имеет место $f(z_1) = w_1 \neq w_2 = f(z_2)$, то есть различным точкам области g соответствуют различные значения функции $w = f(z)$. Тогда функция $w = f(z)$ называется* ***однолистной*** *в области g, а область g —* ***областью однолистности*** *функции $f(z)$.*

Таким образом, отображение $g \longleftrightarrow D$, осуществляемое однолистной функцией, является взаимно однозначным. На рис. 4 приведены варианты отображений.

Нетрудно показать, что, например:

а) $w = const$ — однозначная, не однолистная;

б) $w = az + b$ — однозначная и однолистная (единственное отображение, сохраняющее подобие всех фигур);

в) $w = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ — однозначная, но не однолистная.

Проиллюстрируем еще раз понятия неоднолистности и неоднозначности функции комплексной переменной на примерах $w = \sqrt{z}$ и $w = z^2$.

Функция $w = \sqrt{z}$ — двузначная. Действительно, каждому $z = \rho e^{i\varphi}$ соответствуют два значения корня $w_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i\dfrac{\varphi}{2}}$; $w_2 = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi}$, причем изменение аргумента w от значения $\dfrac{\varphi}{2}$ до $\dfrac{\varphi}{2} + \pi$, то есть переход от точки w_1 к точке w_2 (кривая 1a на

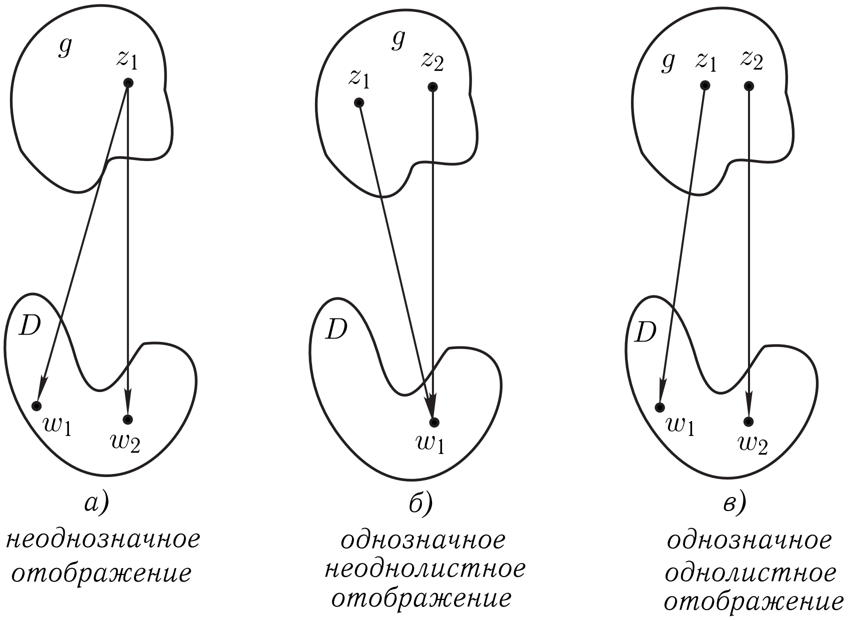


Рис. 4.

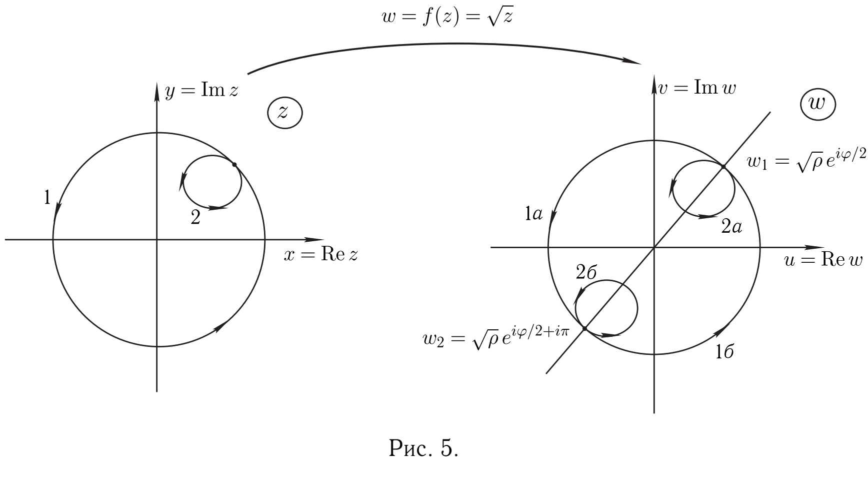


Рис. 5.

рис. 5), или от w_2 к w_1 (кривая 1б на рис. 5) на плоскости w, происходит если точка z совершает обход замкнутого контура, содержащего внутри точку $z = 0$ (кривая 1 на рис. 5). Если же точка z движется по контуру 2, не содержащему внутри точку $z = 0$, то перехода от w_2 к w_1 не происходит: аргумент w меняется непрерывно и при полном обходе замкнутого контура 2 возвращается к исходному значению $\dfrac{\varphi}{2}$ или $\dfrac{\varphi}{2}+\pi$. Точка w при этом описывает замкнутый контур 2а или 2б в зависимости от выбранного начального значения аргумента $\dfrac{\varphi}{2}$ или $\dfrac{\varphi}{2}+\pi$.

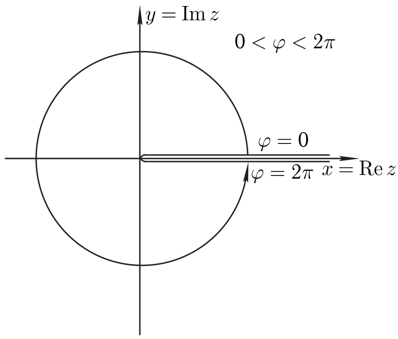


Рис. 6.

Таким образом, если запретить обход точки $z = 0$ на плоскости z, то можно выделить 2 **однозначные ветви** двузначной функции $w = f(z) = \sqrt{z}$. Этого можно добиться, устроив на плоскости z **разрез**, например, по положительной части действительной оси, и считая, что на **верхнем берегу разреза** $\varphi = 0$, а на **нижнем берегу разреза** $\varphi = 2\pi$ (см. рис.6)). Зафиксировав таким образом аргумент z в пределах $0 < \varphi < 2\pi$, мы получим однозначную функцию — одну из ветвей функции $w = f(z) = \sqrt{z}$, для которой $0 < \arg w < \pi$.

Функция $f(z) = z^2$, рассматриваемая на всей комплексной плоскости z, не является однолистной. Действительно, для двух различных точек плоскости $z_1 = \rho e^{i\varphi}$ и $z_2 = -z_1 = \rho e^{i\varphi + i\pi}$ получаем $w_1 = z_1^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$ и $w_2 = z_2^2 = \rho^2 e^{2i\varphi + 2i\pi} = w_1$, то есть точки $z_1 \neq z_2$ отображаются функцией $w = z^2$ в одну и ту же точку плоскости w (см. рис. 7).

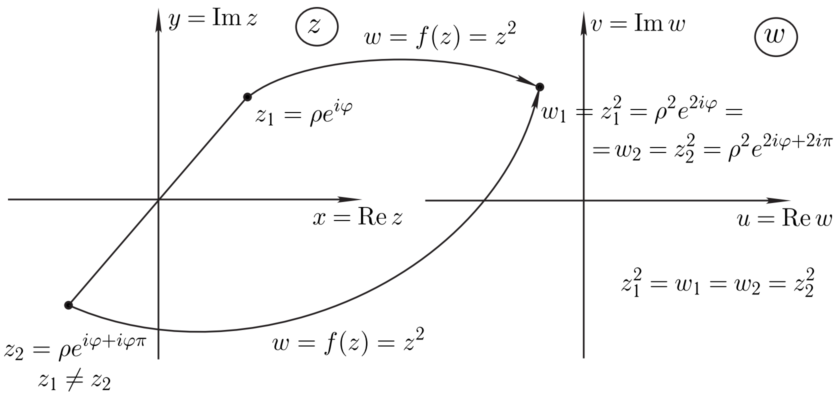


Рис. 7.

Построим следующую модель. Возьмем два экземпляра (листа) плоскости w с разрезами по положительной части действительной оси, а именно плоскость w_1, где $0 < \arg w < 2\pi$, и плоскость w_2, где $2\pi < \arg w < 4\pi$, и будем считать, что точки верхней полуплоскости z (с аргументами $0 < \arg z < \pi$) отображаются в точки плоскости w_1 ($0 < \arg w = \arg z^2 < 2\pi$), а точки нижней полуплоскости z (с аргументами $\pi < \arg z < 2\pi$) отображаются в точки плоскости w_2 ($2\pi < \arg w = \arg z^2 < 4\pi$) (см. рис. 8).

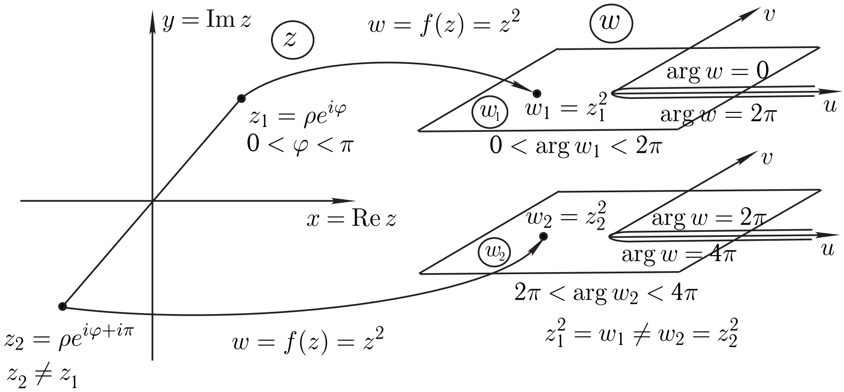


Рис. 8.

Теперь «склеим» верхний берег разреза плоскости w_1 ($\arg w = 0$) с нижним берегом разреза плоскости w_2 ($\arg w = 4\pi$), а нижний берег разреза плоскости w_1 ($\arg w = 2\pi$) — с верхним берегом разреза плоскости w_2 ($\arg w = 2\pi$) (см. рис. 9). Если в плоскости z точка описывает простую замкнутую кривую, обходя начало координат, то есть аргумент z меняется от φ до $\varphi + 2\pi$, то в плоскости w ей будет соответствовать кривая, совершающая дважды обход вокруг точки $w = 0$, а на поверхности $w_1 \cup w_2$ — простая кривая, по которой точка, взятая, например, на первом листе, перемещается по этому листу, потом по второму и возвра-

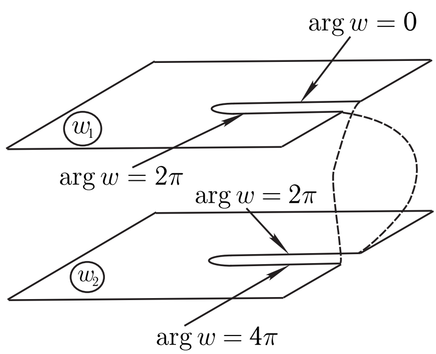


Рис. 9.

щается в исходное положение. Построенная модель называется римановой поверхностью функции $w = z^2$.

Таким образом, функция $w = z^2$ взаимно однозначно и непрерывно отображает полную плоскость z $(z \neq 0,\ z \neq \infty)$ на риманову поверхность $w_1 \cup w_2$ этой функции. Обратная функция $z = \sqrt{w}$ также взаимно однозначно и непрерывно отображает риманову поверхность $w_1 \cup w_2$ функции $w = z^2$ на полную плоскость z $(z \neq 0,\ z \neq \infty)$.

Аналогично можно рассматривать n-листную функцию $w = z^n$ и обратную к ней $w = \sqrt[n]{z}$. Например, областью однолистности данной функции является сектор $C \leqslant \arg z < C + \dfrac{2\pi}{n}$, $C \in \mathbb{R}$, так как в этой области нет точек $z = \rho e^{i\varphi}$, имеющих одинаковые модули, и аргументы, отличающиеся на величину, большую, либо равную $\dfrac{2\pi}{n}$.

Функция $w = f(z) = e^z$ также не является однолистной. Действительно, рассмотрим две полосы: 1) полосу $g_0 \rightleftharpoons \{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, переходящую в плоскость $-\pi < \arg w < \pi$ с разрезом по *отрицательной* части вещественной оси, причем граничной прямой $\operatorname{Im} z = -\pi$ соответствует *нижний* берег разреза, а прямой $\operatorname{Im} z = \pi$ — *верхний* берег разреза; 2) полосу $g_1 \rightleftharpoons \{\pi < \operatorname{Im} z < 3\pi\}$, переходящую в плоскость $D_1 \rightleftharpoons \{\pi < \arg w < 3\pi\}$. Чтобы при непрерывном переходе точки z из g_0 в g_1 через прямую $\operatorname{Im} z = \pi$ образ этой точки непрерывно переходил из D_0 в D_1, склеим берега разрезов, соответствующие общему значению $\arg w = \pi$. Получим новое геометрическое многообразие — двулистную Риманову поверхность, состоящую из листов D_0 и D_1. Аналогично продолжаем процесс для всех полос $g_n \rightleftharpoons \{(2n-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2n+1)\pi\}$, переходящих в $D_n \rightleftharpoons \{(2n-1)\pi < \arg w < (2n+1)\pi\}$. Полная комплексная плоскость z переходит в бесконечнолистную Риманову поверхность, склеенную из листов D_n, причем лист D_n склеен с листами D_{n+1} и D_{n-1} по берегам разрезов на которых $\arg w$ принимает одинаковые значения.

Определение 2.7 *Если для точки z можно указать такую ε-окрестность, что при однократном обходе точки z по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в этой ε-окрестности, одна ветвь многозначной функции переходит в другую, то точка z называется* ***точкой ветвления*** *данной многозначной функции.*

Рассмотрим ряд примеров.

Для **функции** $w = \sqrt{z}$, точками ветвления являются точки: $z = 0$, $z = \infty$. На комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ каждая ветвь — однозначная функция, при этом $w_1 = \sqrt{z}$ называют главной ветвью, если $-\dfrac{\pi}{2} < \arg w_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Функция $w = \dfrac{1}{z}$ — однозначная, однолистная функция на полной комплексной плоскости, $z\,(0) = \infty$, $z\,(\infty) = 0$.

Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ — однозначная, однолистная функция в любой области, где для любых z_1, z_2 выполнено неравенство $z_1 \cdot z_2 \neq 1$. Покажем это.

Пусть $z_1 \neq z_2$, тогда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \;\Leftrightarrow\; (z_2 - z_1)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, областями однолистности являются, например, $|z| > 1$ и $|z| < 1$.

Показательная функция e^z,

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y)$$

— однозначная, но не однолистная функция. Областью однолистности является любая полоса шириной 2π, например, $0 < y < 2\pi$.

Логарифмическая функция $\mathrm{Ln}\, z$**,**

$$\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}(\rho e^{i\varphi + i\cdot 2\pi k}) = \ln \rho + i\varphi + i \cdot 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$ — многозначная функция. Точки ветвления $z = 0$, $z = \infty$.

При $k = 0$ получаем **главные значения логарифма и аргумента**: $\ln z = \ln \rho + i\varphi$; $\arg z = \varphi$.

Пример 2.1. *Представить* $\mathrm{Ln}(-1 - i)$ *в алгебраической форме.*

$$\mathrm{Ln}(-1 - i) = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3}{4}\pi + 2i\pi k}\right) = \\ = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{3\pi}{4} + i2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Задача 2.2. *Представьте в алгебраической форме:*
а) $\mathrm{Ln}\,(-10)$; *б)* $\mathrm{Ln}\left(e^{i\varphi}\right)$.

Ответ: а) $\ln 10 + i\pi + i \cdot 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$;
б) $i\varphi + i \cdot 2\pi k, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Рассмотрим функцию $w = z^a$, которая:
1) при $a = n \in \mathbb{Z}$, $a \neq \pm 1$ — однозначная, не однолистная функция;
2) при $a = \dfrac{m}{n}$, где $\dfrac{m}{n}$ — несократимая рациональная дробь, — многозначная (n-значная) функция;
3) при $a \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ — многозначная (бесконечнозначная), $w = e^{a \mathrm{Ln} z}$.
Важно помнить: $\sqrt[n]{z^m} \neq \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$.

Пример 2.3. *а) Представить число 2^i в тригонометрической форме:*

$$2^i = e^{i\mathrm{Ln}2} = e^{i(\ln 2 + 2i\pi k)} = e^{-2\pi k}\big(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)\big),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

б) представить число i^i в показательной форме:

$$i^i = e^{i\mathrm{Ln} i} = e^{i\left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2i\pi k\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Задача 2.4. *Представьте а) 3^{i+1}; б) $(i+1)^{i-1}$ в показательной форме.*

Ответ: а) $\left(3 \cdot e^{-2\pi k}\right) \cdot e^{i \ln 3}$; б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi k}\right) \cdot e^{i(\ln\sqrt{2} - \pi - 2\pi k)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отметим, что **гиперболические функции**:
$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$; $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$; $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ — многолистные функции;
и **тригонометрические функции**:
$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ — многолистные функции.

При этом функции $\cos z$, $\sin z$ являются периодическими с периодом 2π функциями, а функция $\operatorname{tg} z$ — периодической с периодом π.

Пример 2.5. *Доказать, что* $\sin(iy) = i \operatorname{sh} y$.
Доказательство.

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i^2} = i \operatorname{sh} y.$$

Задача 2.6. *Докажите, что* $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$.

Справедливы следующие формулы тригонометрии в комплексной области:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

С учетом разобранного выше примера имеем:

$$\begin{aligned}
&\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y;\\
&\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y;\\
&\sin^2 z + \cos^2 z = 1;\ \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right).
\end{aligned}$$

Обратные гиперболические функции.

Обозначим $w = \operatorname{Arch} z$, если $z = \operatorname{ch} w$. Тогда

$$z = \operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}; \quad w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Действительно, положим $t = e^w$, тогда

$$z = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - 2tz + 1 = 0,$$

откуда, решая квадратное уравнение, получаем

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Тогда $w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$.

Важно помнить: здесь, под знаком логарифма, и далее ставим перед корнем знак «+», так как квадратный корень в случае комплексных чисел по определению имеет два значения. С большой буквы обозначаются **все** значения многозначной функции.

Таким образом, $w = \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$ — многозначная функция, главное ее значение $w = \operatorname{arch} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$.

Аналогично определяются другие обратные гиперболические функции.

Задача 2.7. *Получите выражение для а)* $\operatorname{Arsh} z$; *б)* $\operatorname{Arth} z$.

Ответ: а) $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$; б) $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}$.

Обратные тригонометрические функции.

Обозначим $w = \mathrm{Arccos}\, z$, если $z = \cos w$. Тогда

$$w = -i\mathrm{Ln}\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right).$$

Действительно, $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. Положим $t = e^{iw}$, тогда $z = \dfrac{t + \frac{1}{t}}{2}$; $t^2 - 2tz + 1 = 0$, $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

Следовательно,

$$iw = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \quad w = -i\mathrm{Ln}\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right).$$

Это многолистная функция, главное значение которой

$$w = \arccos z = -i \cdot \ln\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right).$$

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции.

Задача 2.8. *Получите выражение для а)* $\mathrm{Arcsin}\, z$*; б)* $\mathrm{Arctg}\, z$.

Ответ: а) $-i\mathrm{Ln}\, i\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$; б) $\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{i+z}{i-z}$.

Пример 2.9. *Представить в алгебраической форме* $\mathrm{Arccos}\, 3$.

Решение.

$$\cos z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} + 1 - 6e^{iz} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad e^{iz} = 3 \pm \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad z = -i\mathrm{Ln}\left(3 \pm \sqrt{8}\right) =$$
$$= -i\ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right) + 2\pi k, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отметим, что в данном случае $\sqrt{8}$ имеет смысл арифметического корня, 8 — действительное число.

Задача 2.10. *Представьте в алгебраической форме*
а) $\mathrm{Arcsin}(-3i)$*; б)* $\mathrm{Arctg}\, 2i$.

Ответ:

а) $$-i\mathrm{Ln}\left(3 \pm \sqrt{10}\right) = \left[\begin{array}{l} -i\ln\left(3 + \sqrt{10}\right) + 2\pi k, \\ -i\ln\left(-3 + \sqrt{10}\right) + \pi + 2\pi k, \end{array}\right.$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

б) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{i}{2}\ln 3 + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

2.1. Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислите (найдите все значения). Результат представьте в форме $a+ib$, где a и b — действительные числа.
   а) $\cos(2+i)$; б) $\sin 2i$; в) $\cos \pi i$; г) $\operatorname{tg}(2-i)$;
   д) $\operatorname{Ln} 2$; е) $\ln 2$; ж) $\operatorname{Ln} i$; з) $\operatorname{Ln}(2-3i)$;
   и) $1^{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}$; к) i^{π}; л) π^{i}; м) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{i}$.
2. Найдите все решения уравнения. Результат представьте в форме $a+ib$, где a и b действительные числа.
   а) $\sin z = 2$; б) $\cos z = i$; в) $\operatorname{tg} z = 2+i$;
   г) $\sin z + \cos z = 2$; д) $\sin z - \cos z = 3$;
   е) $e^{2z} + e^{z} = 3$; ж) $e^{z} + i = 0$; з) $\operatorname{ch} z = i$;
   и) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$; к) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$.
3. Запишите главное значение функции $f(z) = \sqrt{z}$, где
   а) $z = 3+4i$; б) $z = 3-4i$; в) $z = -3+4i$;
   г) $z = -3-4i$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение функции, однолистной на некотором множестве. Приведите пример.
2. Сформулируйте определение однозначной функции. Приведите пример. Как связаны понятия однолистности и однозначности?
3. Сформулируйте определение функции, не однолистной (многолистной) на некотором множестве. Приведите пример.
4. Сформулируйте определение многозначной функции. Приведите пример. Как связаны понятия многолистности и многозначности?
5. Сформулируйте определение показательной функции e^z.
6. Сформулируйте определения тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$.
7. Сформулируйте определения гиперболических функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$.
8. Сформулируйте определение логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$.
9. Сформулируйте определение общей степенной функции z^a, $a \neq 0$.
10. Сформулируйте определение дробно-линейной функции.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Найдите сумму и произведение всех корней уравнения
   $z^n + a^n = 0$, $a > 0$.

2. Найдите сумму и произведение всех корней уравнения $z^n - a^n = 0, \;\; a > 0.$

§ 3. Предел и непрерывность функции комплексной переменной

3.1. Понятие предела функции комплексной переменной.

Определение 3.1 (по Гейне) *Комплексное число w_0 называется **пределом** функции $f(z)$, $z \in g$, в точке $z_0 \in g$, где g — множество точек на полной комплексной плоскости, если для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к z_0, $z_n \neq z_0$, соответствующая последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к w_0. При этом предполагается, что z_0 является точкой сгущения (предельной точкой) множества g.*

Определение 3.2 (по Коши) *Комплексное число w_0 называется **пределом** функции комплексной переменной $f(z)$ в точке $z_0 \in g$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ такое, что для любого z, удовлетворяющего условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.*

Замечание 3.1 *Это определение имеет смысл лишь при конечных значениях z_0 и w_0.*

Теорема 3.1 *Определения по Гейне и по Коши эквивалентны при конечных значениях z_0 и w_0.*
Доказательство.

1. Пусть справедливо определение предела по Коши, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет определению 3.2. Докажем, что тогда справедливо определение предела по Гейне. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и выберем соответствующее $\delta(\varepsilon) > 0$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{z_n\} \to z_0$, $z_n \neq z_0$, и найдем $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется соотношение $0 < |z_n - z_0| < \delta$. Тогда $0 < |f(z_n) - w_0| < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$. А так как $\varepsilon > 0$ — любое число, и $\{z_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к z_0, то это значит, что $\{f(z_n)\} \to w_0$, то есть верно определение 3.1.
2. Пусть выполнено определение предела по Гейне. Докажем, что выполнено определение предела по Коши. Предположим противное: пусть верно определение 3.1, а определение 3.2 — неверно. Последнее означает, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta_n > 0$ существует

$z_n \in g$, что при $0 < |z_n - z_0| < \delta_n$, будет верно неравенство $|f(z_n) - w_0| > \varepsilon_0$. Выберем последовательность $\{\delta_n\} \to 0$ и соответствующую ей последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющую предыдущим неравенствам. Тогда получаем, что существует $\{z_n\} \to z_0$, а при этом $\{f(z_n)\}$ не стремится к w_0, то есть определение 3.1 — неверно. Полученное противоречие доказывается справедливость утверждения.

Определение 3.3 *Функция комплексной переменной $f(z)$ называется* ***непрерывной*** *на множестве g* ***в точке*** *$z_0 \in g$, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ и $w_0 = f(z_0)$. Другими словами, функция комплексной переменной $f(z)$ называется* ***непрерывной в точке*** *$z_0 \in g$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ такое, что $\forall z$, удовлетворяющего условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.*

Очевидно, при этом достаточно малая δ-окрестность точки z_0 отображается $f(z)$ на достаточно малую ε-окрестность точки $w_0 = f(z_0)$. Это определение распространяется как на внутренние, так и на граничные точки множества.

Определение 3.4 *Точка z_0 называется* ***изолированной точкой*** *множества g, если существует такая ее ε-окрестность, в которой нет других точек множества g.* В изолированной точке $z_0 \in g$ функция считается непрерывной.

Понятие непрерывности функции $f(z)$ справедливо и в случае бесконечно удаленной точки.

Пример 3.1. *а) функции $w = const$, $w = az + b$, $w = \overline{z}$, $w = \operatorname{Re} z$, $w = |z|$, $w = z^n$ являются непрерывными на всей комплексной плоскости;*
б) функция $w = \arg z$ является непрерывной на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = 0$, $z = \infty$ и точек, лежащих на положительной части действительной полуоси.

Задача 3.2. *Приведите пример функции, непрерывной на всей комплексной плоскости, кроме:*
а) двух заданных точек $z = 1$ и $z = 2i$;
б) точки $z=\infty$.

Определение 3.5 *Функция комплексной переменной $f(z)$, $z \in g$, называется* ***непрерывной в области*** *g, если она непрерывна в каждой точке $z \in g$ ($f(z) \in C(g)$).*

Аналогично определяются понятия $f(z) \in C(\overline{g})$ и $f(z) \in C(\partial g)$. При этом при определении непрерывности по Гейне для замкнутой области g, $f(z) \in C(\overline{g})$, или на границе области

g, $f(z) \in C(\partial g)$, надо рассматривать последовательности $\{z_n\}$, состоящие только из точек $z_n \in \overline{g}$ или $z_n \in \partial g$.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $z = x + iy$, а $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — действительные функции действительных переменных.

Теорема 3.2 *Функция $f(z)$ непрерывна в области g тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны по совокупности переменных.*

Теорема 3.3 *Пусть $f(z) \in C(g)$ и $h(z) \in C(g)$. Тогда $f(z) \pm \pm h(z) \in C(g)$, $f(z) \cdot h(z) \in C(g)$ и $\dfrac{f(z)}{h(z)} \in C(g)$, где $h(z) \neq 0$.*

Доказательство двух последних теорем опирается на аналогичные теоремы из курса математического анализа.

Пример 3.3. *Пусть функция $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ задана в проколотой окрестности точки $z = 0$. Можно ли доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной в точке $z = 0$?*

Решение. Рассмотрим две последовательности: $z_n^{(1)} = \left(\dfrac{1}{n}; 0\right)$ и $z_n^{(2)} = \left(0; \dfrac{1}{n}\right)$, каждая из которых принадлежит $\delta-$окрестности нуля. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(2)} = 0$, а $f\left(z_n^{(1)}\right) = 1$, $f\left(z_n^{(2)}\right) = = 0$. Следовательно, функция не имеет предела в точке $z = 0$, поэтому невозможно доопределить ее так, чтобы она стала непрерывной.

Задача 3.4. *Пусть функция а) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$; б) $f(z) = \dfrac{z \cdot \operatorname{Re} z}{|z|}$ задана в проколотой окрестности точки $z = 0$. Можно ли доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной в точке $z = 0$?*

Ответ: а) нет, нельзя; б) да, можно.

3.2. Равномерная непрерывность функции комплексной переменной.

В определении непрерывности по Коши для $f(z) \in C(g)$ величина δ зависит не только от ε, но и от точки z ($\delta = \delta(\varepsilon, z)$). Таким образом, на ε-окрестность любой точки $w = f(z) \in D$ отображается δ-окрестность соответствующей точки z, где величина δ, вообще говоря, различна для разных точек z.

Определение 3.6 *Функция комплексной переменной $f(z)$, $z \in g$, называется* ***равномерно непрерывной*** *в области g, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для $\forall z_1$, $z_2 \subset g$: $|z_1 - z_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.*

Другими словами, любые δ-близкие точки области g отображаются на соответствующие ε-близкие точки области значений функции.

Очевидно, что из равномерной непрерывности в области g следует непрерывность функции. Для доказательства достаточно фиксировать одну из точек, например z_2, тогда определение равномерной непрерывности превратится в условие непрерывности функции $f(z_1)$ в точке z_2.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 3.7 *Множество называется **ограниченным**, если оно целиком содержится в некотором круге $|z| < R$.*

Теорема 3.4 *Если $f(z) \in C(\overline{g})$ и $\overline{g}$ ограничено, то $f(z)$ — равномерно непрерывная функция в $\overline{g}$.*

Доказательство. Пусть для заданного ε_0 и для $\forall \delta_n > 0$ найдутся хотя бы две такие точки $z_1^{(n)}$ и $z_2^{(n)}$, что $\left|z_1^{(n)} - z_2^{(n)}\right| < \delta_n$, а $\left|f\left(z_1^{(n)}\right) - f\left(z_2^{(n)}\right)\right| > \varepsilon_0$. Устремив δ_n к нулю, получим последовательности $\left\{z_1^{(n)}\right\}$ и $\left\{z_2^{(n)}\right\}$, удовлетворяющие данным неравенствам для каждого δ_n. Так как $\left\{z_1^{(n)}\right\}$ ограничена по условию, то из нее можно выделить подпоследовательность $\left\{z_1^{(n_l)}\right\} \to z_1$. При этом $\left\{z_2^{(n)}\right\}$ также ограничена, и из нее можно извлечь $\left\{z_2^{(n_l)}\right\} \to z_2$. Так как $\left\{z_1^{(n_l)}\right\} \to z_1$, а $\delta_n \to 0$, то $z_1 = z_2$, а в силу сделанного предположения $|f(z_1) - f(z_2)| > \varepsilon_0$, что противоречит условию непрерывности $f(z) \in C(\overline{g})$.

Пример 3.5. *Исследовать функцию $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ на равномерную непрерывность в области $D : |z| < 1$.*

Решение. Функция, очевидно, непрерывна в любой точке рассматриваемой области. Покажем, что она не является равномерно непрерывной в этой области. Рассмотрим две последовательности: $z'_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $z''_n = 1 - \dfrac{2}{n}$. Тогда

$$\rho(z'_n, z''_n) = |z'_n - z''_n| = \frac{1}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$. При этом

$$\rho\left(f\left(z'_n\right), f\left(z''_n\right)\right) = \frac{\rho(z'_n, z''_n)}{|1 - z'_n| \cdot |1 - z''_n|} = \frac{n}{2} \to \infty.$$

Следовательно, функция по определению не является равномерно непрерывной.

Задача 3.6. *Исследуйте функцию* $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ *на равномерную непрерывность в области* $D : |z| < 1$.
Ответ: не является.

3.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть функция $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$ задана в проколотой окрестности точки $z = 0$. Можно ли доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной в точке $z = 0$?
2. Исследуйте функцию $e^{-\frac{1}{|z|}}$ в круге $|z| < R$ с выколотой точкой 0 на а) непрерывность; б) равномерную непрерывность.
3. Исследуйте функцию $e^{-\frac{1}{z^2}}$ в круге $|z| < R$ с выколотой точкой 0 на а) непрерывность; б) равномерную непрерывность.
4. Исследуйте функцию $e^{-\frac{1}{z^2}}$ на равномерную непрерывность в секторе $0 < |z| \leqslant R; |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.
5. Функция $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ определена всюду, кроме точки $z = 0$. Докажите, что
   а) в полукруге $0 < |z| \leqslant 1;\ |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ функция ограничена, но не непрерывна;
   б) внутри этого полукруга функция непрерывна, но не равномерно непрерывна;
   в) в секторе $0 < |z| \leqslant 1;\ |\arg z| \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ функция равномерно непрерывна.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение предела функции по Гейне и по Коши.
2. Сформулируйте определение непрерывной функции.
3. Теорема о связи непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.
4. Сформулируйте определение равномерно непрерывной функции.
5. Как связаны понятия непрерывности и равномерной непрерывности?

§ 4. Дифференцирование функций комплексной переменной. Аналитические функции

4.1. Понятие дифференцируемости.

Определение 4.1 *Функция $f(z) \in C(g)$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке $z_0 \in g$, если существует конечный предел разностного отношения $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$.*

Этот предел называют производной функции в точке z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Важно помнить, что по определению предел не зависит от способа стремления Δz к нулю.

На первый взгляд производная функции комплексной переменной определяется совершено аналогично производной функции действительной переменной, как предел разностного отношения. Однако приращение аргумента Δz характеризуется не только величиной $|\Delta z|$, но и направлением $\arg \Delta z$, а производная по определению от этого направления не зависит. Поэтому дифференцируемость функции комплексного переменного есть значительно более сложное понятие, чем дифференцируемость функции вещественного переменного.

Определение 4.2 ***Дифференциалом функции*** *$w = f(z)$ называется $dw = f'(z)dz$, где $dz = \Delta z$ — дифференциал независимой переменной z.*

Пусть $f(z) = u + iv$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — функции действительных переменных, принимающие действительные значения.

Теорема 4.1 *Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке z_0, тогда существуют частные производные $u_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$, $v_y(x_0, y_0)$, причем они связаны* ***условиями Коши–Римана:***

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Доказательство. Представим Δz в виде $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Так как по определению производной предел разностного отношения, если он существует, не зависит от способа стремления Δz к нулю, то положим сначала $\Delta z = \Delta x$. Получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} = \\ = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \quad (4.1)$$

Положив $\Delta z = i\Delta y$, получим:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f}{i\Delta y} = \\ -i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta y} = \\ = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).$$

Два полученных значения предела по определению равны между собой. Приравнивая их вещественные и мнимые части, получим

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

— условия Коши–Римана.

Теорема 4.2 *Пусть $f(z) \in C(g)$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0), и частные производные первого порядка этих функций в точке (x_0, y_0) связаны условиями Коши–Римана, тогда $f(z)$ — дифференцируемая функция комплексной переменной z в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in g$.*

Доказательство. По определению дифференцируемой функции имеем:

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(x, y); \lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\xi(x, y)}{|\Delta z|} = 0;$$

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(x, y); \lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\eta(x, y)}{|\Delta z|} = 0.$$

Обозначим $\zeta(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$. Тогда с использованием условий Коши–Римана получаем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + i\,(v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} +$$

$$+\frac{\zeta(x,y)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{u_x(x_0,y_0)\Delta x-v_x(x_0,y_0)\Delta y+i\left(v_x(x_0,y_0)\Delta x+u_x(x_0,y_0)\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\frac{\zeta(x,y)}{\Delta z}=u_x(x_0,y_0)+i\cdot v_x(x_0,y_0)+\frac{\zeta(x,y)}{\Delta z}.$$

Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=f'(z_0)$.

Замечание 4.1 *к теореме* 4.2

1. Эквивалентные формы записи производной:

$$f'(z)=u_x(x,y)+i\cdot v_x(x,y)=v_y(x,y)+i\cdot v_x(x,y)=$$

$$=u_x(x,y)-i\cdot u_y(x,y)=v_y(x,y)-i\cdot u_y(x,y).$$

2. Нетрудно видеть, что выполнения условий Коши–Римана недостаточно для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке. Достаточные условия сформулированы в теореме 4.2, которая не является обратной к теореме 4.1.
   В качестве примера можно рассмотреть функцию

$$f(z)=\sqrt{|\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z|}=\sqrt{|xy|},$$

   которая не является дифференцируемой в точке $z=0$, однако условия Коши–Римана выполнены в этой точке.

Пример 4.1. *Исследовать на дифференцируемость функцию* $f\left(z\right)=z^2$.

Решение.

$$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy.$$

Воспользуемся условиями Коши–Римана:

$$\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}=2x;\qquad \frac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x;$$

$$\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}=-2y;\qquad -\frac{\partial\left(2xy\right)}{\partial x}=-2y.$$

Следовательно, функция дифференцируема в любой точке комплексной плоскости.

Задача 4.2. *Исследуйте на дифференцируемость функцию* $f\left(z\right)=\cos z$.

Определение 4.3 *Функция $f(z) \in C(g)$, дифференцируемая во всех точках z области g, производная которой $f'(z) \in C(g)$, называется* ***аналитической функцией*** *в области g. Будем обозначать ее $f(z) \in C^{\infty}(g)$.*

4.2. Аналитическая функция. Данное обозначение оправдано тем, что, как будет показано далее, функция, аналитическая в области, является бесконечно дифференцируемой в этой области.

Теорема 4.3 *Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области g являются непрерывность первых частных производных $(u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g))$ при выполнении условий Коши–Римана.*

Необходимость. Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$ то $f'(z) \in C(g)$, откуда $u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g)$. Выполнение условий Коши–Римана следует из теоремы 4.1.

Достаточность. Если $u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g)$, то существуют первые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, и по теореме 4.2 существует $f'(z) \in C(g) = u_x + iv_x$, причем непрерывность $f'(z)$ следует из непрерывности частных производных.

Важно помнить:

1. Действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют условиям Коши–Римана:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

2. Действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u = 0;$$
$$v_{xx} + v_{yy} \equiv \Delta v = 0.$$

   Отметим, что функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются **гармоническими функциями**. В данном случае функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — гармонические функции.

3. Действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ комплексной переменной $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ связаны соотношениями:

$$v_{\varphi} = \rho \cdot u_{\rho}, \quad u_{\varphi} = -\rho \cdot v_{\rho}.$$

4. Модуль и аргумент аналитической функции $f(z) = R(x, y)e^{i\Phi(x,y)}$ связаны соотношениями:

$$R_x = R \cdot \Phi_y, \quad R_y = -R \cdot \Phi_x.$$

Свойства аналитических функций.

1. Если $f(z) \in C^\infty(g)$ (аналитическая в области g), то $f(z) \in C(g)$ (непрерывна в области g).
2. Сумма, разность и произведение аналитических функций есть аналитическая функция. Отношение аналитических функций есть аналитическая функция всюду, где знаменатель отличен от нуля.
3. Если $w = f(z) \in C^\infty(g)$ есть аналитическая функция, причем в области ее значений G на плоскости w определена аналитическая функция $\varphi(w) \in C^\infty(G)$, то функция $F(z) = \varphi\left(f(z)\right) \in C^\infty(g)$ является аналитической функцией в области g.
4. Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in C^\infty(g)$ и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in g$. Тогда в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определена обратная аналитическая функция $z = \varphi(w) \in C^\infty$, $(|w - w_0| < \varepsilon)$, отображающая эту окрестность на окрестность точки z_0, причем $\varphi'(w_0) = 1/f'(z_0)$.

   Доказательство. Для существования обратной функции необходимо, чтобы уравнения $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ можно было разрешить относительно x, y в окрестности точки w_0 считая, что эти уравнения задают неявные функции x, y переменных u, v. Как было показано в курсе математического анализа, для этого достаточно, чтобы в окрестности точки z_0 выполнялось условие: $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$.

   С учетом условий Коши–Римана получаем

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

   Таким образом, доказано существование обратной функции $z = \varphi(w)$. Составив разностное отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}}$, можно доказать существование и непрерывность производной $\varphi'(w_0)$ при условии $f'(z_0) \neq 0$.
5. Аналитическую функцию можно восстановить по ее действительной или по ее мнимой части с точностью до аддитивной постоянной.

   Доказательство. Например, пусть в односвязной области

g плоскости (x, y) задана функция $u(x, y)$, являющаяся действительной частью аналитической функции $f(z)$. В силу условий Коши–Римана дифференциал неизвестной функции $v(x, y)$ однозначно определен по функции $u(x, y)$:

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy,$$

то есть мнимая часть этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной, так как функцию двух действительных переменных можно определить по ее полному дифференциалу с точностью до аддитивной постоянной.

6. Линии уровня $u(x, y) = const$, $v(x, y) = const$ взаимно ортогональны.

Доказательство. Пусть $\operatorname{grad} u = \{u_x, u_y\}$, $\operatorname{grad} v = \{v_x, v_y\}$, тогда скалярное произведение этих векторов равно

$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = -u_y \cdot v_y + u_y \cdot v_y = 0.$$

Градиенты функций ортогональны линиям уровня функций, следовательно, линии уровня тоже ортогональны.

Пример 4.3. *Исследовать функцию на аналитичность.*
а) Функция $f(z) = C$, где $C = const$, — аналитическая на расширенной комплексной плоскости $(f'(z) = 0)$.
б) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ — аналитическая всюду, кроме точки $z = 0$ $\left(f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}\right)$.
в) $f(z) = e^z$ — аналитична на всей комплексной плоскости.
г) $f(z) = \overline{z} = x - iy$ — не аналитическая, так как не выполняются условия Коши–Римана: $u_x = 1 \neq v_y = -1$.
д) $f(z) = \sin \overline{z}$ — условия Коши–Римана выполняются только в точках $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n, 0\right)$, значит, функция не является аналитической.

Задача 4.4. *Исследуйте функцию на аналитичность:*
а) Линейная функция $f(z) = az + b$;
б) $f(z) = z^n$, n — целое положительное число;
в) $f(z) = (\overline{z})^2$;
г) $f(z) = \cos \overline{z}$.
Ответ:

а)аналитическая на всей комплексной плоскости: $f'(z) = a$;

б)аналитическая на всей комплексной плоскости: $f'(z) = nz^{n-1}$;

в) условия Коши–Римана выполняются только в точке $(0;0)$, значит, функция не является аналитической;

г) условия Коши–Римана выполняются только в точках $(\pi n;0)$, значит, функция не является аналитической.

Пример 4.5. *Исследовать функцию $w = \ln z = \ln r + i\varphi$ на аналитичность.*

Решение. Докажем, что данная функция является аналитической везде, кроме точки $z = 0$. Воспользуемся условиями Коши–Римана для $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$:

$$v_\varphi = \rho \cdot u_\rho; \quad u_\varphi = -\rho \cdot v_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = r\frac{1}{r}; \;\; 0 = 0,$$

что справедливо в рассматриваемой области. Значит, функция аналитическая везде, кроме точки $z = 0$.

Задача 4.6. *Исследуйте функцию $w = \ln \overline{z}$ на аналитичность.*
Ответ: не является аналитической.

Пример 4.7. *Найти мнимую часть аналитической функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если ее действительная часть $u(x,y) = e^x \sin y + 2xy$.*

Решение.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + 2y \Longrightarrow v = -e^x \cos y + y^2 + C(x);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y - 2x = -e^x \cos y + C'(x) \Longrightarrow$$

$$C(x) = -x^2 + C_0 \Longrightarrow v(x,y) = -e^x \cos y + \left(y^2 - x^2\right) + C_0,$$

где C_0 — произвольная константа.

Задача 4.8. *Найдите действительную часть аналитической функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее известной мнимой части $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 - y$.*
Ответ: $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - x + C_0$.

4.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследуйте на дифференцируемость функции:
   а) $f(z) = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z$; б) $f(z) = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, \overline{z}$;
   в) $f(z) = \overline{z}$; г) $f(z) = z + \overline{z}$; д) $f(z) = \overline{z} \cdot \mathrm{Im}\, z$;
   е) $f(z) = \mathrm{Re}\, z \cdot \mathrm{Im}\, z$; ж) $f(z) = z^2 + (\overline{z})^2$.
2. Исследуйте функцию $f(z)$ на аналитичность, укажите область аналитичности:
   а) $f(z) = \mathrm{Re}\left(z^2\right)$; б) $f(z) = \mathrm{Im}\left(z^2\right)$;

в) $f(z) = |z|^2 \cdot \operatorname{Re} z$; г) $f(z) = |z|^2 \cdot \operatorname{Im} z$;
д) $f(z) = \overline{z} \cdot \operatorname{Re} z$; е) $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} \overline{z}$;
ж) $f(z) = (\overline{z})^2$; з) $f(z) = z^2 + |\overline{z}|^2$; и) $f(z) = z^2 + (\overline{z})^2$;
к) $f(z) = \frac{i}{z}$; л) $f(z) = (z + 2i)^3$; м) $f(z) = e^{iz}$;
н) $f(z) = \sin 2z$; о) $f(z) = \operatorname{ch} z$; п) $f(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)$;
р) $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$; с) $f(z) = \ln|z| + i\arg z$;
т) $f(z) = z \cdot |z|$; у) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$.

3. Найдите мнимую часть аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее известной действительной части:
   а) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$;
   б) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.
4. Найдите действительную часть аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее известной мнимой части:
   а) $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y$; б) $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
   в) $v(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x^3 - 2y$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение функции комплексной переменной, дифференцируемой в точке. Приведите пример.
2. Сформулируйте, в чем состоит геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.
3. Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.
4. Сформулируйте определение функции, аналитической в области, не содержащей точку $z = \infty$.
5. Сформулируйте необходимые и достаточные условия аналитичности функции в области, не содержащей точку $z = \infty$.
6. Сформулируйте определение функции, гармонической в некоторой области.
7. Сформулируйте определение сопряженных гармонических в некоторой области функций.
8. Сформулируйте, как связаны аналитичность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ с гармоничностью функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.
9. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
10. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = re^{i\varphi}$, $w = f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

11. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = R(x, y) \cdot e^{i\Phi(x,y)}$.
12. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = re^{i\varphi}$, $w = f(z) = R(r, \varphi) \cdot e^{i\Phi(r,\varphi)}$.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Докажите, что $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и найдите $f'(0)$.
2. Докажите, что для функции $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши–Римана, но $f'(0)$ не существует.
3. Пусть $w = f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z: u и v — дифференцируемые функции ($w = u + iv$); существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Докажите, что функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z.
4. Пусть $w = f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z: u и v — дифференцируемые функции ($w = u + iv$); существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$. Докажите, что либо функция $w = f(z)$, либо функция $w = \overline{f(z)}$ дифференцируема в точке z.
5. Пусть в области $D: -\pi < \arg z < \pi$ задана функция $f(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$, $z = re^{i\varphi}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Докажите, что $f(z)$ является аналитической в D и $f'(z) = \dfrac{f(z)}{nz}$.
6. Выясните, будет ли гармонической функция u^2, если u — гармоническая функция?
7. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в некоторой области. Является ли указанная ниже функция $u(x, y)$ гармонической в этой области? Ответ обоснуйте.
   а) $u(x, y) = |f(z)|$; б) $u(x, y) = \ln|f(z)|$;
   в) $u(x, y) = \arg f(z)$.

§ 5. Конформные отображения

5.1. Определение и свойства конформного отображения.

Пусть $w = f(z)$, где $f(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$ в области g, и пусть при этом $w = u(x, y) + iv(x, y)$ принадлежит некоторой области D. Пусть также в точке $z_0 \in g$ существует $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \neq 0$.

Выберем такой способ стремления Δz к нулю, при котором точки $z = z_0$ и $z = z_0 + \Delta z$ принадлежат некоторой гладкой кривой $\gamma_1 \in g$. Соответствующие им точки $w = w_0$ и $w = w_0 + \Delta w$ принадлежат Γ_1 — некоторой кривой в области D. Приращениям Δz и Δw соответствуют ***векторы секущих к кривым*** γ_1 и Γ_1 соответственно. При этом $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ имеют геометрический смысл ***углов,*** которые соответствующие векторы составляют с положительными направлениями осей абсцисс на комплексных плоскостях z и w соответственно, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ — ***длины*** этих векторов. При $\Delta z \to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым (рис. 10).

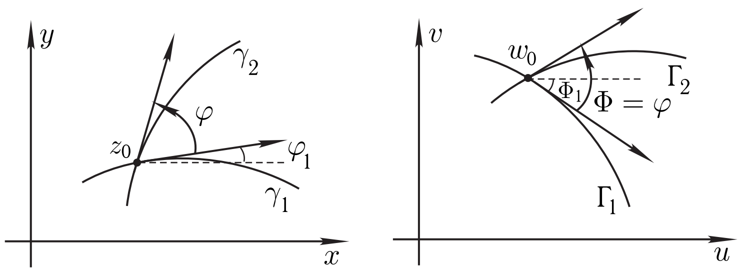


Рис. 10.

Представим отличную от нуля производную функции $f(z)$ в показательной форме: $f'(z) = ke^{i\alpha}$, $k > 0$, где α — определенное действительное число. Тогда $|\Delta w| = k|\Delta z| + o(|\Delta z|)$, причем $k = |f'(z)|$ не зависит от выбора кривой γ_1.

Таким образом, при отображении $w = f(z) \in C^\infty(g)$ и $f'(z_0) \neq 0$ бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $k = |f'(z_0)|$ — коэффициент преобразования подобия, что именуется ***свойством постоянства растяжения***.

Теперь рассмотрим угол

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1,$$

равный разности угла Φ_1 (угол между касательной к кривой Γ_1 и положительным направлением оси $u = \operatorname{Re} w$ на плоскости w) и угла φ_1 (угол между касательной к кривой γ_1 и положительным направлением оси x на плоскости z). Тогда $\Phi_1 = \varphi_1 + \alpha$.

Другими словами, аргумент производной $\arg f'(z_0)$ в точке z_0 определяет величину угла, на который нужно повернуть касательную к любой гладкой кривой γ, проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную к образу этой кривой в точке $w_0 = f(z_0)$. Так как $\alpha = \arg f'(z_0)$ не зависит от выбора γ_1, то для любой кривой γ_2: $z_0 \in \gamma_2$ выполняется равенство $\Phi_2 = \varphi_2 + \alpha$, откуда $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ (сохраняется величина и направление углов) — это ***свойство сохранения углов.***

Определение 5.1 *Непрерывное взаимно однозначное отображение области g комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w, при котором в любой точке $z \in g$ выполняются свойства сохранения углов и постоянства растяжений, называется* ***конформным отображением*** *g на D.*

Замечание 5.1 *При конформном отображении бесконечно малая окружность преобразуется в бесконечно малую окружность; бесконечно малый треугольник — в бесконечно малый треугольник.*

Выясним, какими свойствами должна обладать функция комплексной переменной, чтобы отображение, осуществляемое этой функцией, было конформно.

Теорема 5.1 *Если функция $f(z) \in C^\infty(g)$, является однозначной и однолистной, и $f'(z) \neq 0$ для любых точек $z \in g$, то $f(z)$ осуществляет конформное отображение $g \xleftrightarrow{K} D$.*

Доказательство. Отображение, осуществляемое указанной функцией $f(z)$, обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений, как было показано выше, и оно взаимно однозначное. Следовательно, отображение — конформное.

Итак, условия аналитичности, однолистности и отличия от нуля производной функции являются достаточными условиями конформности отображения, осуществляемой этой функцией.

Сформулируем теорему о необходимых условиях.

Теорема 5.2 *Если функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение $g \xleftrightarrow{K} D$, то $f(z) \in C^\infty(g)$, однолистна, и ее производная $f'(z) \neq 0$ для любой точки $z \in g$.*

Рассмотренное отображение называется **конформным отображением первого рода**.

Конформное отображение, при котором сохраняются абсолютные величины углов между кривыми и их образами, но направление углов меняется на противоположное, называется **конформным отображением второго рода**. Очевидно, что конформное отображение второго рода осуществляется функциями, являющимися комплексно сопряженными аналитическим функциям с отличной от нуля производной.

5.2. Основные принципы конформных отображений.

1. **Взаимно однозначное соответствие областей.** Следует из теорем 5.1 и 5.2.

2. **Принцип соответствия границ.**
Теорема 5.3 *Если $w = f(z)$, где $f(z) \in C^\infty(g)$, область g односвязна, и граница области g на плоскости z взаимно однозначно отображается на границу области D на плоскости w с сохранением направления обхода, то преобразование $f(z)$ осуществляет конформное отображение области g на область D (при положительном направлении обходе контура область остается слева).*

3. **Принцип симметрии**. Пусть граница ∂g области g имеет прямолинейный участок γ'. Область g', полученную в результате зеркального отражения g относительно прямой, на которой лежит отрезок γ', будем называть областью, симметричной области g относительно γ'. Сформулируем принцип симметрии.

Теорема 5.4 *Точки, симметричные относительно прямолинейных участков границы, при конформном отображении переходят в точки, симметричные относительно прямолинейного участка — образа границы.*

Замечание 5.2 *Данная теорема остается справедливой, если прямолинейный участок заменить на отрезок дуги окружности, так как* ***прямую можно интерпретировать как окружность бесконечного радиуса****.*

Пример 5.1. *Показать, что точки $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$, симметричные относительно прямой $y = x$, при отображении функции $w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$ переходят в точки, симметричные относительно образа прямой.*
Решение. Сначала найдем образ прямой $y = x$:

$$w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z = e^{-i\frac{\pi}{2}}(x + iy) = -i(x + iy) = y - ix,$$

то есть прямая $y = x$ переходит в прямую $y = -x$. Далее, точки $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$ отображаются в точки $w_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(2 + 3i) = 3 - 2i$; $w_2 = 2 - 3i$, симметричные относительно прямой $y = -x$.
Задача 5.2. *Покажите, что точки $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 1 - 2i$, симметричные относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$, при отображении функции $w = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ переходят в точки, симметричные относительно образа прямой.*

5.3. Теорема Римана (основной закон конформных отображений). Пусть заданы область g комплексной плоскости z и область D комплексной плоскости w. Требуется найти функцию $f(z) = w$, конформно отображающую g на D.

Теорема 5.5 (Римана) *Всякую односвязную область g комплексной плоскости z, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости w.*

Полное доказательство см., например, А.В. Бицадзе «Основы теории аналитических функций».

Замечание 5.3

1. *Пусть область g комплексной плоскости z и область D комплексной плоскости w удовлетворяют условиям теоремы Римана: существует $\xi = f(z) : g \xleftrightarrow{K} |\xi| < 1$, $f(z_0) = \xi_0$ и существует $w = \varphi(\xi) : |\xi| < 1 \xleftrightarrow{K} D$, $\varphi(\xi_0) = w_0$. Тогда существует $w = F(z) = \varphi(f(z)) : g \xleftrightarrow{K} D$, $F(z_0) = w_0$.*
2. *Требование односвязности является существенным. Предположение о возможности конформного отображения многосвязной области на односвязную приводит к противоречию. Однако в ряде случаев возможно конформное отображение областей одинаковой связности.*
3. *Условия теоремы Римана можно заменить установлением соответствия 3-х точек ∂g — границы области g, трем точкам ∂D — границы области D.*

5.4. Основные функции, используемые при конформном отображении $w = f(z)$.

1. Линейная функция $f(z) = az + b$;
2. Дробно-линейная функция $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$;
3. Степенная функция $f(z) = z^n$, область однолистности: $0 < \arg\ z < \dfrac{2\pi}{n}$;
4. $f(z) = \dfrac{1}{z}$, область однолистности — вся комплексная плоскость с выколотой точкой $z = 0$;
5. $f(z) = e^z$, область однолистности: $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

Пример 5.3. *Указать геометрический смысл отображения.*

а) $w = z + 3\ i$ — параллельный перенос на 3 вдоль мнимой оси;

б) $w = z + 5$ — параллельный перенос на 5 вдоль действительной оси;

в) $w = iz$ — поворот на 90° против часовой стрелки;

г) $w = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$ — поворот на 30° по часовой стрелке;

д) $w = 3z$ — растяжение (подобие с коэффициентом 3).

Задача 5.4. *Укажите геометрический смысл отображения:*

а) $w = i\,(z+3)$; б) $w = 4e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2$.

Пример 5.5. *Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках* 0; 1; i *в подобный треугольник с вершинами в* 0; 2; $1+i$.

Решение. Здесь важно понять, что если сохраняются углы, то прямой угол исходного треугольника отобразится в прямой угол образа. Значит, $0 \longrightarrow 1+i$; $1 \longrightarrow 0$. Отсюда

$$w = (1-z)(1+\ i).$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что третья вершина $z = i$ переходит в $w = 2$.

Задача 5.6. *Найдите линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках* 0; -4; $-2+2i$ *в подобный треугольник с вершинами в* 0; 1; $-i$.

Ответ: $w = \dfrac{1+i}{4}z + 1$.

Пример 5.7. *Отобразить первый квадрант на плоскости* z *на верхнюю полуплоскость плоскости* w:

$$\operatorname{Re} z > 0 \cap \operatorname{Im} z > 0 \quad \overset{K}{\longleftrightarrow} \quad \operatorname{Im} w > 0.$$

Решение. Преобразование осуществляется функцией

$$w(z) = az^2 + b,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Задача 5.8. *Отобразите сектор* $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{3}$, $z = \rho e^{i\varphi}$ *на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.

Ответ: $w\,(z) = z^3$.

Пример 5.9. *Отобразить полосу* $0 < \operatorname{Re} z < a$ *на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение.

Пусть $z_1 = \dfrac{\pi}{a} \cdot z$, тогда $0 < \operatorname{Re} z < a \overset{K}{\longleftrightarrow} 0 < \operatorname{Re} z_1 < \pi$; далее, пусть $z_2 = iz_1$, $0 < \operatorname{Re} z_1 < \pi \overset{K}{\longleftrightarrow} 0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$; $w = \exp(z_2)$,

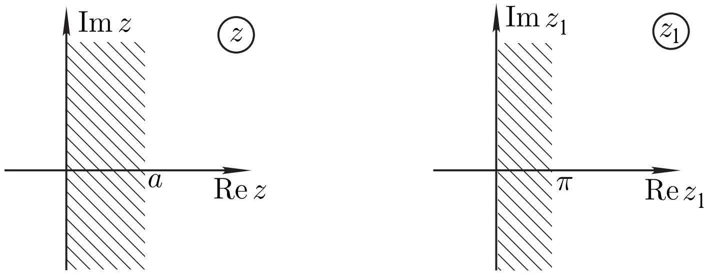


Рис. 11.

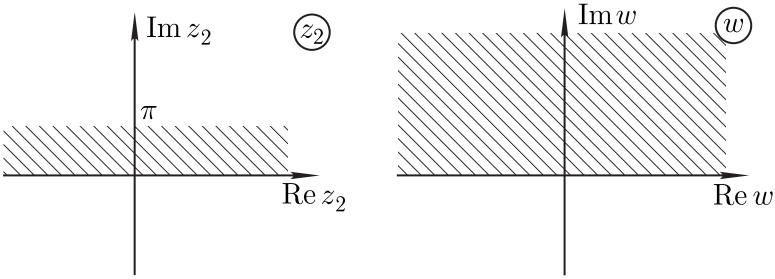


Рис. 12.

$0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi \overset{K}{\longleftrightarrow} \operatorname{Im} w > 0$, следовательно, $w = \exp(i\pi z/a)$ (рис. 11-12).

Задача 5.10. *Отобразите полосу* $0 < \operatorname{Im}\, z < \dfrac{\pi}{3}$ *на верхнюю полуплоскость* w: $\operatorname{Im} w > 0$.
Ответ: $w = e^{3z}$.
Пример 5.11. *Описать геометрическую интерпретацию преобразования* $w = \dfrac{1}{z}$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z}$. На области определения функция однозначна и однолистна, а также непрерывна. Если записать z в показательной форме: $z = \rho e^{i\varphi}$, то $w = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$, то есть $\arg w = -\arg z$. Тогда преобразование $w = \dfrac{1}{z}$ можно рассматривать как суперпозицию двух преобразований: $\xi = \xi(z)$, где $|\xi| = |z|$, $\arg \xi = -\arg z$, и $w = w(\xi)$, где $|w| = \dfrac{1}{|\xi|}$, $\arg w = \arg \xi$ — инверсия в единичном круге. Под **инверсией** понимается такое преобразование, при котором каждой точке внутри (вне) круга ставится в соответствие точка вне (внутри) круга, лежащая на луче, проведенном из центра круга в эту точку. При этом произведение расстояний от точек до центра равно квадрату радиуса круга.

Задача 5.12. *На какую область функция* $w = \dfrac{1}{z}$ *отобразит полуполосу* $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$?

Ответ: $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arg w < 0$.

5.5. Дробно-линейная функция.

Пусть $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Будем считать, что $a \neq 0$, $c \neq 0$, $\dfrac{b}{a} \neq \dfrac{d}{c}$. Тогда

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \lambda\frac{z+\alpha}{z+\beta} = \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{z+\beta}\right), \tag{5.1}$$

где $\lambda = \dfrac{a}{c}$, $\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\beta = \dfrac{d}{c}$. Таким образом, отображение определяется тремя параметрами, причем $\alpha \neq \beta$.

Также можно записать преобразование в обратную сторону: $z = \lambda'\dfrac{w+\alpha'}{w+\beta'}$; $z \xleftrightarrow{K} w$, $\alpha' \neq \beta'$, $f'(z) \neq 0$ для любого z.

Важно помнить. Геометрически конформное отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией, — это поворот, растяжение, отражение относительно действительной оси, инверсия.

Заданием соответствия трех точек плоскости z трем точкам плоскости w: $z_1 \leftrightarrow w_1$, $z_2 \leftrightarrow w_2$, $z_3 \leftrightarrow w_3$ дробно-линейная функция определена однозначно, то есть коэффициенты λ, α, β однозначно определяются указанными выше соотношениями через 6 заданных комплексных чисел.

Действительно, пусть $w_1 = \lambda\dfrac{z_1+\alpha}{z_1+\beta}$; $w_2 = \lambda\dfrac{z_2+\alpha}{z_2+\beta}$; $w_3 = \lambda\dfrac{z_3+\alpha}{z_3+\beta}$, тогда

$$w_1 - w_2 = \lambda\frac{(z_2-z_1)(\alpha-\beta)}{(z_1+\beta)(z_2+\beta)}\ ; \quad w_1 - w_3 = \lambda\frac{(z_3-z_1)(\alpha-\beta)}{(z_1+\beta)(z_3+\beta)};$$

$$A = \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{(z_1-z_2)(z_3+\beta)}{(z_1-z_3)(z_2+\beta)};$$

$$B = \frac{w-w_2}{w-w_3} = \frac{(z-z_2)(z_3+\beta)}{(z-z_3)(z_2+\beta)};$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(w-w_2)\,(w_1-w_3)}{(w-w_3)\,(w_1-w_2)} = \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}.$$

Из этого соотношения получаем дробно-линейную функцию $w = f(z)$.

Пример 5.13. *Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ соответственно в точки $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.*

Решение. Воспользуемся полученной формулой, подставив в нее заданные точки:

$$\frac{(w-0)(-1-1)}{(w-1)(-1-0)} = \frac{(z-i)(1+1)}{(z+1)(1-i)} \iff \frac{-2w}{1-w} = \frac{2z-2i}{(z+1)(1-i)}.$$

После преобразований имеем

$$w = \frac{z-i}{iz-1} = i\frac{i-z}{z+i}.$$

Замечание 5.4 *Если одна из точек z или w равны ∞, надо в формуле заменить скобки с этой точкой на единицу.*

Задача 5.14. *Найдите дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1 = -1$, $z_2 = \infty$, $z_3 = i$ соответственно в точки $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.*

Ответ: $w = \dfrac{1+i}{z+1}$.

Пример 5.15. *Найти дробно-линейное отображение $w = f(z)$, переводящее точки -1, 0, 1 соответственно в точки 1, i, -1. Выяснить, какая область на плоскости w является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.*

Решение. Общий вид дробно-линейной функции $f(z) = \lambda\dfrac{z+\alpha}{z+\beta}$.

Здесь можно либо воспользоваться формулой, приведенной выше, либо провести эти преобразования для конкретной задачи: из соотношений $f(-1) = 1$, $f(0) = i$, $f(1) = -1$, данных в условии, получим уравнения для определения параметров дробно-линейной функции

$$\lambda\frac{-1+\alpha}{-1+\beta} = 1, \qquad \lambda\frac{\alpha}{\beta} = i, \qquad \lambda\frac{1+\alpha}{1+\beta} = -1.$$

Отсюда найдем $\alpha = -i$, $\beta = i$, $\lambda = -i$.

Следовательно, искомое отображение $w = -i\,\dfrac{z-i}{z+i}$.

Для ответа на второй вопрос задачи заметим, что заданные в условии точки -1, 0 и 1 лежат на границе области $\operatorname{Im} z > 0$ и отображаются в точки 1, i, -1, лежащие на окружности $|w| = 1$.

Так как дробно-линейная функция отображает окружность в окружность (напомним, что прямая — окружность бесконечного радиуса), то образом границы области $\operatorname{Im} z > 0$ является окружность $|w| = 1$.

При этом, образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ является внутренность круга $|w| < 1$, так как, например, $w(i) = 0$, но $z = i \in \operatorname{Im} z > 0$, а $w = 0 \in |w| < 1$.

Чтобы установить, что образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ является именно внутренность круга $|w| < 1$, можно также использовать принцип соответствия границ. Так как $w(-1) = 1$, $w(0) = i$, $w(1) = -1$ и при заданном порядке прохождения точек границы $z = -1 \to z = 0 \to z = 1$ область $\operatorname{Im} z > 0$ остается слева, то для соответствующей последовательности образов $w(-1) = 1$, $w(0) = i$, $w(1) = -1$ область $|z| < 1$ — тоже слева (рис. 13).

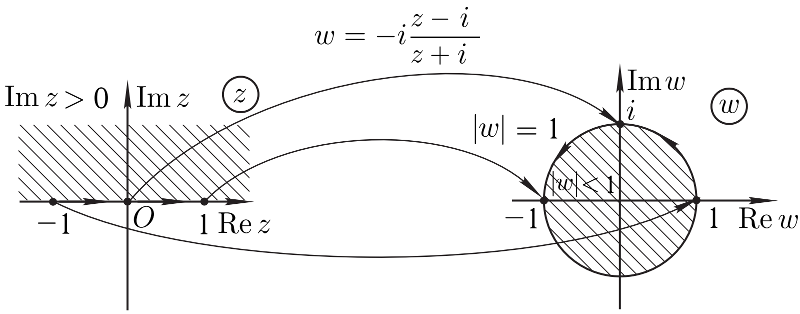


Рис. 13. К примеру 5.15.

Ответ: искомое отображение $w = -i\,\dfrac{z-i}{z+i}$; образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ является внутренность круга $|w| < 1$.

Пример 5.16. *Найти дробно-линейное отображение $w = f(z)$, переводящее точки -1, ∞, i соответственно в точки i, 1, $1+i$.*

Выяснить, какая область на плоскости w является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Решение. Общий вид дробно-линейной функции

$$f(z) = \lambda\,\frac{z+\alpha}{z+\beta}.$$

Используя соотношения $f(-1) = i$, $f(\infty) = 1$, $f(i) = 1+i$, данные в условии, получим уравнения для определения параметров дробно-линейной функции

$$\lambda\,\frac{-1+\alpha}{-1+\beta}=i,\qquad \lambda\,\frac{z+\alpha}{z+\beta}\bigg|_{z=\infty}=\lambda=1,\qquad \lambda\,\frac{i+\alpha}{i+\beta}=1+1,$$

откуда найдем $\alpha=2+i$, $\beta=2-i$, $\lambda=1$.

Следовательно, искомое отображение $w=\dfrac{z+2+i}{z+2-i}$.

Для ответа на второй вопрос найдем образы трех точек -1, 0 и $\operatorname{Re}z=\infty$, лежащих на границе области $\operatorname{Im}z>0$ (при указанной последовательности точек — область $\operatorname{Im}z>0$ слева):

$$w(-1)=i,\quad w(0)=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\quad w(\infty)=1.$$

Заметим, что полученные образы лежат на окружности $|w|=1$. Так как дробно-линейная функция отображает окружность в окружность (прямая — частный случай окружности), то образом границы области $\operatorname{Im}z>0$ является окружность $|w|=1$.

При этом, образом полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ является область вне круга $|w|<1$, что можно установить, пользуясь принципом соответствия границ, или найдя образ какой либо точки, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$. Например,

$$w(i)=\frac{2+2i}{2}=1+i\,\in\,|w|>1.$$

Ответ: искомое отображение $w=\dfrac{z+2+i}{z+2-i}$; образом полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ является область $|w|>1$.

Задача 5.17. *Найдите дробно-линейное отображение* $w=f(z)$, *переводящее точки* -1, ∞, i *соответственно в точки* 0, ∞, 1.

Выяснить, какая область на плоскости w *является образом полуплоскости* $\operatorname{Im}z>0$.

Совет. Так как $w(\infty)=\infty$, а $\left|\lambda\,\dfrac{z+\alpha}{z+\beta}\right|_{z=\infty}=|\lambda|\neq\infty$, то искомое отображение следует искать в виде $w=\lambda\,z+\alpha$.

Ответ: искомое отображение $w=\dfrac{1-i}{2}\,(z+1)$; образом полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ является полуплоскость $\operatorname{Re}w+\operatorname{Im}w>0$.

Круговое свойство: дробно-линейная функция переводит окружность в окружность.

Из (5.1) следует, что достаточно показать, что функция $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ обладает этим свойством, так как параллельный перенос не изменяет вид кривой. Рассмотрим произвольную окружность в плоскости z: $A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$. Пусть $w = \xi + i\eta$, тогда $z = x + iy = \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{\xi + i\eta} = \dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i\dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Подставляя полученные значения x и y в уравнение окружности в плоскости z, получим окружность в плоскости w: $A + B\xi - C\eta + D\left(\xi^2+\eta^2\right) = 0$.

Окружность на плоскости однозначно определяется заданием 3-х точек, поэтому, задав соответствие $z_i \longleftrightarrow w_i$, $i = 1, 2, 3$, с сохранением направления обхода, мы однозначно определим дробно-линейную функцию, конформно отображающую $g \overset{K}{\longleftrightarrow} D$.

Пример 5.18. *Найти дробно-линейное отображение $w(z)$, переводящее круг радиуса $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.*

Решение. Возможны различные подходы к решению задачи.

Можно воспользоваться, например, принципом соответствия границ. Зададим три последовательные точки на границе (окружности $|z| = 1$), например, $z = 1$, $z = i$, и $z = -1$, так, чтобы область $|z| < 1$ при движении от первой к третьей точке оставалась слева. Поставим им в соответствие три последовательные точки прямой $\operatorname{Im} w = 0$ (границы области $\operatorname{Im} w > 0$) так, чтобы область $\operatorname{Im} w > 0$ также была слева (рис. 14). Например:

$$w(1) = -1, \quad w(i) = 0, \quad w(-1) = \infty; \qquad w = \lambda \cdot \frac{z+\alpha}{z+\beta}.$$

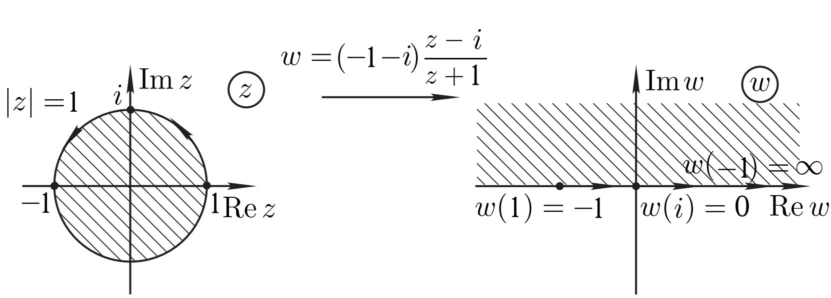


Рис. 14. К примеру 5.18.

Используя эти соотношения, получим:

$$\beta = 1, \quad \lambda = -1 - i, \quad \alpha = -i \qquad \Rightarrow \qquad w = (-1-i)\cdot\frac{z-i}{z+1}.$$

Ответ: $w = (-1 - i) \cdot \dfrac{z - i}{z + 1}$.

Возможно и другое решение, например, с использованием принципа симметрии.

Напомним, что точки z_1 и z_2, симметричные относительно окружности радиуса R на плоскости z, то есть для которых выполняется соотношение $z_1 \cdot z_2 = R^2$, при отображении дробно-линейной функцией отображаются в точки, симметричные относительно образа окружности.

Пусть центр круга точка $z = 0$ отображается, например, в точку $w = i$, тогда симметричная относительно окружности $|z| = 1$ точка $z = \infty$ — в симметричную относительно действительной оси точку $w = -i$ (рис. 15). Это отображение можно осуществить с помощью дробно-линейной функции $w = -i \cdot \dfrac{z - z_0}{z + z_0}$. Так как точка $w(z_0)$ находится на действительной оси плоскости w, то точка z_0 должна находиться на окруженсти $|z| = 1$, то есть $z_0 = e^{i\alpha}$, где α — любое действительное число.

Ответ: $w = -i \cdot \dfrac{z - e^{i\alpha}}{z + e^{i\alpha}}$.

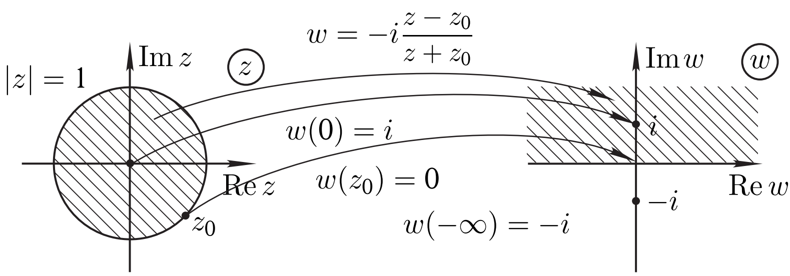


Рис. 15. К примеру 5.18.

Отметим, что и в первом случае принцип симметрии, естественно, выполняется, только $w(0) = -1 + i$, а $w(\infty) = -1 - i$.

Пример 5.19. *Найти конформное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z > 0$ *во внутренность круга* $|w| < 1$ *так, чтобы точка* z_0 $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$ *перешла в точку* $w_0 = 0$.

Решение. Границей верхней полуплоскости является прямая $y = 0$. Симметричной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ является точка $\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$, поэтому если z_0 соответствует $w_0 = 0$, то точке $\overline{z}_0$ в силу симметрии соответствует точка $w = \infty$. Отсюда

$$w = \lambda \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}.$$

Значение λ находим из требования, чтобы граничная точка перешла в граничную. Например, $z = 0 \longrightarrow w$, $|w| = 1$. Значит, $|\lambda| = 1$,

$$w = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}.$$

Задача 5.20. *Найдите дробно-линейное отображение $w(z)$, переводящее внутренность круга радиуса $|z| < 2$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, что $w(0) = 1 + i$.*

Совет. Учтите, что так как $w(0) = 1 + i$, то в силу принципа симметрии $w(\infty) = 1 - i$.

Ответ: $w = (1 - i) \cdot \dfrac{z - 2e^{i\alpha}}{z + 2ie^{i\alpha}}$, где α — любое действительное число.

Замечание 5.5 *Для получения единственного решения можно задать дополнительное условие. Например, $w(1) = 0$, тогда $z_0 = 1$ и $w = -i \cdot \dfrac{z-1}{z+1}$, или $\arg w'(0) = 0$, тогда $z_0 = -i$ и $w = -i \cdot \dfrac{z+i}{z-i}$.*

Пример 5.21. *Найти конформное отображение, переводящее $|z| < R \overset{K}{\longleftrightarrow} |w| < 1$ так, чтобы $z_0 \longleftrightarrow w_0 = 0$ ($|z_0| < R$).*

Решение. С учетом симметрии точек относительно окружности имеем $w = \lambda \dfrac{z - z_0}{z - \dfrac{R^2}{z_0^*}}$, где z_0^* — точка, симметричная z_0 относительно окружности. При этом значение $|\lambda| = \dfrac{R}{|z_0|}$ находим из того условия, что граничная точка переходит в граничную. Например, $z = R \leftrightarrow |w| = 1$.

Пример 5.22. *Найти конформное отображение двуугольника $z : |z| < 1 \cap \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.*

Решение. Двуугольником называется область, образующаяся при пересечении дуг двух окружностей, вообще говоря, разных радиусов. В данном случае одна из "дуг" является отрезком прямой, что соответствует окружности бесконечного радиуса.

Функция $\xi = f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ отображает точку $z = -1$ в точку $\xi = 0$, а точку $z = 1$ в точку $\xi = \infty$. Поэтому две части границы — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} \xi > 0$ и отрезок $\operatorname{Re} z \in [-1; 1]$ — переходят в два луча, направленных от точки

$\xi = 0$ к $\xi = \infty$, а двуугольник — в сектор, ограниченный этими лучами. Так как $\xi(0) = -1$, а $\xi(i) = -i$, то полуокружность переходит в луч на отрицательной части мнимой оси плоскости ξ, а отрезок — в луч на отрицательной части действительной оси плоскости ξ.

При последовательном обходе точек границы двуугольника в направлении $z = i \to z = -1 \to z = 1$ область на плоскости z остается слева, поэтому при последовательном обходе их образов по границе сектора $\xi(i) = -i \to \xi(-1) = 0 \to \xi(1) = -1$ сам сектор также должен оставаться слева. Таким образом, двуугольник отображается в 3-й квадрант плоскости ξ (см. рис. 16).

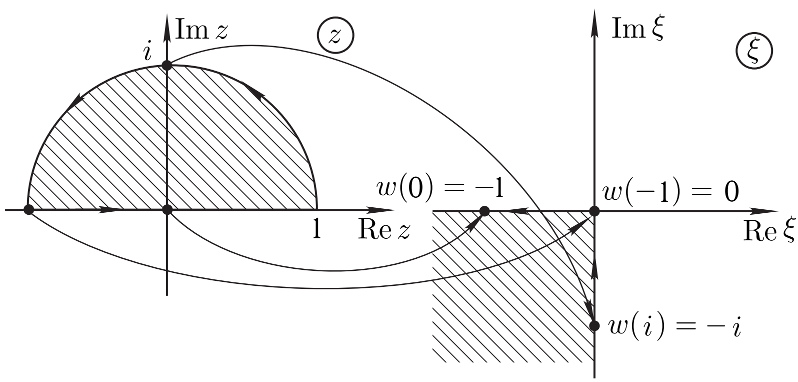


Рис. 16. К примеру 5.22.

Далее, отображение $w = \xi^2$ переводит это сектор в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Ответ: $w = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

Пример 5.23. *Найдите функцию $w = f(z)$, осуществляющую конформное отображение сектора $0 < \arg z < \alpha$, где α — заданный угол, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.*
Решение. См. рис. 17.

Задача 5.24. *Найдите функцию $w = f(z)$, осуществляющую конформное отображение сектора $\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.*
Ответ: $w = -iz^2$.

Пример 5.25. *Отобразить конформно пересечение кругов $|z| < 1$, $|z - i| < 1$ на верхнюю полуплоскость.*

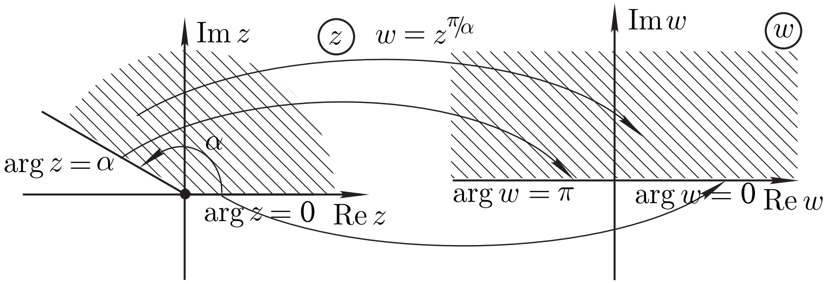
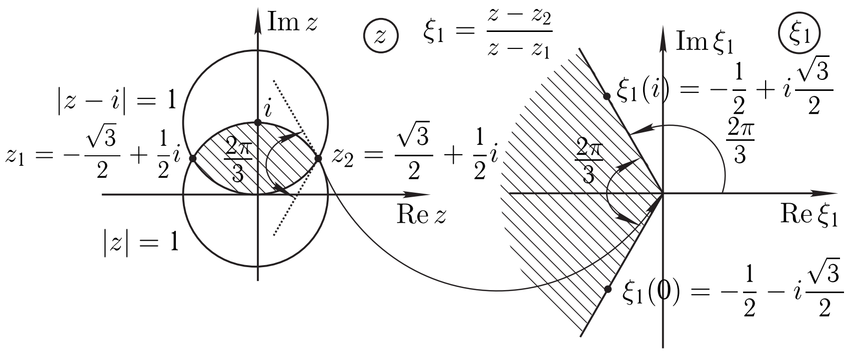


Рис. 17. К примеру 5.23.

Решение. Сначала найдем точки пересечения кругов и угол



$$w = \xi_2^{\frac{3}{2}} = \left(e^{-\frac{2}{3}i\pi} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

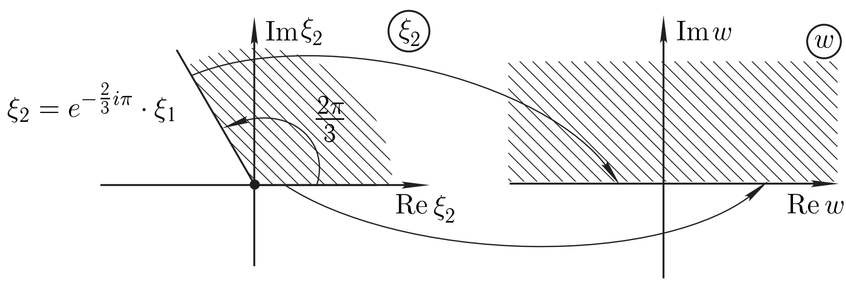


Рис. 18. К примеру 5.25.

между касательными в точках пересечения: $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$; $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$; $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Рассматриваемая область представляет собой двуугольник с вершинами в точках z_1 и z_2. Сначала преобразуем двуугольник в сектор, для этого используем дробно-линейную функцию $\xi_1 = \dfrac{z-z_2}{z-z_1}$. Далее повернем сектор на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ с помощью преобразования $\xi_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\xi_1$, а в итоге отобразим полученный сектор на верхнюю полуплоскость: $w = (\xi_2)^{-\frac{3}{2}}$.

Ответ: $w = -\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Задача 5.26. *Отобразить конформно пересечение кругов*

$$|z-1| < 1,\ |z| < 1$$

на верхнюю полуплоскость.

Ответ: $w = -\left(\dfrac{2z-1-i\sqrt{3}}{2z-1+i\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

5.6. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите дробно-линейные функции, отображающие:
   а) точки $-1;\ i;\ 1+i$ соответственно в точки $0;\ 2i;\ 1-i$;
   б) точки $-1;\ i;\ 1+i$ соответственно в точки $i;\ \infty;\ 1$;
   в) точки $-1;\ \infty;\ i$ соответственно в точки $\infty;\ i;\ 1$;
   г) точки $1;\ i;\ 0$ соответственно в точки $1;\ i;\ -1$;
   д) точки $-1;\ 0;\ 1$ соответственно в точки $1;\ i;\ -1$. В последнем случае выяснить, какая область является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$?
2. Найдите образы областей g при заданных дробно-линейных отображениях $w = f(z)$:
   а) $g: |z| < 1;\ \operatorname{Re} z < 0;\quad w = \dfrac{1}{z}$;
   б) $g: |z| < 1;\ \operatorname{Im} z > 0;\quad w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$;
   в) $g: 0 < \operatorname{Re} z < 1;\ \operatorname{Im} z > 0;\quad w = \dfrac{1}{z}$;
   г) $g: \operatorname{Re} z > 0;\ \operatorname{Im} z > 0;\quad w = \dfrac{z-i}{z+i}$;
   д) $g: 0 < \operatorname{Re} z < 1;\quad w = \dfrac{z-1}{z}$;
   е) $g: 0 < \operatorname{Re} z < 1;\quad w = \dfrac{z-1}{z-2}$;
   ж) $g: 0 < \operatorname{Im} z < 1;\quad w = \dfrac{z-i}{z+i}$;

з) $g: 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$; $w = \dfrac{z}{z+1}$;
и) $g: \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi$; $w = \dfrac{z+1}{z-1}$;
к) $g: 1 < |z| < 2$; $w = \dfrac{z}{z-1}$.

3. Найдите дробно-линейную функцию $w = f(z)$, конформно отображающую область g плоскости z на область D плоскости w и удовлетворяющую заданным условиям:
а) $g: \operatorname{Im} z > 0 \to D: |w| < 1$, $w(z_0) = 0$, где $z_0 \in g$;
б) $g: \operatorname{Im} z > 0 \to D: |w| < 1$; $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$;
в) $g: \operatorname{Im} z > 0 \to D: |w| < 4$; $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = \alpha$;
г) $g: \operatorname{Im} z > 0 \to D: |w| < 1$; $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$;
д) $g: \operatorname{Im} z < 0 \to D: \operatorname{Im} w > 0$; $w(1) = 0$, $w(0) = 1$, $w(-1) = \infty$;
е) $g: \operatorname{Im} z < 0 \to D: |w| < 1$; $w(-2i) = 0$, $\arg w'(-2i) = 0$;
ж) $g: |z| < 1 \to D: |w| < 2$; $w(0) = i$, $\arg w'(0) = \dfrac{\pi}{2}$;
з) $g: |z| < 2 \to D: |w| < 1$; $w(1) = 0$, $\arg w'(1) = \pi$;
и) $g: |z-1| < 1 \to D: |w| < 2$; $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
к) $g: |z| < 2 \to D: |w - i| < 2$; $w(0) = 2i$, $\arg w'(0) = -\pi$;
л) $g: |z + i| < 2 \to D: \operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w$; $w(-i) = 2$, $w(i) = 0$.

4. Найдите образы указанных областей g или кривых L при заданном отображении $w = f(z)$:
а) g : полоса $0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}$; $w = e^z$;
б) g : полоса $0 < \operatorname{Re} z < \pi$; $w = e^{iz}$;
в) L : прямая $\operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{3}$; $w = e^{2z}$;
г) L : отрезок $[1; 1+2i]$; $w = e^z$;
д) L : дуга окружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; $w = z^2$;
е) g : часть плоскости $|z| > 2$, $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$; $w = z^2$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение отображения $w = f(z)$, конформного в точке $z_0 \neq \infty$.
2. Сформулируйте определение конформного отображения области комплексной плоскости на область комплексной плоскости.
3. Сформулируйте теорему о существовании и аналитичности обратной функции.
4. Сформулируйте теорему Римана о существовании конформного отображения.

5. Сформулируйте теорему единственности конформного отображения.
6. Сформулируйте принцип соответствия границ при конформном отображении.
7. Сформулируйте определение дробно–линейной функции.
8. Сформулируйте групповое свойство дробно–линейной функции.
9. Сформулируйте круговое свойство дробно–линейной функции.
10. Сформулируйте свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.

§ 6. Интеграл от функции комплексной переменной по кривой на комплексной плоскости.

Для определения интеграла от функции комплексной переменной требуется задать некоторую кривую C на комплексной плоскости, например, $\zeta(t) = \xi(t) + i \cdot \eta(t)$, где t — действительный параметр, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — кусочно гладкие функции, причем $\xi^2(t) + \eta^2(t) \neq 0$. Как и при определении криволинейных интегралов для функции действительной переменной, кривая C разбивается на n частичных дуг (ζ_{k-1}, ζ_k) длиной Δl_k, на каждой их которых выбирается точка ${\zeta_k}^*$, после чего для данной функции комплексной переменной $f(z)$ составляется интегральная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f({\zeta_k}^*)\Delta l_k$.

Определение 6.1 *Если предел интегральной суммы при стремлении к нулю* $\Delta = \max\limits_k \Delta l_k$ *существует и не зависит от выбора разбиения и выбора точек* ${\zeta_k}^*$*, то этот предел называют интегралом от функции* $f(z)$ *по кривой* C.

Нетрудно показать, что вычисление интеграла от функции комплексной переменной $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по кривой C сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода от действительной и мнимой частей функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C [u(x,y) + iv(x,y)]\ (dx + idy) =$$

$$= \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Достаточные условия существования интеграла $\int\limits_C f(z)dz$ определяются условиями существования криволинейного интеграла второго рода.

Пример 6.1. *Вычислить интегралы а) $\int\limits_L \overline{z}dz$; б) $\int\limits_L zdz$ по кривой L: $y = x^\alpha$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha > 0$.*

Решение.

а) $$\int\limits_L \overline{z}dz = \int\limits_L xdx + ydy + i\int\limits_L xdy - ydx = \left\{dy = \alpha x^{\alpha-1}dx\right\} =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(x + \alpha x^{2\alpha-1}\right) dx + i\int\limits_0^1 \left(\alpha x^\alpha - x^\alpha\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} + \left.\frac{x^{2\alpha}}{2}\right|_0^1 + i(\alpha-1)\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = 1 + i\frac{\alpha-1}{\alpha+1};$$

б) $$\int\limits_L zdz = \int\limits_L xdx - ydy + i\int\limits_L xdy + ydx = \left\{dy = \alpha x^{\alpha-1}dx\right\} =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(x - \alpha x^{2\alpha-1}\right) dx + i\int\limits_0^1 \left(\alpha x^\alpha + x^\alpha\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} - \left.\frac{x^{2\alpha}}{2}\right|_0^1 + i(\alpha+1)\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = i.$$

Заметим, что в первом случае результат зависит от α, то есть от пути интегрирования, а во втором — нет. Дело в том, что, во втором случае функция является аналитической, а в первом — нет (см. теорему 7.1 и следствие из нее).

Задача 6.2. *Вычислите интеграл $\int\limits_C (2z-3)\,dz$ по отрезку, соединяющему точки $z = 0$ и $z = 1 - i$.*

Ответ: $-3 + i$.

6.1. Свойства интеграла от функции комплексной переменной. Поскольку значение криволинейного интеграла второго рода в общем случае зависит от направления обхода кривой, условимся в качестве положительного направления обхода замкнутого контура принимать направление, при котором область, ограниченная данным контуром, остается слева. Интегрирование в положительном направлении будем обозначать символом $\int\limits_{C+} f(z)dz$ или просто $\int\limits_{C} f(z)dz$, интегрирование в отрицательном направлении — символом $\int\limits_{C-} f(z)dz$.

Свойства интеграла и способы его вычисления.

1. $\int\limits_{C-} f(z)\,dz = -\int\limits_{C+} f(z)\,dz$.
2. Линейность: $\int\limits_{c} (af(z) + bg(z))\,dz = a\int\limits_{c} f(z)\,dz + b\int\limits_{c} g(z)\,dz$, где a и b — комплексные числа.
3. Интеграл по объединению контуров равен сумме интегралов по каждому из контуров: $\int\limits_{C_1+C_2+\ldots+C_n} f(z)\,dz = \int\limits_{C_1} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{C_n} f(z)\,dz$.
4. Если для функции $f(z)$ выполняется условие $|f(z)| \leqslant M$, то $\left|\int\limits_{C} f(z)dz\right| \leqslant \int\limits_{C} |f(z)|\,dl \leqslant ML_C$, где dl — элемент длины дуги кривой C, L_C — длина кривой C.
5. Вычисление интеграла можно осуществлять как интегрирование по кривой, заданной функцией $z(t)$ параметра t:
$$\int\limits_{C} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f\left(z(t)\right) z'(t)dt,$$
где $z(a)$ и $z(b)$ — начальная и конечная точки кривой C.
6. Замена переменных при интегрировании: пусть существует функция $\varphi(\xi)$, такая, что $z = \varphi(\xi)$, и кривая C на комплексной плоскости z соответствует кривой Γ на комплексной плоскости ξ. При этом $\varphi(\xi) \in C^{\infty}(D)$ и является одно-

листной в D, где D — область комплексной плоскости ξ, содержащая Г. Тогда

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\Gamma f\left(\varphi(\xi)\right)\varphi'(\xi)d\xi.$$

Пример 6.3. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C (z-2)dz$ *по отрезку прямой, соединяющей точки* $z_1 = -1-2i,\ z_2 = 2+4i$.

Решение. Отрезок прямой, соединяющий указанные точки, лежит на прямой $y = 2x$. Тогда

$$\int\limits_C (z-2)dz = \int\limits_C ((x-2)+iy)(dx+idy) =$$
$$= \int\limits_C (x-2)\,dx - ydy + i\int\limits_C (ydx+(x-2)dy) =$$
$$= [y=2x,\ dy=2dx,\ -1 \leqslant x \leqslant 2] =$$
$$= \int\limits_{-1}^{2} (-3x-2)dx + i\int\limits_{-1}^{2} (4x-4)\,dx = -10,5-6i.$$

Задача 6.4. *Вычислите интеграл* $\int\limits_C (z+i)dz$ *по отрезку прямой, соединяющей точки* $z_1 = -2+i,\ z_2 = 1-0,5i$.

Ответ: $\dfrac{3}{8} + i\dfrac{9}{2}$.

Пример 6.5. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C zdz$*, где C — дуга кубической параболы* $y = 2x^3$*, от точки* $z = 0$ *до точки* $1+2i$.

Решение.

$$\int\limits_C zdz = \int\limits_C xdx - ydy + i\int\limits_C ydx + xdy = \left[y = 2x^3,\ dy = 6x^2dx\right] =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(x - 12x^5\right)dx + i\int\limits_0^1 \left(2x^3 + 6x^3\right)dx = -1,5+2i.$$

Задача 6.6. *Вычислите интеграл* $\int\limits_C z\overline{z}dz$, *где* C — *дуга параболы* $y = 2x^2$, *от точки* $z = 0$ *до точки* $1 + 2i$.
Ответ: $\dfrac{17}{15} + i\dfrac{11}{3}$.

Пример 6.7. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C z^2\overline{z}dz$, *где* C — *кривая, заданная соотношениями:* $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Решение.

$$\int\limits_C z^2\overline{z}dz = \left[z = e^{i\varphi}, dz = ie^{i\varphi},\ \overline{z} = e^{-i\varphi}\ \right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ie^{2i\varphi}d\varphi = -1.$$

Задача 6.8. *Вычислите интеграл* $\int\limits_C (z^2+z\cdot\overline{z})dz$, *где* C — *кривая, заданная соотношениями:* $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$.
Ответ: $-\dfrac{8}{3}$.

Пример 6.9. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z-z_0|=R_0} \dfrac{dz}{z-z_0}$.

Решение.

$$\int\limits_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0} = \left[z = z_0 + R_0e^{i\varphi}; dz = iR_0e^{i\varphi}\cdot d\varphi\right] =$$

$$= i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Отметим, что результат не зависит ни от R_0, ни от z_0.

Задача 6.10. *Вычислите интеграл* $\int\limits_{|z-2i|=3} \dfrac{dz}{z-2i}$.

Ответ: $2\pi i$.

6.2. Задачи для самостоятельного решения.

Вычислите интегралы по указанным кривым на комплексной плоскости (первой указана начальная точка интегрирования).

3*

1. $\int\limits_C |z|^2 dz$, где:
   а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z=-2i$ и $z=2i$;
   б) C — дуга окружности $|z|=2$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.
2. $\int\limits_C z^2 dz$, где:
   а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z=-2i$ и $z=2i$;
   б) C — дуга окружности $|z|=2$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$.
3. $\int\limits_C z dz$, где:
   а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z=0$ и $z=1+i$;
   б) C — дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $z=0$ и $z=1+i$;
   в) C — кривая, состоящая из двух отрезков прямых, последовательно соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.
4. $\int\limits_C \overline{z} dz$, где:
   а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z=0$ и $z=1+i$;
   б) C — дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $z=0$ и $z=1+i$;
   в) C — кривая, состоящая из двух отрезков прямых, последовательно соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.
5. $\oint\limits_{|z|=R} \dfrac{dz}{z}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении).
6. $\oint\limits_{|z|=R} \dfrac{dz}{\overline{z}}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении).

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно-гладкой кривой.

2. Запишите формулу вычисления интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно-гладкой кривой через определенный интеграл.
3. Сформулируйте основные свойства интеграла.
4. Запишите неравенство для модуля интеграла.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^m\,dz$ для различных целых значений m.

§ 7. Теорема Коши

7.1. Вспомогательные положения.

Определение 7.1 *Область g на плоскости называется* ***односвязной****, если для любого замкнутого контура, принадлежащему области g, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит g. Область, которая не является односвязной, называется* ***неодносвязной****, или* ***многосвязной****.*

Формула Грина. Пусть функции действительных переменных $P(x,y)$, $Q(x,y) \in C(\overline{G})$, где $\overline{G}$ — замкнутая область на плоскости, причем полная граница ∂G области G состоит из кусочно-гладких контуров, и частные производные функций P и Q удовлетворяют условию: P_x, P_y, Q_x, $Q_y \in C(G)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

7.2. Теорема Коши.

Теорема 7.1 *(Коши) Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$, в <u>односвязной</u> области g, то для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ выполняется*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\gamma} vdx + udy = [\text{по формуле Грина}] =$$

$$= \iint\limits_{g} (-v_x - u_y)dxdy + i\iint\limits_{g} (u_x - v_y)dxdy =$$

$$= [\text{из условий Коши–Римана: } u_x = v_y; u_y = -v_x] =$$
$$= \int\limits_g\int (u_y - u_y)dxdy + i\int\limits_g\int (v_y - v_y)dxdy = 0. \qquad (7.1)$$

Замечание 7.1 *Требование односвязности области является существенным.*

Например, рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z}$, где область g представляет собой круговое кольцо $1 < |z| < 3$. При этом, несмотря на то, что функция $f(z)$ является аналитической в рассматриваемой области, $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$.

Определение 7.2 *Функция называется **аналитической в замкнутой области** $\overline{g}$ $(f(z) \in C^\infty(\overline{g}))$, если $f(z) \in C^\infty(g)$ и $f(z) \in C(\overline{g})$. Определение справедливо и для многосвязной области.*

Теорема 7.2 (*Коши*) *Если $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$ и g — односвязная область, то интеграл $\int\limits_{\partial g} f(z)dz = 0$, где ∂g — граница области.*

Доказательство приведено в книге А.В. Бицадзе «Основы теории аналитических функций комплексного переменного».

Теорема 7.3 (*теорема Коши для многосвязной области*). *Пусть $f(z) \in C^\infty(g)$, где g — многосвязная область, ограниченная извне контуром C_0, а изнутри — контурами C_1, C_2, $\ldots, C_n$ и пусть $f(z) \in C(\overline{g})$. Тогда $\int\limits_C f(z)dz = 0$, где C — полная граница области g, проходимая в положительном направлении.*

Доказательство. Проведем гладкие кривые $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, соединяющие контур C_0 с контурами C_1, C_2, $\ldots, C_n$, не пересекающиеся между собой и лежащие внутри области g (рис. 19). Тогда область, ограниченная кривыми C_0, C_1, $C_2 \ldots, C_n$ и кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, проходимыми дважды в противоположных направлениях, оказывается **односвязной**. По теореме 7.2 интеграл по границе этой области равен 0. При этом интегралы по вспомогательным кривым $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ проходятся дважды в противоположных направлениях, и их суммарный вклад равен нулю. Поэтому

$$\int\limits_{C_0^+} f(z)\,dz + \int\limits_{C_1^-} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2^-} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{C_n^-} f(z)\,dz = 0.$$

Следствие 7.1 *Если g — односвязная область и $f(z) \in C^\infty(g)$, то для любых z_0, $z \in g$ интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ не зависит от пути интегрирования.*

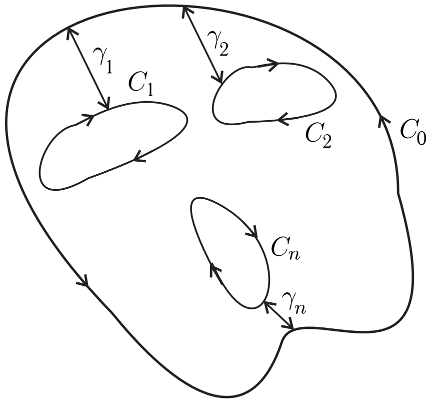


Рис. 19.

7.3. Неопределенный интеграл от функции комплексной переменной.

Заметим, что при фиксированном значении z_0 интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ есть функция переменной z.

Теорема 7.4 *Если g — односвязная область, $f(z) \in C(g)$ и для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ выполняется $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$, то существует такая функция $F(z) \in C^\infty(g)$, что $F'(z) = f(z)$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta > 0$, что

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - f(z)\right| = \left\{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z\right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\{f(\xi) - f(z)\}\,d\xi\right| \leqslant \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

при $\Delta z < \delta$. Тогда существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta z} = F'(z) = f(z) \in C(g)$, следовательно, $F(z) \in C^\infty(g)$.

Определение 7.3 *Пусть $f(z) \in C(g)$. Функция $F(z) \in C^\infty(g)$ называется* ***первообразной*** *функции $f(z)$ в области g, если $F'(z) = f(z)$.*

Если существует одна первообразная $F(z)$, то существует и бесконечно много первообразных, но все они различаются на аддитивную постоянную:

$$F_1'(z) - F_2'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_2(z) = F_1(z) + C.$$

Определение 7.4 *Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется* ***неопределенным интегралом***.

7.4. Основные формулы интегрирования.

1. Формула Ньютона–Лейбница. Если g — односвязная область, $f(z) \in C(g)$ и $\int\limits_\gamma f(z)dz = 0$ для любого замкнутого контура γ в области g, то $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1)$, где $F(z)$ — любая первообразная функции $f(z)$ (рис. 20).

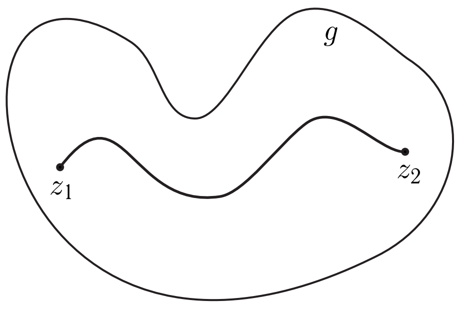


Рис. 20.

2. Формула интегрирования по частям. Если g — односвязная область, $f(z)$, $h(z) \in C(g)$ и для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ верны соотношения $\int\limits_\gamma f(z)dz = 0$ и $\int\limits_\gamma h(z)dz = 0$, то
$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\xi)h'(\xi)d\xi = f(z)h(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} h(\xi)f'(\xi)d\xi$$
для любых точек z_1, $z_2 \in g$.

3. Пусть g — односвязная область, $f(z) \in C^{\infty}(g)$ и для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ имеет место $\int\limits_{\gamma} f'(\xi)d\xi = 0$. Тогда

$$\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f'(\xi)d\xi = f(z+\Delta z) - f(z).$$

Если в качестве пути интегрирования взять прямолинейный отрезок, соединяющий точки z и $z+\Delta z$, тогда $\xi = z + \theta\Delta z$; $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; $d\xi = \Delta z d\theta$, то получим *формулу Коши–Адамара:*

$$f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta z \cdot \int\limits_{0}^{1} f'\left(z + \Delta z \cdot \theta\right)d\theta.$$

Важно помнить. При вычислении интеграла от аналитической функции контур интегрирования можно произвольно деформировать, но так, чтобы он не выходил из области аналитичности подынтегральной функции. Деформируя контур интегрирования так, как это допускается теоремой Коши, можно упростить вычисление некоторых интегралов.

Пример 7.1. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{C} \frac{dz}{z}$ *по контуру, изображенному на рисунке* 21.

Решение. Обратим внимание на то, что контур вообще не задан

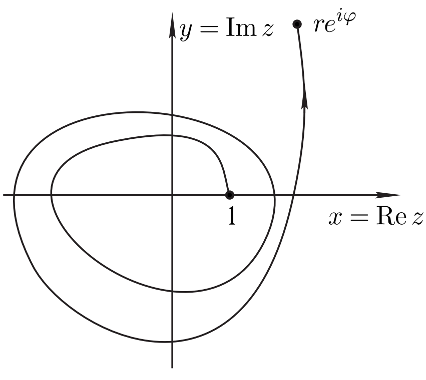


Рис. 21.

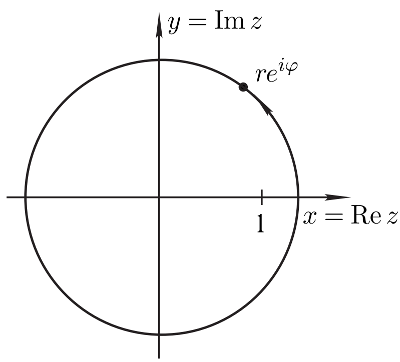


Рис. 22.

какой-либо формулой. Важны его начальная и конечная точки, а также то, сколько раз он обходит вокруг начала координат.

Заметим, что интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z}$ легко вычисляется по контурам двух типов: во-первых, вдоль действительной оси: $dz = dx$, $\int\limits_1^x \frac{dz}{z} = \ln x \ \ (x > 0)$; во-вторых, что менее очевидно, по дуге окружности L с центром в точке $z = 0$ и заданным радиусом $r > 0$ (рис. 21). На этой окружности $z = re^{i\varphi}$, $dz = ire^{i\varphi}d\varphi$, так что $\int\limits_L \frac{dz}{z} = i\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$. Поэтому надо деформировать контур в окружность с центром в нуле и радиусом r так, чтобы окружность проходилась дважды целиком и еще по дуге в φ радиан (рис. 22).

Ответ: $\ln r + 4\pi i + i\varphi$.

Пример 7.2. *Вычислить* $\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz.$

Решение.

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \left\{z = a + re^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ dz = ire^{i\varphi}d\varphi\right\} = \\ = \int\limits_0^{2\pi} ir^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}d\varphi.$$

Так как

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi = \begin{cases} \dfrac{e^{2\pi i(n+1)} - 1}{i\,(n+1)} = 0, & \text{при } n \neq -1, \\ \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, & \text{при } n = -1, \end{cases}$$

то $\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$

Таким образом, аналитичность подынтегральной функции внутри замкнутого контура интегрирования *не является необходимым условием равенства нулю* интеграла по этому контуру.

Задача 7.3. *Вычислите интеграл* $\int\limits_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$ *по дуге окружности* $|z| = 1$ *против часовой стрелки.*
Ответ: $\frac{\pi^4}{64}$.

§ 8. Интеграл Коши

8.1. Интегральная формула Коши.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в замкнутой области g. Рассмотрим $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$, определенную во всех точках области g, кроме точки z_0. Если в области g взять такой замкнутый контур γ (рис. 23), что точка z_0 находится внутри ограниченной им области, то $\varphi(z)$ будет аналитической в *двухсвязной* области, заключенной между ∂g и γ. По теореме Коши для многосвязной области интеграл от аналитической функции $\varphi(z)$ по $\partial g + \gamma$ равен нулю:

$$\int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \int\limits_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = 0.$$

Изменяя направление обхода кривой γ на положительное,

$$\int\limits_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = -\int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

получаем

$$\int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi. \qquad (8.1)$$

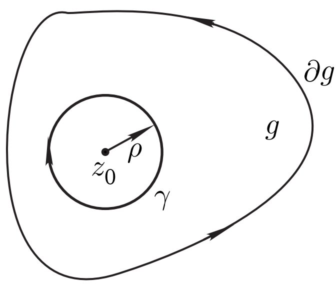


Рис. 23.

Поскольку интеграл, стоящий в левой части равенства (8.1), не зависит от выбора контура γ, то этим свойством обладает и интеграл, стоящий справа. Удобно в качестве контура интегрирования γ^+ выбрать окружность γ_ρ радиуса ρ с центром в точке z_0. Положив $\xi = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $d\xi = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ на контуре γ_ρ, имеем

$$\int\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = i \int\limits_0^{2\pi} f(\xi) d\varphi =$$

$$= i \int\limits_0^{2\pi} [f(\xi) - f(z_0)]\, d\varphi + i \int\limits_0^{2\pi} f(z_0)\, d\varphi \quad (8.2)$$

Устремим $\rho \to 0$, тогда $\xi(\rho) \to z_0$. Так как $f(z)$ — аналитическая, а, следовательно, и непрерывная функция в области g, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $|\xi(\rho) - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$. А это значит, что при $\rho \to 0$ первый интеграл в правой части (8.2) стремится к нулю, а второй не зависит от ρ и равен $2\pi f(z_0)$. Тогда, переходя в (8.1) к пределу при $\rho \to 0$, имеем

$$\int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0} = 0 + 2\pi i f(z_0),$$

откуда получаем ***интегральную формулу Коши:***

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi. \quad (8.3)$$

Итак, значения аналитической функции на некотором замкнутом контуре определяют значение функции в любой точке области, ограниченной этим контуром. Это еще раз показывает, насколько сильным является требование аналитичности функции.

Пример 8.1. *Вычислить интеграл:*

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz;$ *б)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^3} dz.$

Решение. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz = \pi i \cos(0) = 2\pi i.$

б) Отметим, что функция $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^2}$ не определена в нуле. Однако, если доопределить ее в точке $z = 0$ по непрерывности:

$f(0) = 1$, она станет аналитической на всей плоскости и к ней можно применить формулу Коши:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^3} dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{\sin^2 z}{z^2}}{z} dz = \left\{ f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2};\ z_0 = 0 \right\} =$$

$$= 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

Задача 8.2. *Вычислите интеграл: а)* $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$; *б)* $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz.$

Ответ: а) $2\pi i$; б) $2\pi i$.

Пример 8.3. *Вычислить интеграл:*

а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+4z+3} dz$; *б)* $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2+4z+3} dz.$

Решение.

$$а)\ \int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+4z+3} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{\cos z}{z+3}}{z+1} dz =$$

$$= \left[f(z) = \frac{\cos z}{z+3};\ z_0 = -1 \right] = 2\pi i f(-1) = \pi i \cos(-1),$$

так как внутрь контура попадает только одна точка $z = -1$.

б) Так как в этом примере внутрь контура $|z| = 4$ попадают оба нуля знаменателя $z = -1$ и $z = -3$, то для вычисления интеграла приведем подынтегральную функцию к следующему виду:

$$\frac{\cos z}{z^2+4z+3} = \frac{\cos z}{2(z+1)} - \frac{\cos z}{2(z+3)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2+4z+3} dz = \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z+1} dz - \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z+3} dz =$$

$$= \Big[f(z) = \cos z,\ \ z_0 = -1 \text{ и } z_0 = -3 \Big] = \pi i \cdot \big(\cos(-1) - \cos(-3) \big).$$

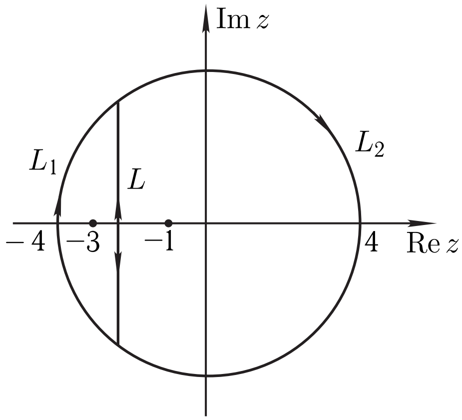


Рис. 24.

Возможно и другое решение, без разложения на простейшие дроби. Разобьем контур интегрирования на два контура L_1 и L_2, соединенныt кривой L так, чтобы внутрь каждого замкнутого контура L_1 и L_2 попадала только одна из точек $z=-1$ и $z=-3$ (рис. 24). При этом кривая L проходится дважды в противоположных направлениях, поэтому вклад в интеграл не вносит. Получим:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2+4z+3}\,dz = \Big[C:(|z|=4) \Leftrightarrow L_1+L_2, \text{ см. рис. } 24\Big] =$$

$$= \int\limits_{L_1} \frac{\dfrac{\cos z}{z+3}}{z+1}dz + \int\limits_{L_2} \frac{\dfrac{\cos z}{z+1}}{z+3}dz =$$

$$\left[\text{полагая } f(z)=\frac{\cos z}{z+3},\ z_0=-1 \text{ и } g(z)=\frac{\cos z}{z+1},\ z_0=-3\right] =$$

$$= 2\pi i\big(f(-1)+g(-3)\big) = \pi i\cdot\big(\cos(-1)-\cos(-3)\big).$$

Задача 8.4. *Вычислите интеграл: а)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{2z^2+5z-3}dz;$

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{e^z}{2z^2+5z-3}dz.$

Ответ: а) $\dfrac{2\sqrt{e}\,\pi i}{7}$; б) $2\pi i\left(\dfrac{\sqrt{e}}{7}-\dfrac{1}{7e^3}\right)$.

Замечание 8.1 *Из интегральной формулы Коши вытекают следующие утверждения.*

1. *Формула (8.3) верна как для односвязной, так и для многосвязной области, только в последнем случае ∂g^+ — полная граница области, проходимая в положительном направлении.*

2. *Интеграл вида* $I(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial g^+} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$ *имеет смысл для любого положения точки* z_0 *на комплексной плоскости при условии, что* $z_0 \notin \partial g$. *Если* $z_0 \in g$, *то* $I(z_0) = f(z_0)$. *Если* $z_0 \notin g$, *то* $I(z_0) = 0$, *поскольку в этом случае подынтегральная функция* $\varphi(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - z_0} \in C^\infty(g)$ *является аналитической всюду в области* g.
3. *При* $z_0 \in \partial g$ *интеграл в обычном смысле не существует, однако, при дополнительных требованиях на поведение функции* $f(\xi)$ *на контуре границы, этому интегралу может быть придан определенный смысл. Так, если* $f(\xi)$ *удовлетворяет на границе области* ∂g ***условию Гельдера:*** $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < C|\xi_1 - \xi_2|^\delta$, $0 < \delta < 1$ *(функция Гельдер - непрерывна), то существует **главное значение по Коши** интеграла* $I(z_0)$*:*

$$V.p.\ \ I(z_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

где γ_ε *представляет собой часть контура* ∂g, *лежащую **вне** круга* $|\xi - z_0| < \varepsilon$. *При этом*

$$V.p.\ \ I(z_0) = \frac{1}{2} f(z_0).$$

Окончательно для $f(z) \in C^\infty(g)$ *можно записать:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in g; \\ \frac{1}{2} f(z_0), & z_0 \in \partial g\ \ (V.p.)\,; \\ 0, & z_0 \notin g. \end{cases}$$

4. *Формула Коши верна и для любого контура* $C^+ \subset g$, *который можно стянуть к* z_0, *оставаясь внутри* g.

Из формулы Коши можно получить ряд важных соотношений.

8.2. Формула среднего значения. Пусть z_0 — некоторая внутренняя точка односвязной области g и $f(z) \in C^\infty(g)$. Для окружности C_R с центром в точке z_0 и радиусом R, целиком принадлежащей области g, справедлива формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(\xi) dl,$$

где dl — элемент длины дуги окружности C_R, $C_R \subset g$.

8.3. Принцип максимума модуля.

Теорема 8.1 *Если $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$ и $f(z) \neq const$, то $|f(z)|$ достигает своего максимального значения на границе ∂g области g.*

Доказательство. В области g существует такая точка z_0, что $|f(z_0)| = M \geqslant |f(z)|$ для любой точки $z \in \overline{g}$, так как действительная функция достигает своего максимума в замкнутой ограниченной области. Пусть z_0 — внутренняя точка области g. Запишем формулу среднего значения в некотором круге K_0 радиуса R с центром в z_0:

$$M = \left| \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(\xi) dl \right| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} |f(\xi)|\, dl \leqslant M \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} dl = M,$$

где C_R — окружность $|z - z_0| = R$, dl — элемент длины дуги окружности C_R, $C_R \subset g$.

Следовательно, $\displaystyle \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} |f(\xi)|\, dl = M.$

Докажем, что отсюда следует $|f(\xi)| = M$ для всех точек окружности C_R. Действительно, мы считаем, что $|f(\xi)| \leqslant M$ для $\forall \xi \in C_R$. Предположим, что в некоторой точке $\xi_0 \in C_R$ выполняется условие $|f(\xi_0)| < M$. Тогда, в силу непрерывности $f(\xi)$ на C_R существует дуга γ_R ($\xi_0 \in \gamma_R$) (некоторая окрестность точки ξ_0 на кривой), на которой $|f(\xi)| \leqslant M - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (а на остальной части окружности $|f(\xi)| = M$ для $\forall \xi \in C_R \backslash \gamma_R$). Тогда

$$M = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} |f(\xi)|\, dl = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\gamma_R} |f(\xi)|\, dl + \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R \backslash \gamma_R} |f(\xi)|\, dl \leqslant$$

$$\leqslant (M - \varepsilon) L_{\gamma_R} \frac{1}{2\pi R} + M(2\pi R - L_{\gamma_R}) \frac{1}{2\pi R} = M - \varepsilon L_{\gamma_R} \frac{1}{2\pi R} < M,$$

где L_{γ_R} – длина дуги γ_R. Такое неравенство неверно, значит на окружности C_R нет точки, в которой $|f(\xi)| < M$. Следовательно, $|f(\xi)| = M$ на C_R, а значит, и во всем круге K_0. Для доказательства того, что неравенство верно во всех внутренних точках области, возьмем произвольную точку z^*, соединим ее с z_0 кривой, целиком лежащей в области, и построим конечную систему перекрывающихся кругов, как показано на рис. 25. Проводя на каждом из кругов $K_1 \ldots K_n$ рассуждения, аналогич-

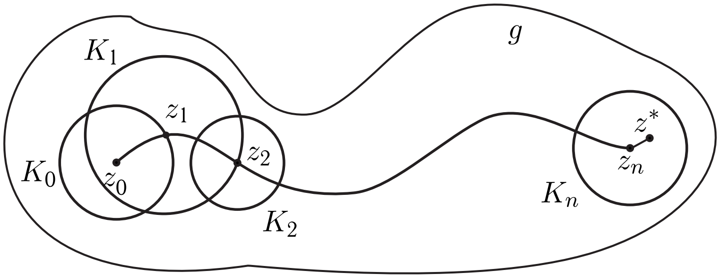


Рис. 25.

ные проведенным для круга K_0, получим, что $|f(z^*)| = M$. В силу произвольности выбора точки z^* получаем, что $|f(z)| = M$ во всей области. Применяя условие Коши-Римана, из условия $|f(z)| = M$ получаем, что и $\arg f(z)$ является постоянным на границе области.

Замечание 8.2

1. *Если $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$ и $f(z) \neq 0$ для $\forall z \in \overline{g}$, то имеет место принцип **минимума модуля**. Для доказательства достаточно рассмотреть функцию $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ и воспользоваться для нее принципом максимума модуля.*
2. *Теорема верна как для односвязной, так и для многосвязной области.*

8.4. Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислите интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0}$. Объясните, почему результат не зависит ни от R, ни от z_0.
2. Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши:
   а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2} \frac{\sin z\, dz}{z(1-z)^2}$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=3} \frac{z dz}{z^4-1}$.
3. Найдите все возможные значения интеграла $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ (C — замкнутая простая кусочно-гладкая кривая, <u>не</u> проходящая через точки $z = 0$, $z = 1$ и $z = -1$) при различных положениях контура C.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.
2. Сформулируйте теорему Коши для ограниченной области.

3. Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.
4. Сформулируйте теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.
5. Сформулируйте определение первообразной для функции $f(z)$, заданной в некоторой области.
6. Запишите формулу Ньютона–Лейбница и укажите условия ее применимости.
7. Запишите формулу Коши–Адамара. Сформулируйте условия ее применимости.
8. Запишите интегральную формулу Коши для односвязной области.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Является ли функция $f(z) = \int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\xi}{\xi - z} d\xi$, где L —окружность $|z| = 1$, проходимая против часовой стрелки, аналитической в круге $|z| < 1$? Ответ обоснуйте.
2. Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z}$. Поясните, почему, несмотря на то, что интегрирование ведется по замкнутому контуру, целиком лежащему в области $1 < |z| < 3$, которая является областью аналитичности функции $f(z) = \frac{1}{z}$, интеграл отличен от нуля.
3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, причем $f(z) \equiv \text{const} \neq 0$ при $|z| = 1$. Докажите, что тогда либо $f(z) \equiv \text{const}$ в круге $|z| < 1$, либо $f(z)$ имеет нуль в этом круге.
   Совет. Воспользуйтесь принципом максимума модуля аналитической функции.

§ 9. Интеграл типа Коши

Пусть L — кусочно гладкая кривая конечной длины и $f(\xi) \in C(L)$. Тогда при $z \notin L$ существует функция $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ — ***интеграл типа Коши.***

Теорема 9.1 *В любой точке $z \notin L$ определена дифференцируемая функция $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$, причем*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi.$$

Доказательство. Пусть точки $z = z_0$ и $z = z_0 + \Delta z$ не принадлежат кривой L. Так как $z_0 \notin L$, то существуют такие $\delta_0 > 0$ и $d_0 > 0$, что замкнутый круг $|z - z_0| \leqslant \delta_0$ будет находиться на конечном расстоянии d_0 от кривой L. Пусть $|\Delta z| < \delta_0$. Тогда для $\forall \xi \in L$: $|\xi - z_0| > d_0$, $|\xi - z_0 - \Delta z| > d_0$. Отсюда имеем

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_L f(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z_0}\right)d\xi -\right.$$

$$\left.-\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_L f(\xi)\left(\frac{1}{(\xi - z_0 - \Delta z)(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^2}\right)d\xi\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_L \frac{f(\xi)\Delta z d\xi}{(\xi - z_0 - \Delta z)(\xi - z_0)^2}\right| \leqslant \frac{\max\limits_{\xi \in L}|f(\xi)| \cdot |\Delta z|\, L}{2\pi d_0^3} < \varepsilon$$

при $|\Delta z| < \delta < \delta_0$, следовательно, существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi$. Итак, в точке $z = z_0$ определена производная $F'(z_0)$.

Замечание 9.1 *Непрерывность $F'(z)$ в точках $z \notin L$ доказывается аналогично с помощью оценки $|\Delta F'(z)|$.*

Теорема 9.2 *При* $z \notin L$ *функция* $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ *имеет непрерывные производные* n*-ого порядка для любого* n*, причем*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi.$$

Доказательство проводится методом математической индукции, опираясь на теорему 9.1.

Теорема 9.3 *Если* $f(z) \in C^\infty(g)$*, то для любого* n *и для* $\forall z \in g$ *существует* $f^{(n)}(z) \in C^\infty(g)$.

9.1. Теорема о существовании производных любого порядка у аналитической функции. Доказательство. Пусть $z_0 \in g$. Построим замкнутый контур L, содержащий z_0, который можно стянуть к точке z_0, оставаясь все время в области g. Тогда в силу интегральной формулы Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi,$$

но это интеграл типа Коши, поэтому

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi.$$

Следовательно, существует $f^{(n)}(z) \in C^\infty(g)$.

Важно помнить. Если функция $f(z)$ является аналитической в области g, то у нее в этой области существуют непрерывные производные всех порядков. Это существенное отличие от функции действительной переменной, для которой из существования первой производной, вообще говоря, не следует существование высших производных. Например, $y(x) = x|x| \in C(R)$: $y'(x) = 2|x| \in C(R)$, $y''(0)$ не существует.

Пример 9.1. *Вычислить* $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\xi e^\xi}{(\xi - z)^2}d\xi$, *если точка* z *находится внутри контура* L.

Решение. По формуле Коши для производных аналитической функции

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi.$$

Поэтому $f'(z) = \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$, и для $f(z) = ze^z$ получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\xi e^{\xi}}{(\xi - z)^2}\, d\xi = \frac{1}{1!}\,\frac{d}{dz}\,(ze^z) = e^z(z+1).$$

Ответ: $e^z(z+1)$.

Задача 9.2. *Вычислите* $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{\xi \sin\xi}{(\xi - z)^3} d\xi$, *если точка* z *находится внутри контура* L.

Ответ: $\cos z - \dfrac{z}{2}\sin z$.

Задача 9.3. *Вычислите* $\displaystyle\int\limits_L \frac{e^{\xi}}{(\xi - z)^4} d\xi$, *если точка* z *находится внутри контура* L.

Ответ: $\dfrac{\pi i}{3} e^z$.

Теорема 9.4 (<u>*Мореры*</u>) *Если* $f(z) \in C(g)$, g *— односвязная область и* $\displaystyle\int\limits_L f(z)dz = 0$ *для любого* $L \subset g$, *где* L *— замкнутый контур, который можно стянуть в точку, оставаясь в области* g, *то* $f(z) \in C^{\infty}(g)$.

9.2. Теоремы Мореры и Лиувилля. Доказательство. При условиях теоремы существует $F(z) = \displaystyle\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \in C^{\infty}(g)$ (теорема 7.4), где z_0 и z — произвольные точки области g, а интеграл берется по любой кривой в области g, соединяющей эти точки. При этом $F'(z) = f(z)$. Но производная аналитической функции сама является аналитической функцией, то есть существует $F''(z) \in C^{\infty}(g)$, а именно $F''(z) = f'(z)$.

Замечание 9.2

1. *Теорема Мореры* 9.4 *является в некотором смысле обратной к теореме Коши.*
2. *Теорема* 9.3 *и теорема Мореры* 9.4 *справедливы и для многосвязных областей.*

Теорема 9.5 (<u>*Лиувилля*</u>) *Пусть* $f(z)$ *— аналитическая на всей комплексной плоскости и для любого* z *существует такое* M, *что* $|f(z)| \leqslant M$ *(то есть* $|f(z)|$ *равномерно ограничен на всей* *комплексной плоскости), то* $f(z) \equiv const$.

Доказательство. По теореме 9.1 $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_R}\dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$, где $C_R : |\xi - z| = R$. По условию теоремы $\exists M : |f(z)| \leqslant M$ *независимо* от R, тогда

$$|f'(z)| \leqslant \frac{2\pi RM}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}.$$

Так как R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)| = 0$. В силу произвольности выбора z $|f'(z)| = 0$ на всей комплексной плоскости, следовательно, $f(z) \equiv$ $\equiv const$ для всех значений z.

Замечание 9.3 *Возможна другая формулировка теоремы Лиувилля: если* $f(z) \in C^\infty$ *и* $f(z) \neq const$, *то при* $z \to \infty$ $|f(z)| \to \infty$.

Определение 9.1 *Функция, аналитическая на всей комплексной плоскости, называется* ***целой*** *функцией.*

Важно помнить:

Целая функция, не равная константе, не может быть ограничена по абсолютной величине. Так, например, целые функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены по модулю.

9.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, причем $\sup|f(z)| \leqslant 2$, $f\,(1) = 1$. Найдите $f(i)$.
2. Существует ли функция $f(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$? Ответ обоснуйте.
3. Докажите теорему Лиувилля, вычислив интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$, $|a| < R, |b| < R$, и произведя его оценку при $R \to \infty$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение интеграла типа Коши.
2. Сформулируйте теорему о среднем.
3. Сформулируйте теорему Лиувилля.
4. Сформулируйте теорему Мореры.
5. Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.
6. Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Имеет ли функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ первообразную в области $0 < |z| < 2$? Ответ обоснуйте.
2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant R$. Докажите, что для любой точки z, принадлежащей кругу $|z| < R$, выполнено неравенство $|f(z)| \leqslant \dfrac{MR}{R-|z|}$, где $M = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$.
3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, причем $f(z) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ при $|z| = 1$. Докажите, что тогда либо $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в круге $|z| < 1$, либо $f(z)$ имеет нуль в этом круге.
   Указание: воспользуйтесь принципом максимума модуля аналитической функции.

§ 10. Числовые и функциональные ряды

10.1. Числовые ряды. Пусть задана последовательность комплексных чисел a_k. Составим из нее последовательность сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Назовем числовым рядом выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, тогда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется частичной суммой этого ряда.

Определение 10.1 *Числовой ряд называется* ***сходящимся****, если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *в этом случае предел последовательности частичных сумм называется* ***суммой ряда*** $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 10.1 (*Необходимое условие сходимости ряда*) *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $a_k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Докажем, что $a_k \to 0$. Воспользуемся критерием Коши сходимости числовой последовательности: для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: для $\forall n \geqslant N$ и $\forall m > 0$ $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$. Если взять $m = 1$, то получим, что

$|S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$, то есть по определению предела последовательности $a_{n+1} \to 0$.

Определение 10.2 *Величину* $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называют ***остатком ряда***.

Теорема 10.2 *Для сходимости числового ряда необходимо и достаточно, чтобы* $r_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $r_n \to 0 \iff |r_n| \to 0$.

Необходимость. По определению $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Поэтому, если ряд сходится, то $|r_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| = |S - S_n| \to 0$.

Достаточность. Пусть $r_n \to 0$. Тогда последовательность $\{r_n\}$ удовлетворяет критерию Коши, то есть $|r_{n+m} - r_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что

$$|S_{n+m} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| = |r_{n+m} - r_n| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм S_n также удовлетворяет критерию Коши, следовательно, сходится.

Определение 10.3 *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *называется* ***абсолютно сходящимся***.

Очевидно, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится. Обратное, вообще говоря, неверно.

Достаточными условиями абсолютной сходимости рядов являются признаки Даламбера и Коши.

Теорема 10.3 (Признак Даламбера) *Если, начиная с некоторого номера* n, *выполняется условие* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant l < 1$, *где* l *— некоторое число, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *сходится. Если, начиная с некоторого номера* n, *выполняется условие* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Признак Даламбера в предельной форме: если существует $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, то при $L < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ *сходится,* при $L > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *расходится,* при $L = 1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

Доказательство. Если конечное число $L < 1$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что верно неравенство $L < 1 - 2\varepsilon$, значит, $L + \varepsilon < < 1 - \varepsilon$. Так как существует $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$:

$$L - \varepsilon < \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < L + \varepsilon < 1 - \varepsilon = q, \quad 0 < q < 1, \quad k \geqslant N,$$

откуда $a_{k+1} < a_k \cdot q < \ldots < a_N \cdot q^{k+1-N}$, то есть ряд мажорируется геометрической прогрессией с положительным знаменателем $q < 1$.

Аналогично доказывается расходимость ряда при $L > 1$.

Теорема 10.4 (признак Коши) *Если найдется номер N, такой, что для любого $n \geqslant N$ $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant l < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сходится. Если найдется номер N, такой, что $\forall n \geqslant N$ $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ расходится.*

Признак Коши в предельной форме. Если существует $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = L$, то при $L < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сходится, при $L > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ расходится, при $L = 1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

Доказательство. Если $L < 1$, то существует $\varepsilon > 0$: $L < 1 - 2\varepsilon$, откуда $L + \varepsilon < 1 - \varepsilon$. Так как существует $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = L$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : L - \varepsilon < \sqrt[k]{|a_k|} < L + \varepsilon < 1 - \varepsilon = q < 1,$$

где $k \geqslant N$, $q < 1$. Значит, $|a_k| < q^k$, то есть ряд мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $q < 1$.
Аналогично доказывается расходимость ряда при $L > 1$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение сходимости числового ряда
2. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда
3. Сформулируйте определение абсолютной сходимости числового ряда
4. Сформулируйте признак Даламбера сходимости ряда и признак Даламбера в предельной форме
5. Сформулируйте признак Коши сходимости ряда и признак Коши в предельной форме

10.2. Функциональные ряды. Пусть в области g задана последовательность функций комплексного переменного $\{u_k(z)\}$.

Определение 10.4 *__Функциональным рядом__, заданным в области g, называется выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$; $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)$ называется частичной суммой этого ряда.*

Определение 10.5 *Если для всех $z \in g$ соответствующий числовой ряд сходится, то в области g определена функция $w(z)$, которая называется **суммой функционального ряда**, а сам ряд называется сходящимся в области g.*

Если ряд сходится в области g, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, z)$, такой, что $\forall n \geqslant N(\varepsilon, z)\ |r_n(z)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z) - \sum\limits_{k=1}^{N} u_k(z)\right| < \varepsilon.$

Теорема 10.5 (*критерий Коши для функциональных рядов*) *Для сходимости функционального ряда необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер $N(\varepsilon, z)$, что $\forall n \geqslant N$ и $\forall m > 0$ выполнялось неравенство $|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$.*

Отметим, что при фиксированном значении z функциональный ряд превращается в числовой и подчиняется всем признакам сходимости числовых рядов.

10.3. Равномерная сходимость функционального ряда.

Определение 10.6 *Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ условие $|r_n(z)| < \varepsilon$ выполняется <u>сразу для всех</u> $z \in g$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ называется **равномерно сходящимся** к функции $f(z)$ в области g (обозначение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$).*

Подчеркнем, что номер N зависит только от ε и не зависит от z.

Очевидно, что равномерно сходящийся ряд является сходящимся; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Теорема 10.6 (*критерий Коши равномерной сходимости ряда*). *Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *сходился равномерно в области* g*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашелся такой номер* $N(\varepsilon)$*, что для* $\forall n \geqslant N$ *и* $\forall m > 0$ *неравенство* $|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ *выполнялось сразу для всех* $z \in g$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно в области g: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $N(\varepsilon)$, что $|f(z) - S_n(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех $z \in g$. Следовательно, $|f(z) - S_{n+m}(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ для $\forall n \geqslant N$ и $\forall m > 0$ сразу для всех $z \in g$.

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что неравенство

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon \tag{10.1}$$

выполняется для всех $n \geqslant N$ и всех $m > 0$ одновременно для всех точек $z \in g$. Тогда в любой точке $z \in g$ выполнен критерий Коши для числового ряда, то есть все числовые ряды сходятся, и в области g определена $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$. Переходя в (10.1) к пределу при $m \to \infty$, получим $|f(z) - S_n(z)| \leqslant \varepsilon$ для $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ и $\forall z \in g$, следовательно, $|r_n(z)| < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ сразу для всех точек $z \in g$.

Теорема 10.7 (*признак Вейерштрасса*). *Если, начиная с некоторого номера* k*, для всех* $z \in g$ *выполняется неравенство* $|u_k(z)| \leqslant a_k$, $a_k > 0$, *и числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *сходится равномерно к* $f(z)$ *в области* g.

Доказательство. Воспользуемся определением равномерной сходимости ряда: $|r_n(z)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| \leqslant$ $\leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$ и любого $z \in g$.

10.4. Теоремы о свойствах равномерно сходящихся рядов.

Теорема 10.8 *Пусть $u_k(z) \in C(g)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ в области g, тогда $f(z) \in C(g)$, то есть равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций сходится к непрерывной функции.*

Доказательство. По определению для непрерывности $f(z)$ требуется, чтобы $\Delta f(z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$ во всех точках области g:

$$|\Delta f(z)| = |f(z+\Delta z) - f(z)| \leqslant |f(z+\Delta z) - S_n(z+\Delta z)| + \\ + |S_n(z+\Delta z) - S_n(z)| + |S_n(z) - f(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

для $|\Delta z| < \delta$, $n \geqslant N$ для всех точек области g (первая и третья оценки следуют непосредственно из равномерной сходимости ряда, а вторая оценка следует из непрерывности функций $u_k(z)$).

Теорема 10.9 *Пусть $u_k(z) \in C(g)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно. Пусть $\gamma \in g$ — кусочно-гладкий контур конечной длины L: $\int\limits_{\gamma} dl = L$, тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} u_k(z)dz$ (равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно).*

Доказательство. $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma} u_k(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\gamma} r_n(z)dz\right| \leqslant$ $\leqslant \int\limits_{\gamma} |r_n(z)|\, dl < \varepsilon_1 L < \varepsilon$, так как в силу равномерной сходимости ряда для любого ε_1 найдется такой номер $N(\varepsilon_1)$, что для всех $n > N$ выполняется $|r_n(z)| < \varepsilon_1$.

Теорема 10.10 (*первая теорема Вейерштрасса*)
Если $u_k(z) \in C^\infty(g)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ в любой замкнутой подобласти $g' \subset g$, то:

1. $f(z) \in C^\infty(g)$;
2. $f^{(p)}(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$ в области g;
3. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$ равномерно сходится к $f^{(p)}(z)$ в любой замкнутой подобласти g' области g.

Доказательство.

1. Пусть γ — замкнутый контур: $\gamma \subset \overline{g}'$, стягивающийся в точку $z \in g'$. Так как $u_k(z) \in C^\infty(g)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ для $\forall z \in \overline{g}'$, то $f(z) \in C(\overline{g}')$ по теореме 10.8. По теореме 10.9 $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} u_k(z)dz$, а так как по теореме Коши интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции равен нулю, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 0 = 0$. Тем самым выполнены условия теоремы Мореры 9.4, значит, $f(z) \in C^\infty(\overline{g}')$, а в силу произвольности $\overline{g}'$ имеем $f(z) \in C^\infty(g)$.
   Отметим, что остаток ряда $r_n(z) = f(z) - S_n(z)$ является аналитической функцией: $r_n(z) \in C^\infty(g)$.
2. Пусть γ — замкнутый контур, $\gamma \subset \overline{g}'$, стягивающийся в точку $z \in g'$. Выше доказано, что $f(z) \in C^\infty(g)$, отсюда по интегральной формуле Коши
$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$
   В силу того, что $\left.\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\xi)\right|_{\xi\in\gamma}$ сходится равномерно к $f(\xi)|_{\xi\in\gamma}$, получаем
$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \left.\frac{u_k(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}\right|_{\xi\in\gamma} = \frac{p!}{2\pi i} \left.\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}\right|_{\xi\in\gamma} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{u_k(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z).$$

Отметим, что $r_n^{(p)}(z) = f^{(p)}(z) - S_n^{(p)}(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$.

3. Пусть γ — замкнутый контур, внутри которого содержится область $\overline{g}'$, такой, что $\forall z \in \overline{g}'$ и $\forall \xi \in \gamma$ выполняется неравенство $|z - \xi| > d > 0$, где d — некоторое произвольное положительное число (очевидно, такой контур и такое число d можно найти). Поскольку $r_n(z)$ является аналитической функцией, верно равенство

$$r_n^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{r_n(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$

В силу равномерной сходимости $r_n(z)$ в рассматриваемой замкнутой области для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $\forall n > N$ выполнено неравенство $|r_n(\xi)| < \dfrac{2\pi d^{p+1}}{k!l}$, где l — длина контура γ. Тогда для остатка ряда $r^{(p)}(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$ верно соотношение

$$|r_n^{(p)}(z)| \leqslant \frac{p!}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{|r_n(\xi)|}{|\xi - z|^{p+1}} dl < \varepsilon,$$

что доказывает справедливость утверждения.

Замечание 10.1 *Из равномерной сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *к* $f(z)$, $z \in \overline{g}$ ***не следует*** *равномерная в этой области сходимость ряда, составленного из производных. Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$ *сходится равномерно к* $f^{(p)}(z)$ *лишь для* $\forall z \in \overline{g}' \subset g$.

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k^2}$ сходится равномерно в круге $|z| \leqslant 1$, а ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^{k-1}}{k}$ не сходится равномерно в круге $|z| \leqslant 1$.

Теорема 10.11 (<u>*вторая теорема Вейерштрасса*</u>)
Пусть $u_k(z) \in C^\infty(\overline{g})$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\xi)$ *сходится к* $f(\xi)$ *равномерно на границе области* g ($\xi \in \partial g$). *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *сходится равномерно к* $f(z)$, $z \in \overline{g}$.
Доказательство. Рассмотрим разность $S_{n+m}(\xi) - S_n(\xi)$, которая является аналитической функцией как линейная комбинация аналитических функций, то есть является аналитической в области g и непрерывной в $\overline{g}$. Тогда из равномерной сходимости ряда на границе области следует, что $|S_{n+m}(\xi) - S_n(\xi)| < \varepsilon$ для любого $\xi \in \partial g$, следовательно, в силу принципа максимума модуля аналитической функции $|S_{n+m}(\xi) - S_n(\xi)| < \varepsilon$ для $\forall z \in \overline{g}$. Значит, для данного ряда выполнен критерий Коши, что доказывает теорему.

§ 11. Степенные ряды

Рассмотрим частный случай функционального ряда — степенной ряд.
Определение 11.1 ***Степенным рядом*** *назовем функциональный ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, *где* z_0 — *фиксированная точка комплексной плоскости,* c_n — *заданные комплексные числа.*

Областью сходимости ряда может быть как единственная точка (например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ сходится только в точке $z = 0$), так и вся комплексная плоскость (например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится при любом z), или часть комплексной плоскости (например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ сходится в области $|z| < 1$).

11.1. Область сходимости степенного ряда.Теорема Абеля. Как будет показано далее, область сходимости степенного ряда определяется видом его коэффициентов c_n. Многие важные свойства функциональных рядов, частным случаем которых являются степенные ряды, имеют место в области равномерной сходимости. Поэтому при исследовании степенного ряда важно установить эту область.

Теорема 11.1 (*теорема Абеля*) *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *сходится в точке* $z_1 \neq z_0$, *то он сходится абсолютно и в любой точке* z, *удовлетворяющей условию* $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, *причем в круге* $|z-z_0| \leqslant \rho$ *любого радиуса* ρ, *меньшего* $|z_1-z_0|$, *ряд* ***сходится равномерно***.

Доказательство. Если ряд сходится в точке z_1, то в силу необходимого условия сходимости числового ряда имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(z_1-z_0)^n = 0$, поэтому существует такая постоянная $A > 0$, что для любого n выполняется неравенство $|c_n(z_1-z_0)^n| < A$. Отсюда $|c_n| < \dfrac{A}{|z_1-z_0|^n}$, следовательно,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\right| < A\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n.$$

По условию теоремы $\left|\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| = q < 1$, значит,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\right| < A\sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

где $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ — сумма сходящейся бесконечной геометрической прогрессии. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится.

При $|z-z_0| \leqslant \rho < |z_1-z_0|$ ряд сходится равномерно по мажорантному признаку Вейерштрасса, так как

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\right| \leqslant A\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\rho}{z_1-z_0}\right|^n,$$

где $\left|\dfrac{\rho}{z_1-z_0}\right| < 1$.

Рассмотрим точную верхнюю грань расстояний от точки z_0 до точек z_1, то есть $\sup|z_1-z_0| = R$, для всех точек z_1 области сходимости ряда. Если $R \neq \infty$, то для $\forall z : |z - z_0| > R$ ряд расходится, то есть $R = \inf |z - z_0|$ для всех точек z, в которых ряд расходится.

Определение 11.2 *Пусть $R > 0$, тогда **областью сходимости степенного ряда** является круг $|z - z_0| < R$, $R = \sup\limits_{z_1} |z_1 - z_0|$, называемый **кругом сходимости степенного ряда. Число** $R > 0$ называется **радиусом сходимости степенного ряда.***

Внутри круга сходимости ряд сходится, вне — расходится, в точках границы $|z - z_0| = R$ может как сходиться, так и расходиться.

Следствия теоремы Абеля.

1. Если степенной ряд ***расходится*** в точке $z_2 \neq z_0$, то он ***расходится*** и при любом z, удовлетворяющем условию $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$. Предполагая противное, получим, что по теореме Абеля ряд должен сходится в любом круге радиуса $\rho < |z - z_0|$, в частности, и в точке z_2, что противоречит условию.
2. Формула Коши–Адамара. Радиус сходимости равен $R = \dfrac{1}{L}$, $L \neq 0$, где верхний предел $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, или $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$. Случай $L = 0$ соответствует бесконечному радиусу сходимости, а $L = \infty$ — радиусу 0, то есть сходимости в единственной точке.

   Доказательство. Пусть $0 < L < \infty$. Так как $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon$.

   С другой стороны, для того же $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много членов последовательности $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}$, для которых $\sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$.

   Надо доказать, что а) ряд сходится в любой точке z_1, удовлетворяющей условию $|z_1 - z_0| < R = \dfrac{1}{L}$ (или, что то же самое, $L \cdot |z_1 - z_0| < 1$);
   б) ряд расходится в любой точке z_2, удовлетворяющей условию $|z_2 - z_0| > R = \dfrac{1}{L}$ (или, что то же самое, $L \cdot |z_2 - z_0 > 1$).
   Докажем это.

а) Пусть точка z_1 удовлетворяет условию $L \cdot |z_1 - z_0| < 1$. Выберем $\varepsilon = \dfrac{1 - L|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|}$, тогда $L + \varepsilon = \dfrac{1 + L|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|}$. Для $\forall n \geqslant N$: $\sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon$, откуда следует, что

$$|z_1 - z_0| \cdot \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1 + L|z_1 - z_0|}{2} = q < 1.$$

Отсюда $|c_n(z_1 - z_0)^n| < q^n$, то есть ряд сходится.
б) Выберем $\varepsilon = \dfrac{L|z_2 - z_0| - 1}{|z_2 - z_0|}$, тогда $L - \varepsilon = \dfrac{1}{|z_2 - z_0|}$. Так как для всех членов ряда с номерами $n > N$ выполнено соотношение $\sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$, то $|z_2 - z_0| \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, откуда $|c_n(z_2 - z_0)^n| > 1$ — ряд расходится.
в) Рассмотрим $L = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для $\forall n \geqslant N$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \dfrac{q}{|z - z_0|}$ для любого z и $0 < q < 1$, откуда $|z - z_0| \sqrt[n]{|c_n|} < q$, значит, $|c_n(z - z_0)^n| < q^n$. Следовательно, ряд сходится для любого z, то есть $R = \infty$.
г) Рассмотрим $L = \infty$. Для любого $M > 0$ существует бесконечно много таких членов последовательности $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}$, что $\sqrt[n]{|c_n|} > M$. Положим $M = \dfrac{q}{|z - z_0|}$ для любого $z \neq z_0$ и $q > 1$, значит, существует бесконечно много членов ряда, для которых верно соотношение $|z - z_0| \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, откуда $|c_n(z - z_0)^n| > 1$. Следовательно, ряд расходится для любого $z \neq z_0$, то есть радиус сходимости ряда $R = 0$.

3. В любом круге $|z - z_0| \leqslant \rho < R$ степенной ряд сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса). Значит, по теореме 10.10 ряд сходится к аналитической функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = f(z) \in C^{\infty}(|z - z_0| < R).$$

Пример 11.1. *Определить круг сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$*:*

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{in}(z+i)^n; \quad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n;$$

$$в)\ \sum_{n=0}^{\infty}(3+i^n)^n z^n; \quad г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n; \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+b^n\right)z^n.$$

Решение. а) $c_n = e^{in}$, тогда $|c_n| = 1$, следовательно, $R = 1 \Rightarrow |z+i| < 1$ — круг сходимости.

б) $c_n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$, тогда $|c_n| = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow |z+i| < \sqrt{2}$ — круг сходимости.

в) $c_n = (3+i^n)^n$. Последовательность $\sqrt[n]{|c_n|}$ состоит из нескольких подпоследовательностей, сходящихся к числам $2; \sqrt{10}; 4$. Следовательно, $R = \dfrac{1}{4} \Rightarrow |z| < \dfrac{1}{4}$ — круг сходимости;

г) $c_n = \dfrac{1}{(in)^n}$, тогда $\sqrt[n]{|c_n|} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow R = \infty \Rightarrow |z| < \infty$ — круг сходимости, то есть ряд сходится для любого z.

д) $c_n = (n+i)$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |z| < 1$ — круг сходимости.

е) $c_n = \left(\dfrac{a^n}{n}+b^n\right)$, тогда $\sqrt[n]{|c_n|} > \max(|a|, |b|) \Rightarrow R = \dfrac{1}{\max(|a|, |b|)} \Rightarrow |z| < \dfrac{1}{\max(|a|, |b|)}$ — круг сходимости.

Задача 11.2. *Определите круг сходимости степенного ряда:*

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty}(z-2i)^n; \qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!(z-2i)^n; \qquad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg} n)^n z^n;$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Ответ: а) $|z-2i| < 1$; б) $|z-2i| = 0$; в) $|z| < \dfrac{2}{\pi}$; г) $|z| < \dfrac{1}{e}$.

11.2. Дифференцирование степенного ряда. Из теоремы Абеля также следует возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда. Степенной ряд можно дифференцировать и интегрировать почленно любое число раз внутри круга сходимости. При этом радиус сходимости не меняется! Получим **формулу для n-ой производной степенного ряда**. Из того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = f(z)$, следует, что $c_0 = f(z_0)$;

из того, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n(z-z_0)^{n-1} = f'(z)$, следует, что $c_1 = f'(z_0)$ и так далее. Методом математической индукции можно доказать, что

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_k \cdot k!(z-z_0)^{n-k} = f^{(k)}(z),$$

где $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Пример 11.3. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n-1}$.

Решение. В области сходимости ряда его можно дифференцировать почленно. Сначала преобразуем ряд: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n-1} =$ $= z\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{n-1} = zF(z)$. Тогда

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \Longrightarrow F(z) = -\ln(1-z) + C, \text{ где } C = 0.$$

Отсюда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n-1} = -z\ln(1-z)$.

Задача 11.4. *Найдите сумму ряда* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} z^n(n-1)$.

Ответ: $\dfrac{z^2}{(1-z)^2}$.

11.3. Формула Тейлора. Поставим вопрос: можно ли функции, аналитической внутри некоторого круга, сопоставить степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции? Ответ на него дает теорема Тейлора.

Теорема 11.2 ***(Тейлора)*** *Если* $f(z) \in C^{\infty}(|z-z_0| < R)$*, то существует единственный степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$*, сходящийся к* $f(z)$ *в круге* $|z-z_0| < R$.

Доказательство. Рассмотрим все точки z, принадлежащие кругу радиуса R: $|z-z_0| < R$. Построим окружность $C_{R'}$ с центром в точке z_0 радиуса $R' < R$, содержащую точку z внутри: для $\forall \xi \in C_{R'}$ $|\xi - z_0| > |z - z_0|$. Так как $f(z) \in C^\infty(|z - z_0| < R')$, то по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Преобразуем $\dfrac{1}{\xi - z}$, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n, \quad (11.1)$$

где знаменатель прогрессии есть $\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}$.

Полученный в (11.1) ряд сходится равномерно по ξ на $C_{R'}$, следовательно, по теореме об интегрировании равномерно сходящегося ряда,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R'}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_{R'}} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, что и доказывает существование и единственность разложения.

Замечание 11.1

1. *Представление функции в виде* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *называют* ***разложением функции в ряд Тейлора*** *с центром в точке* z_0.
2. *В выражении для коэффициентов* $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_{R'}} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, *окружность* $C_{R'}$ *можно заменить на любой замкнутый контур* C, *содержащий внутри себя точку* z_0 *и целиком лежащий в области сходимости ряда.*

3. *В любом круге $|z - z_0| \leqslant \rho < R$ степенной ряд сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса).*
4. *По теореме Вейерштрасса степенной ряд внутри круга сходимости, как и ряд из производных, сходится равномерно, поэтому его можно дифференцировать и интегрировать почленно любое число раз. При этом радиус сходимости не меняется!*

Важно помнить: Ряды Тейлора наиболее употребительных элементарных функций совпадают с разложениями в области действительных чисел (ряд Тейлора с центром разложения в точке $z = 0$ называется рядом Маклорена):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{(сходится при любом } z\text{)};$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{(сходится при любом } z\text{)};$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{(сходится при любом } z\text{)};$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{(сходится в круге } |z| < 1\text{)};$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{(сходится в круге } |z| < 1\text{)}.$$

При разложении функций в ряд, как правило, используются либо приведенные выше представления функций в виде ряда, либо формула бесконечной геометрической прогрессии.

Пример 11.5. *Разложить функцию в ряд Маклорена:*

а) $\sin^2 z$; *б)* $\dfrac{1}{z^2 - z - 2}$; *в)* $\dfrac{z^6}{1 - z^3}$.

Решение.

$$a) \quad \sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

(сходится при любом z);

$$\text{б)} \quad \frac{1}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \text{ (сходится в круге } |z|<1);$$

в) $$\frac{z^6}{1-z^3} = \left\{t = z^3\right\} = \frac{t^2}{1-t} = t^2\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+6}$$

(сходится в круге $|z| < 1$).

Задача 11.6. *Разложите функцию в ряд Маклорена, укажите область сходимости:*
а) $\sin^3 z$; *б)* $\ln(1+z^2)$.

Ответ: а) $\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (сходится при любом z) ;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{n}$ (сходится в круге $|z| < 1$).

Если требуется разложить функцию $f(z)$ в ряд в окрестности точки $z=\infty$, то есть в области $|z|>R$, то заменой $w=\frac{1}{z}$ задача сводится к предыдущей: надо разложить функцию $f\left(\frac{1}{w}\right)$ в ряд в окрестности точки $w=0$.

Пример 11.7. *Разложить в ряд по степеням z в окрестности точки $z=\infty$:*
а) $\frac{1}{z^2-z-2}$; *б)* $\frac{z^6}{1-z^3}$.

Решение.

а) $$\frac{1}{z^2-z-2} = \frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{z^{n+1}},$$

ряд сходится в области $|z| > 2$.

б) $$\frac{z^6}{1-z^3} = \left[t = z^3\right] = \frac{-t}{1-\frac{1}{t}} = -t\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^n =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} t^{1-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{3-3n},$$

ряд сходится в области $|z| > 1$.

Задача 11.8. *Разложите* $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}$ *в ряд по степеням* z *в окрестности точки* $z = \infty$ *.*

Ответ: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$.

В некоторых задачах можно воспользоваться почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда внутри круга сходимости.

Пример 11.9. *Разложить в ряд по степеням* z *в окрестности точки* $z = 0$ *(ряд Маклорена):*

а) $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3}$, *б)* $f(z) = \ln(1+z)$.

Решение. а) Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$, которая раскладывается в ряд $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Отметим, что $g''(z) = f(z)$.

Тогда, дифференцируя почленно ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, получаем

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, z^{n-2}.$$

б) $f(z) = \ln(1+z)$. Заметим, что $f'(z) = \dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$.

Интегрируя почленно этот ряд, имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} + C.$$

Поскольку $f(0) = 0$, то следует положить $C = 0$.

Задача 11.10. *Разложите в ряд Маклорена* $f(z) = \operatorname{arctg} z$.

Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$.

11.4. Задачи для самостоятельного решения.

1. Определите область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{1-i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{in} (z-2)^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n (z+1)^n$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in)\ (z-i)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi i}{n}(z+1-i)^n$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}\dfrac{i}{n}(z+i)^n$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$;

з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (z+2)^n$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в указанной точке. Найдите радиус сходимости полученного ряда.

а) $f(z) = \dfrac{(1+z)^2}{z}$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=-1$;

б) $f(z) = \dfrac{(z-1)^2}{2-z}$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=0$;

в) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=1$;

г) $f(z) = \cos z$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=-\dfrac{\pi}{4}$;

д) $f(z) = \sin(2z+1)$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=-1$;

е) $f(z) = \dfrac{1}{3z+1}$ с центром в точке $z=-2$; с центром в точке $z=0$;

ж) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+i}$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=1$;

з) главную ветвь $f(z) = \ln z$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=-1$;

и) главную ветвь $f(z) = \ln(2-z)$ с центром в точке $z=0$; центром в точке $z=1$.

3. Запишите 3 первых ненулевых члена разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$ (ряд Маклорена): а) $f(z) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{z}}{1+z^2}$; б) $f(z) = \frac{\cos\sqrt{z}}{1+z^2}$; в) $f(z) = \operatorname{tg} z$; г) $f(z) = \ln\cos z$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда.
2. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
3. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
4. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
5. Сформулируйте определения степенного ряда, радиуса и круга сходимости степенного ряда.
6. Сформулируйте теорему Абеля о степенных рядах.
7. Сформулируйте теорему Коши–Адамара о степенных рядах.
8. Запишите формулу Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
9. Сформулируйте теорему об аналитичности суммы степенного ряда.
10. Сформулируйте теорему о представлении аналитической функции рядом Тейлора.
11. Запишите дифференциальную и интегральную формулы для коэффициентов разложения аналитической функции в степенной ряд.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.
2. Опишите множество особых точек суммы степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ на границе его круга сходимости.
3. Найдите радиус сходимости ряда Маклорена функции $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$.

4. Найдите область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} +$
$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+0,5}}$

§ 12. Единственность определения аналитической функции

12.1. Правильные и особые точки. Пусть функция $f(z)$ задана в области g, за исключением, быть может, некоторых изолированных точек.

Определение 12.1 *Точка $z_0 \in g$ называется* ***правильной точкой*** *функции $f(z)$, заданной в области g, если существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, сходящийся к $f(z)$ в области $g \cap |z-z_0| < \rho(z_0)$, где $\rho(z_0) > 0$ — радиус сходимости данного степенного ряда. Все остальные точки области g будем называть* ***особыми точками*** *функции $f(z)$.*

Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$, то все точки $z \in g$ — **правильные** точки $f(z)$. Если $f(z)$ задана в замкнутой области g, то граничные точки могут быть как правильными, так и особыми. Очевидно, что все точки границы, лежащие внутри круга сходимости степенного ряда Тейлора, являются правильными точками.

Пример 12.1. *Найти область сходимости ряда $f(z) = \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ и показать, что на границе круга сходимости есть как правильные, так и особые точки функции $f(z)$.*

Решение. Все точки $|z| < 1$ — правильные. На границе области сходимости есть как правильные точки (например, $z = 1$), так и особые (например, $z = -1$).

Задача 12.2. *Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$ найдите область сходимости и покажите, что на границе круга сходимости есть как правильные, так и особые точки функции $f(z)$.*

Ответ: сходится в области $|z| < 1$, на границе есть как особые точки, например, $z = \pm i$, так и правильные, например, $z = \pm 1$.

Определение 12.2 *Пусть $f(z) \in C^{\infty}(g)$, $z_0 \in g$ и $f(z_0) = 0$, тогда z_0 — **нуль аналитической функции**. При этом, если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, то $c_0 = 0$. Если $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, а $c_n \neq 0$, то говорят, что z_0 — **нуль n-го порядка.***

12.2. Нули аналитической функции. Заметим, что в нуле n-го порядка $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$, поэтому $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z - z_0)^n f_1(z)$, $f_1(z_0) \neq 0$.

Теорема 12.1 *(о нулях аналитической функции) Пусть $f(z) \in C^{\infty}(g)$ обращается в нуль в бесконечном множестве различных точек, имеющем предельную точку, или точку сгущения $z^* \in g$. Тогда $f(z) \equiv 0$ для любого значения $z \in g$.*

Доказательство. В силу непрерывности $f(z)$ имеем $f(z^*) = 0$, из условия аналитичности функции получаем ее представление в виде степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z^*)^n,$$

где $|z - z^*| < \rho(z^*)$ (радиус сходимости не меньше расстояния от z^* до границы области). Следовательно, $c_0 = 0$, и

$$f(z) = (z - z^*) f_1(z),\ f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z^*)^{n-1}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что $c_n = 0$ для всех n. Итак, так как все коэффициенты разложения в ряд Тейлора равны 0, то $f(z) \equiv 0$ в круге $|z - z^*| < \rho(z^*)$, где $\rho(z^*)$ не меньше, чем расстояние от z^* до границы области g.

Тождественное равенство $f(z) \equiv 0$ во всей области g доказывается аналогично доказательству принципа максимума. Для этого достаточно показать, что $f(z^{**}) = 0$, где $z^{**} \in g$ — произвольная точка, лежащая *вне* круга $|z - z^*| < \rho(z^*)$. Соединим z^* и z^{**} спрямляемой кривой L, целиком лежащей в области g и отстоящей от границы области на расстоянии $d > 0$ (рис. 26). Поскольку любую точку круга $|z - z^*| < \rho(z^*)$, лежащую внутри g, можно рассматривать как предел последовательности нулей функции $f(z)$, то, выбрав в качестве нового центра разложения последнюю точку $z = z_1$ пересечения кривой L с окружностью $|z - z^*| = \rho(z^*)$, получим, что $f(z) \equiv 0$ внутри круга $|z - z_1| < \rho(z_1)$, где $\rho(z_1) \geqslant d$.

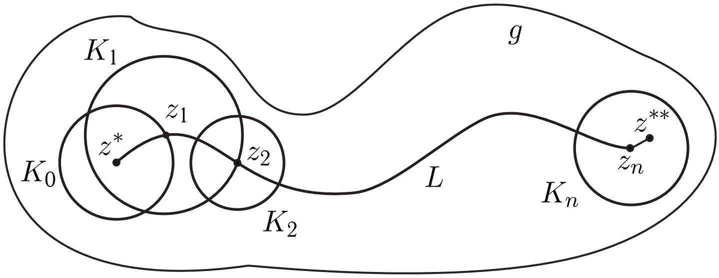


Рис. 26.

Продолжая этот процесс, покроем кривую L конечным числом кругов, радиусом не меньше d, внутри которых $f(z) \equiv 0$. При этом точка $z = z^{**}$ попадет внутрь последнего круга, откуда $f(z^{**}) \equiv 0$. В силу произвольности z^{**} получаем, что $f(z) \equiv 0$ в области g.

Следствие 12.1

1. *Все нули функции $f(z) \in C^\infty(g)$, не равной тождественно нулю в этой области, — изолированные.*
2. *Если функция $f(z) \in C^\infty(g)$ и $f(z)$ не равна тождественно нулю в области g, то в любой замкнутой ограниченной области $g' \subset g$ может быть лишь конечное число нулей функции $f(z)$.*

   Доказательство. *Если множество нулей функции $f(z)$ в области g' бесконечно, то из него можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $z \in g'$. Поэтому $f(z) \equiv 0$ в области g, что противоречит условию.*
3. *Если $f(z)$ — целая функция (аналитическая на всей комплексной плоскости), то в любой замкнутой ограниченной области g' может быть лишь конечное число нулей $f(z)$. На расширенной комплексной плоскости целая функция может иметь лишь счетное число нулей, причем предельной точкой этого множества является бесконечно удаленная точка.*

Теорема 12.2 *Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z) \in C^\infty(g)$ и существует последовательность различных точек $\{z_n\} \to z^* \in g$, причем $f_1(z_n) = f_2(z_n)$ для всех точек последовательности, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$ для всех точек $z \in g$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно при помощи теоремы о нулях (теорема 12.1) установить, что функция $h(z) = f_1(z) - f_2(z) \equiv 0$ в области g.

Следствие 12.2 *(теорема единственности)*. *В области g может существовать только одна аналитическая функция, принимающая заданные значения на следующих множествах аргумента:*

1. $\{z_n\} \to z^* \in g$, где $z_i \neq z_k$ для любых $i \neq k$;

2. в точках $\xi \in \underline{\gamma} \subset g$, где γ — кусочно-гладкая кривая;

3. в точках $z \in \overline{g'} \subset g$.

Другими словами, функция, аналитическая в области g, ***однозначно*** определяется заданием своих значений, как описано выше.

Теорема 12.3 *На границе круга сходимости степенного ряда найдется хотя бы одна особая точка той аналитической функции комплексной переменной, к которой сходится этот ряд внутри круга сходимости $|z - z_0| < R_0$.*

12.3. Определение области сходимости по особым точкам.

Доказательство. Предположим, что на границе круга сходимости все точки $\xi : |\xi - z_0| = R_0,$ являются правильными точками функции $f(z)$, где

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad f(z) \in C^{\infty}\left(|z - z_0| < R_0\right).$$

Тогда для любой точки ξ существует такое $\rho(\xi) > 0$, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\xi)(z - \xi)^n$ сходится к $f(z)$ в общей части кругов $|z - z_0| < R_0$ и $|\xi - z_0| < \rho(\xi)$. Здесь $c_n(\xi)$ — коэффициенты разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора в точке ξ.

Докажем, что $\rho(\xi) > 0$ является не только непрерывной функцией ξ на C_{R_0}, но даже *Липшиц-непрерывной*: $|\rho(\xi_1) - \rho(\xi_2)| \leqslant |\xi_1 - \xi_2|$. Предположим противное: пусть $\rho(\xi_1) > \rho(\xi_2)$, и, следовательно, существует $\delta > 0$, такое что

$$\rho(\xi_1) > \rho(\xi_2) + |\xi_1 - \xi_2| + \delta. \tag{12.1}$$

Это означает, что круг $|z - \xi_2| < \rho(\xi_2)$ лежит внутри круга $|z - \xi_1| < \rho(\xi_1)$ (рис. 27). Но в общей части трех кругов: $|z - z_0| < R_0$, $|z - \xi_1| < \rho(\xi_1)$ и $|z - \xi_2| < \rho(\xi_2)$ все три степенных ряда сходятся к одной и той же функции $f(z) \in C^{\infty}(|z - z_0| < R_0)$. Следовательно, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\xi_2)(z - \xi_2)^n$ может быть

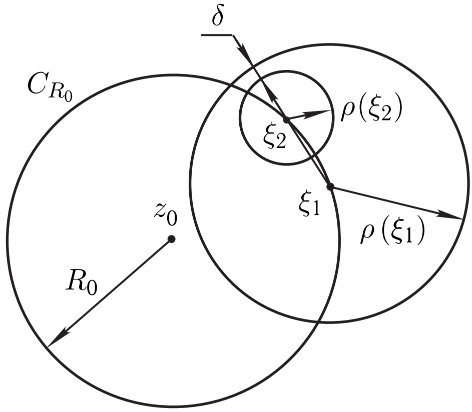


Рис. 27.

продолжен на большую область, он сходится в круге радиуса $\rho(\xi_2)$, который *не меньше*, чем расстояние от ξ_2 до границы круга $|z-\xi_1| < \rho(\xi_1)$, откуда $\rho(\xi_2) \geqslant \rho(\xi_1) - |\xi_1 - \xi_2|$. Но тогда из соотношения (12.1) следует, что $\rho(\xi_1) > \rho(\xi_1) + \delta$ и, так как $\delta > 0$, приходим к противоречию. Это противоречие явилось следствием нашего предположения о том, что $\rho(\xi)$ не является Липшиц-непрерывной на C_{R_0}. Итак: $|\rho(\xi_1) - \rho(\xi_2)| \leqslant |\xi_1 - \xi_2|$.

Из Липшиц-непрерывности, очевидно, следует просто непрерывность, а непрерывная функция $\rho(\xi) > 0$ на замкнутом множестве $|\xi - z_0| = R_0$ достигает своей нижней грани, то есть $\exists \xi^*$: $\rho(\xi) \geqslant \rho(\xi^*)$ для $\forall \xi \in C_{R_0}$. Так как по предположению все точки границы являются правильными, то $\rho(\xi) > 0$ для всех $\xi \in C_{R_0}$. Следовательно, $\rho(\xi^*) = \rho_0 > 0$.

Из неравенства $\rho(\xi) \geqslant \rho_0$ следует, что функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определена и в круге $|z - z_0| < R_0 + \rho_0$. В силу теоремы единственности можно утверждать, что в круге $|z - z_0| < R_0 + \rho_0$ определена однозначная аналитическая функция, совпадающая с $f(z)$ в круге $|z - z_0| < R_0$. Следовательно, радиус сходимости исходного степенного ряда не R_0, а $R_0 + \rho_0$, что противоречит условиям теоремы.

К этому противоречию мы пришли, предположив, что все точки $\xi \in C_{R_0}$ — правильные, значит, на границе круга сходимости C_{R_0} имеется хотя бы одна точка ξ^{**}, являющаяся особой.

Следствие 12.3 *Радиус круга сходимости ряда определяется расстоянием от центра круга до ближайшей особой точки* *той аналитической функции, к которой сходится данный ряд.*

Пример 12.3. *Исследовать область сходимости ряда по особым точкам функции, к которой сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$.

Решение. Нетрудно показать, что ряд сходится при $|z|<1$ к функции $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_{1,2}=\pm i$, лежащие на границе круга $|z|<1$. Поэтому разложение функции $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ в степенной ряд в окрестности точки $z=0$ абсолютно сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$.

Задача 12.4. *Исследуйте область сходимости ряда по особым точкам функции, к которой сходится ряд* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{4n}$.

Ответ: абсолютно сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$.

Если требуется разложить функцию в ряд Тейлора, часто не удается указать общий член разложения, но можно вычислить несколько первых членов разложения и указать радиус сходимости как расстояние от центра разложения до ближайшей особой точки.

Пример 12.5. *Вычислить 4 первых члена разложения функции* $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$ *в ряд Маклорена и определить радиус сходимости ряда.*

Решение.

$$f(z)=\frac{1}{e^z+1}=\frac{1}{2+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}+\ldots}=\left\{t=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{t}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{8}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\ldots\right)+\frac{1}{4}z^2\left(1+\frac{z}{2}+\ldots\right)^2-$$

$$-\frac{1}{16}(z+\ldots)^3+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+0\cdot z^2+\frac{1}{48}z^3+\ldots$$

Радиус сходимости $R=\pi$, так как ближайшие к нулю особые точки $z=\pm i\pi$ (корни уравнения $e^z+1=0$).

Задача 12.6. *Вычислите 4 первых члена разложения функции* $f(z) = \dfrac{1}{2+\sin z}$ *в ряд Маклорена и определите радиус сходимости ряда.*

Ответ: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}z + \dfrac{1}{8}z^2 - \dfrac{1}{48}z^3$; $R = \sqrt{\ln^2\left(2-\sqrt{3}\right) + \dfrac{\pi^2}{4}}$.

12.4. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите радиус сходимости ряда по особым точкам функции, к которой сходится ряд:

   а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(z-2)^n$.

2. Найдите порядок нуля точки $z = 0$ для функций:

   а) $f(z) = z^3 e^{z^2-1}$; б) $f(z) = z^2\cos z - z^2$;

   в) $f(z) = 2z\sin(z^2) + z^2(z-2)$.

3. Точка z_0 является нулем порядка k функции $f(z)$ и нулем порядка n функции $g(x)$. Определить характер точки z_0 для функций а) $f(z) + g(z)$; б) $f(z)\cdot g(z)$?

Вопросы к экзамену

1. Сформулируйте определения правильной точки и особой точки.
2. Сформулируйте определение нуля $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
3. Дайте определение нуля $z_0 \neq \infty$ порядка m аналитической функции.
4. Сформулируйте теорему о нулях аналитической функции.
5. Сформулируйте теорему единственности задания аналитической функции.

Задачи повышенной сложности и теоретические задачи.

1. Существует ли в окрестности точки $z_0 = 0$ аналитическая функция, принимающая в точках $z_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ значения $1, 0, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{5}, 0, \dfrac{1}{7}, \ldots$? А в проколотой окрестности ($|z| > 0$). Ответ обоснуйте.
   Указание: воспользуйтесь теоремой единственности задания аналитической функции.
2. Найдите все функции $f(z)$, аналитические в окрестности точки $z_0 = 0$ и принимающие в точках $z_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ значения $f(z_n) = \dfrac{1}{n^2}$.
   Указание: воспользуйтесь теоремой единственности задания аналитической функции.
3. Пусть $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$. Имеет ли функция $f(z)$ особую точку
   а) в круге $|z| < 1$; б) в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$?
   Ответ обоснуйте.
4. Может ли аналитическая и не равная тождественно нулю в некоторой области функция иметь бесконечно много нулей в этой области? Ответ обоснуйте.

§ 13. Ряд Лорана

13.1. Понятие ряда Лорана, область сходимости. Рассмотрим обобщение степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ — ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, который называют **рядом Лорана**.

Представим ряд Лорана в следующем виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = P(z) + Q(z). \qquad (13.1)$$

При этом $P(z)$ называют *правильной частью* ряда Лорана, $Q(z)$ — *главной частью* ряда Лорана.

Первое слагаемое в (13.1) представляет собой степенной ряд, пусть его радиус сходимости равен R_1, то есть $P(z) \in C^\infty\left(|z-z_0| < R_1\right)$. Рассмотрим функцию $Q(z)$. Пусть $\xi = \dfrac{1}{z-z_0}$, тогда $Q(z) = Q_1(\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^n \in C^\infty\left(|\xi| < \dfrac{1}{R_2}\right)$, где через $\dfrac{1}{R_2}$ обозначен радиус сходимости полученного степенного ряда, отсюда $|z-z_0| > R_2$. Если $R_2 < R_1$, то существует область, в которой определены обе функции $P(z)$ и $Q(z)$ — ***кольцо*** $R_2 < |z-z_0| < R_1$.

Применяя к степенным рядам $P(z)$ и $Q_1(\xi)$ теорему Абеля и ее следствия, получаем:

1. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \in C^\infty$ в кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$.
2. Внутри кольца сходимости ряд Лорана можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, при этом полученные ряды также являются аналитическими функциями в кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$.
3. Величина R_1 определяется коэффициентами ряда Лорана $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ при положительных степенях $z-z_0$:
   $R_1 = 1/L_1$, $L_1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ или $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$,

а величина R_2 — коэффициентами ряда Лорана $\{c_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ при отрицательных степенях $z-z_0$:
$R_2 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$, или $R_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$.

13.2. Разложение функции в ряд Лорана и его единственность.

Теорема 13.1 *Если функция $f(z) \in C^{\infty}(R_2 < |z-z_0| < R_1)$, то она однозначно разложима в этом кольце в ряд Лорана:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку z внутри кольца: $(R_2 < |z-z_0| < R_1)$ и построим окружности $C_{R_1'} : |\xi - z_0| = R_1'$ и $C_{R_2'} : |\xi - z_0| = R_2'$, с центрами в точке z_0 и радиусами R_1' и R_2', при этом $R_2 < R_2' < |z-z_0| < R_1' < R_1$. По формуле Коши для многосвязной области имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^{+}_{R_1'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^{-}_{R_2'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{13.2}$$

Начнем с первого интеграла. На окружности $C_{R_1'} : |\xi - z_0| = R_1'$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$. Тогда дробь $\dfrac{1}{\xi - z}$ можно представить в следующем виде, используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0} \right)^n.$$

Подставляя полученное разложение в первый интеграл в (13.2) и проводя почленное интегрирование, получаем

$$\int\limits_{C^{+}_{R_1'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{C^{+}_{R_1'}} f(\xi) \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

причем интегрирование возможно в силу равномерной сходимости ряда по переменной ξ. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{R'_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

$$\text{где } c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{R'_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ n\geqslant 0.$$

Теперь рассмотрим второй интеграл. На окружности $C_{R'_2}:|\xi-z_0|=R'_2$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1$. Поэтому дробь $\dfrac{1}{\xi-z}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}}=\frac{-1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n.$$

В результате почленного интегрирования этого ряда имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-_{R'_2}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},\ n>0,$$

где

$$c_{-n}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-_{R'_2}}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi.$$

Изменив направление обхода кривой, получаем:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{R'_2}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi,\ n>0.$$

Подынтегральные функции в выражениях для c_{-n} и c_n являются аналитическими в круговом кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$. Поэтому в силу теоремы Коши значения соответствующих интегралов не изменятся при произвольной деформации контуров интегриро-

вания в области аналитичности подынтегральных функций. Это позволяет записать единое выражение для коэффициентов c_n:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где C^+ — произвольный замкнутый контур, лежащий в кольце $R_2 < |z - z_0| < R_1$ и содержащий точку z_0 внутри. Итак, для функции $f(z)$ можно записать цепочку равенств:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi.$

Так как z — произвольная точка внутри кольца $R_2 < |z - z_0| < R_1$, то ряд $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится к $f(z)$ всюду внутри данного кольца, причем в замкнутом кольце $R_2' \leqslant |z - z_0| \leqslant R_1'$, где $R_2 < R_2'$ и $R_1' < R_1$, ряд сходится к $f(z)$ ***равномерно***.

В итоге, областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $R_2 < |z - z_0| < R_1$, на границах которого имеется хотя бы по одной особой точке той аналитической функции $f(z)$, к которой сходится данный ряд (см. теорему 12.3).

Осталось доказать единственность разложения. Предположим, что имеет место другое разложение $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z - z_0)^n$, где хотя бы один коэффициент $c_n' \neq c_n$. При этом всюду внутри кольца $R_2 < |z - z_0| < R_1$ имеет место равенство: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Проведем окружность C_R радиуса R, где $R_2 < R < R_1$, с центром в точке z_0. Тогда ряды $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z - z_0)^n$ и $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходятся на C_R равномерно.

Умножим оба ряда на $(z - z_0)^{-m-1}$, где m — произвольное фиксированное целое число и проинтегрируем почленно. Рассмотрим для некоторого n интеграл $\int\limits_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1} dz$. Положив $z - z_0 = Re^{i\varphi}$, получим

$$\int\limits_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1} dz = R^{n-m} \cdot i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi i, & n = m \end{cases}.$$

Тогда после почленного интегрирования слева и справа останется по одному слагаемому, значит, для произвольного целого m имеет место равенство $c'_m = c_m$, что противоречит предположению существования хотя бы одного такого m, что $c'_m \neq c_m$.

Пример 13.1. *Разложить в ряд Лорана функцию* $f(z) = \dfrac{i+2}{(z-2)(z+i)}$ *в проколотой окрестности точек:*
а) $z = 2$; *б)* $z = -i$.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z) = \frac{i+2}{(z-2)(z+i)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+i} = (z-2)^{-1} - (z+i)^{-1}. \tag{13.3}$$

а) В окрестности точки $z = 2$ первое слагаемое в (13.2) уже является членом ряда Лорана, надо преобразовать только второе слагаемое:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-2+i+2} = \frac{1}{(i+2)\left(1 - \left(-\frac{z-2}{i+2}\right)\right)} =$$
$$= \frac{1}{i+2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{i+2}\right)^n,$$

была использована формула суммы бесконечной геометрической прогрессии. Итак, в проколотой окрестности точки $z = 2$

$$f(z) = (z-2)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(i+2)^{n+1}} (z-2)^n.$$

б) В окрестности точки $z = -i$ второе слагаемое в (13.3) является членом ряда Лорана, при этом

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z+i-(2+i)} = \frac{-1}{(2+i)\left(1 - \frac{z+i}{i+2}\right)} = \frac{-1}{i+2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{i+2}\right)^n.$$

Итак, в проколотой окрестности точки $z = -i$

$$f(z) = -(z+i)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i+2)^{n+1}} (z+i)^n.$$

Задача 13.2. *Разложите в ряд Лорана функцию* $f(z) = \frac{1+2i}{(z-2i)(z+1)}$ *в проколотой окрестности точек:*
а) $z = 2i$; *б)* $z = -1$.

Ответ: а) $f(z) = (z-2i)^{-1} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}} (z-2i)^n$;

б) $f(z) = -(z+1)^{-1} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2i)^{n+1}} (z+1)^n$.

Пример 13.3. *Разложить в ряд Лорана функцию* $f(z) = \frac{i+2}{(z-2)(z+i)}$ *в окрестности точки* $z = \infty$.

Решение. Перейдем к переменной $w = \frac{1}{z}$, тогда нужно будет разложить функцию в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $w = 0$.

$$\frac{i+2}{(z-2)(z+i)} = \frac{i+2}{\left(\frac{1}{w}-2\right)\left(\frac{1}{w}+i\right)} = w^2 \frac{2i-1}{(2w-1)(w-i)} =$$
$$= w^2 \left(-\frac{2}{(2w-1)} + \frac{1}{(w-i)}\right) = w^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} w^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{i^{n+1}}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2} \left(2^{n+1} - i^{-n-1}\right).$$

Задача 13.4. *Разложите в ряд Лорана функцию* $f(z) = \frac{1+2i}{(z-2i)(z+1)}$ *в окрестности точки* $z = \infty$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{-n-2} \left((2i)^n - (-1)^n\right)$.

Пример 13.5. *Разложить в ряд Лорана функцию* $f(z) = \frac{i+2}{(z-2)(z+i)}$ *в кольце* $1 < |z| < 2$.

Решение. Центр разложения здесь точка $z = 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{i+2}{(z-2)(z+i)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+i} =$$
$$= \frac{-1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\left(-\frac{i}{z}\right)\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^{n+1}},$$

где точки внутри кольца удовлетворяют условиям

$$\frac{|z|}{2} < 1, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1.$$

Задача 13.6. *Разложите в ряд Лорана функцию* $f(z) = \dfrac{1+2i}{(z-2i)(z+1)}$ *в кольце* $1 < |z| < 2$.

Ответ: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$.

Пример 13.7. *Разложить в ряд Лорана функцию* $f(z) = \dfrac{\sin(z^2)}{z^5}$ *в проколотой окрестности точки* $z = 0$.

Решение.

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^5} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{4n-2}}{(2n-1)!}}{z^5} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{4n-7}}{(2n-1)!}.$$

Задача 13.8. *Разложите в ряд Лорана функцию* $f(z) = \dfrac{\cos(z^2)}{z^3}$ *в проколотой окрестности точки* $z = 0$.

Ответ: $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n-3}}{(2n)!}$.

13.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = 0$:

   а) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$; б) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$; в) $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$;

   г) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$; д) $f(z) = z^4 \cos\dfrac{1}{z}$; е) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

   ж) $f(z) = \dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области:
   а) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в кольце $2 < |z| < 3$; в проколотых окрестностях точек $z = 3$; $z = \infty$.
   б) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$ в проколотых окрестностях точек $z = 0$; $z = -1$; $z = \infty$.
   в) $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}$ в кольце $1 < |z| < 2$; в проколотых окрестностях точек $z = 1$; $z = \infty$.
   г) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 1}$ в кольце $1 < |z+2| < 3$, в проколотых окрестностях точек $z = -1$; $z = \infty$.
   д) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$ в кольце $1 < |z+i| < \sqrt{2}$.
   е) $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ в проколотых окрестностях точек $z = -i$; $z = \infty$.
   ж) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z-1}$ в проколотой окрестности точки $z = 1$.
   з) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$ в проколотых окрестностях точек $z = 0$; $z = \infty$ (выпишите три первых ненулевых слагаемых главной части ряда Лорана).
   и) $f(z) = \operatorname{ctg} z$ в проколотой окрестности точки $z = 0$ (выпишите три первых ненулевых слагаемых главной части ряда Лорана).

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение ряда Лорана. Какова его область сходимости?
2. Сформулируйте определение правильной точки. Приведите пример.
3. Сформулируйте определение особой точки. Приведите пример.
4. Сформулируйте определение изолированной особой точки однозначной аналитической функции.
5. Сформулируйте теорему о представлении функции рядом Лорана.
6. Запишите формулу для коэффициентов разложения аналитической функции в ряд Лорана.

§ 14. Особые точки однозначной функции комплексной переменной

14.1. Определение изолированной особой точки.
Определение 14.1 *Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует такая окрестность точки z_0, в которой нет других особых точек.*

Например, для функции $f(z) = \dfrac{1}{z}$ точка $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой; для функции $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ точка $z_0 = 0$ — неизолированная особая точка, так как существует последовательность особых точек $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$, которая сходится к точке $z_0 = 0$, то есть в любой окрестности точки $z_0 = 0$ существуют особые точки, отличные от нее.

Функцию $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 можно разложить в ряд Лорана, сходящийся в кольце $0 < |z - z_0| < \rho(z_0)$, при этом в самой точке z_0 функция $f(z)$ может быть не определена. Поведение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 определяется главной частью ряда Лорана $Q(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$.

14.2. Классификация изолированных особых точек. Пусть функция представлена рядом Лорана в окрестности изолированной особой точки z_0: $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$. Рассмотрим различные типы изолированных особых точек.

I. Устранимая особая точка
Определение 14.2 *Изолированная особая точка z_0 называется **устранимой особой точкой,** если $c_{-n} = 0$ для любого $n > 0$, то есть правильная часть ряда Лорана $Q(z) = 0$.*
При этом существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$.

Если функция не определена в точке z_0, или ее значение не совпадает с c_0, то ее можно доопределить, положив $f(z_0) = c_0$, тем самым мы получим непрерывную функцию.
<u>Пример устранимой особой точки</u>.
Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особую точку $z_0 =$

$= 0$. Действительно, в этой точке функция не определена, но $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$. Представляя функцию $f(z)$ в виде степенного ряда, получаем

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

откуда $c_{-n} = 0$ для всех $n > 0$.

Теорема 14.1 *Если функция $f(z)$ является аналитической в проколотой окрестности ее изолированной особой точки z_0, и $|f(z)| < M$ в этой области, то z_0 — устранимая особая точка.*

Доказательство. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана и рассмотрим выражение для коэффициентов его главной части: $c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_C f(\xi)\,(\xi - z_0)^{n-1}\,d\xi$ при $n > 0$.

В качестве контура интегрирования выберем круг радиуса ρ с центром в точке z_0. Тогда, сделав замену $\xi - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $d\xi = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ и учтя, что $|e^{in\varphi}| = 1$, получим оценку:

$$|c_{-n}| < \rho \cdot M \cdot \rho^{n-1} \to 0$$

при $\rho \to 0$. Так как значения c_{-n} не зависят от ρ, то $c_{-n} = 0$ при всех $n > 0$.

II. Полюс

Определение 14.3 *Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется **полюсом порядка m**, если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки содержит конечное число членов с отрицательными степенями, то есть $Q(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$, где $c_{-m} \neq 0\,(m > 0)$.*

При этом $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, и функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}$, где $\psi(z)$ — аналитическая функция и $\psi(z_0) \neq 0$.

Пример особой точки полюс. Функция $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^m}$, имеет полюс m-того порядка в точке $z_0 = a$.

Теорема 14.2 *Если функция $f(z)$ является аналитической в проколотой окрестности ее изолированной особой точки z_0,* *и $|f(z)| \to \infty$ при $z \to z_0$ (независимо от способа стремления z к z_0), то z_0 — полюс функции $f(z)$.*

Доказательство. По условию теоремы $|f(z)| \to \infty$ при $z \to z_0$, следовательно, для любого $A > 0$ существует $\varepsilon > 0$, что при $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ выполняется неравенство $|f(z)| > A$.

Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ — аналитическую в области $(0 < |z - z_0| < \varepsilon)$. Для этой функции справедливо неравенство $|g(z)| < \dfrac{1}{A} = M$, значит, z_0 — устранимая особая точка функции $g(z)$ (по теореме 14.1), и $g(z) \to 0$ при $z \to z_0$. Тогда функцию можно представить в виде $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z) \neq 0$, $m \geqslant 0$, откуда

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m};\ \psi(z_0) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0.$$

Замечание 14.1 *Точка z_0, являющаяся нулем порядка m для функции $f(z)$, является полюсом того же порядка для функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.*

III. Существенно особая точка

Определение 14.4 *Изолированная особая точка z_0 называется **существенно особой** точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями разности $z - z_0$, то есть бесконечное число коэффициентов $c_{-n} \neq 0$, $n > 0$.*

Пример существенно особой точки. Для функции $f(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ — существенно особая.

Поведение аналитической функции в окрестности существенно особой точки описывается следующей теоремой.

Теорема 14.3 (*Сохоцкого–Вейерштрасса*) *Для любого комплексного числа B и любого $\varepsilon > 0$ в любой η-окрестности существенно особой точки $z_0 : 0 < |z - z_0| < \eta$ существует такая точка z_1, для которой выполняется неравенство $|f(z_1) - B| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$. Предположим, что для заданного комплексного числа B и $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_0 > 0$, что для любого z, удовлетворяющего условию $0 < |z - z_0| < \eta_0$, выполняется неравенство $|f(z) - B| > \varepsilon_0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - B}$, тогда $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z) - B|} < \dfrac{1}{\varepsilon_0}$ — ограниченная величина. Отсюда по теореме 14.1 точка z_0 является устранимой особой точкой функции $g(z)$ и эту функцию можно представить в виде $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z) \neq 0$. Так как $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + B = (z - z_0)^{-m} \varphi_1(z)$, где аналитическая функция $\varphi_1(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$ ограничена в рассматриваемой окрестности точки z_0, то отсюда следует, что точка z_0 является либо полюсом, либо правильной точкой (при $m = 0$) функции $f(z)$. Таким образом, в разложении в ряд Лорана в окрестности точки z_0 конечное число членов с отрицательными степенями, что противоречит определению существенно особой точки. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 14.2

1. В окрестности существенно особой точки z_0 можно выбрать такую последовательность точек $\{z_k\} \to z_0$, что последовательность $\{f(z_k)\}$ сходится к любому наперед заданному числу.

2. Если $f(z) \neq 0$ в окрестности существенно особой точки z_0, то для функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка z_0 тоже является существенно особой точкой.

Соберем вместе вышеизложенные факты и получим классификацию изолированных особых точек с помощью ряда Лорана.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Если в разложении в ряд Лорана этой функции в окрестности точки z_0 (в кольце $(0 < |z - z_0| < \rho(z_0))$):

1. отсутствуют члены с отрицательными степенями, тогда z_0 — ***устранимая особая точка*** $f(z)$;
2. конечное число членов с отрицательными степенями, тогда z_0 — ***полюс*** $f(z)$;
3. бесконечно много членов с отрицательными степенями, тогда z_0 — ***существенно особая точка*** $f(z)$.

Классификация изолированных особых точек на языке пределов.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$:

1. если в окрестности $0 < |z - z_0| < \rho(z_0)$ при $z \to z_0$ функция $f(z) \to c_0$, $|c_0| < \infty$, то z_0 — ***устранимая особая точка*** $f(z)$;
2. если в окрестности $0 < |z - z_0| < \rho(z_0)$ при $z \to z_0$ функция $f(z) \to \infty$, то z_0 — ***полюс*** $f(z)$;

3. если в окрестности $0 < |z - z_0| < \rho(z_0)$ при $z \to z_0$ функция $f(z)$ не имеет конечного или бесконечного предела, то z_0 — ***существенно особая точка*** $f(z)$.

14.3. Изолированная особая точка $z = \infty$.

Определение 14.5 *Точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции, если существует такое $R > 0$, что для любых z, удовлетворяющих неравенству $|z| > R$, функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от $z = 0$.*

I. Точка $z = \infty$ называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$, если в разложении функции в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ все $c_n = 0$ при $n > 0$, или если существует конечный предел $f(z)$ при $z \to \infty$.

II. Точка $z = \infty$ называется ***полюсом*** функции $f(z)$, если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ содержит конечное число членов с положительными степенями, то есть $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{m} c_n z^n$, $(m > 0)$, или $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$.

III. Точка $z = \infty$ называется ***существенно особой*** точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ содержит бесконечно много членов с положительными степенями z. Это означает, что при $z \to \infty$ функция $f(z)$ не имеет конечного или бесконечного предела: в зависимости от выбора последовательности $\{z_n\}$ можно получить последовательность $\{f(z_n)\}$, сходящуюся к любому наперед заданному числу.

Пример 14.1. *Найти <u>все</u> особые точки (включая $z = \infty$) функции $f(z)$ и определите их тип, если особая точка изолированная.*

а) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$; б) $f(z) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right)}$; в) $f(z) = z^2 e^{-z}$.

Решение. а) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{\sin^2 z} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{z}{2}}{4\sin^2\dfrac{z}{2}\cdot\cos^2\dfrac{z}{2}}$. Нетрудно видеть, что точки $z = 2\pi n$, соответствующие $\sin\dfrac{z}{2} = 0$, являются устранимыми особыми точками. Точки $z = \pi + 2\pi n$, соответствующие $\cos^2\dfrac{z}{2} = 0$, являются полюсами второго порядка функции $f(z)$. Следовательно, в любой окрестности точки $z = \infty$ есть другие особые точки, поэтому она не является изолированной и не подлежит нашей классификации.

б) Точка $z=-1$ обращает в нуль знаменатель аргумента косинуса, поэтому это особая точка. Точки $z_n=-1+\dfrac{2}{\pi+2\pi n}$ являются нулями первого порядка знаменателя (обращают косинус в нуль) и, следовательно, полюсами первого порядка $f(z)$, причем при $n\to\infty$ $z_n\to-1$, поэтому точка $z=-1$ не является изолированной. При $z\to\infty$ $\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right)\to 1$, значит $z=\infty$ — устранимая особая точка.

в) Разложим функцию e^{-z} в ряд по степеням z: $e^{-z}=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n!}$, тогда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n+2}}{n!}$. В данном случае бесконечно много членов с положительными степенями, у которых коэффициенты отличны от нуля, поэтому $z=\infty$ — существенно особая точка.

Задача 14.2. *Найдите* <u>*все*</u> *особые точки (включая $z=\infty$) функции $f(z)$ и определите их тип (если особая точка изолированная):*

а) $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$; *б)* $f(z)=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)}$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)}$; *г)* $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$;

д) $f(z)=e^{-\frac{1}{(z+1)^2}}$; *е)* $f(z)=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$;

ж) $f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$.

Ответ: а) $z=0$ — устранимая особая точка; $z=\infty$ — неизолированная особая точка; $z=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ — полюс первого порядка;

б) $z=1$ — неизолированная особая точка; $z=\infty$ — устранимая особая точка; $z=1+\dfrac{2}{\pi+2\pi n}$ — полюс 1-го порядка;

в) $z=0$ — неизолированная особая точка; $z=\infty$ и $z=1+\dfrac{2}{\pi+2\pi n}$ — полюсы 1-го порядка;

г) $z=0$ — устранимая особая точка; $z=\infty$ — существенно особая точка;

д) $z = -1$ — существенно особая точка; $z = \infty$ — устранимая особая точка;

е) $z = \dfrac{1}{\pi k}$; $z = \infty$ — полюсы 1-го порядка; $z = 0$ — неизолированная особая точка;

ж) $z = 0$ — устранимая особая точка; $z_k = i2\pi k, \quad k = \pm 1, \pm \pm 2, \ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z = \infty$ — неизолированная особая точка.

Пример 14.3. *Пусть точка $z = a$ является существенно особой точкой для функции $f(z)$. Можно ли утверждать, что и для функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка $z = a$ является существенно особой точкой?*

Решение. Нет, нельзя. Рассмотрим $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$, у которой $z = 0$ — существенно особая точка. Тогда для функции $g(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ точка $z = 0$ – неизолированная особая точка, так как точки $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$ являются полюсами функции $g(z)$, и этих точек бесконечно много в любой окрестности $z = 0$.

Пример 14.4. *Пусть точка $z = a$ является существенно особой точкой для $f(z)$. Можно ли утверждать, что и для функции $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ точка $z = a$ является существенно особой точкой?*

Решение. Нет, нельзя. Рассмотрим, например, поведение функций $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$ и $\sin z$ в точке $z = 0$. Для функции $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$ она существенно особая, а для функции $\sin z$ — регулярная точка.

Задача 14.5. *Пусть точка $z = a$ является полюсом для функции $f(z)$. Можно ли утверждать, что для функции $g(z) = e^{f(z)}$ точка $z = a$ является существенно особой точкой?*
б) Пусть точка $z = \infty$ является существенно особой точкой для функции $f(z)$. Можно ли утверждать, что и для функции $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$ точка $z = \infty$ является существенно особой точкой?
в) Пусть точка $z = \infty$ является полюсом порядка k для функции $f(z)$. Можно ли утверждать, что и для функции $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$ точка $z = \infty$ является полюсом?

г) Пусть точка $z = a$ является полюсом для функции $f(z)$. Можно ли утверждать, что и для функции $g(z) = e^{-f(z)}$ точка $z = a$ является полюсом?

Ответ. а) Да; б) Да; в) Нет, при $n \geqslant k$ это будет устранимая особая точка, а при $n < k$ — полюс порядка $k - n$; г) Нет, это существенно особая точка.

14.4. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите все особые точки (включая $z = \infty$) функции $f(z)$ и определите их тип (если особая точка изолированная):

   а) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$; в) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$;

   г) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$; д) $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z^5}$;

   е) $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^4}$; ж) $f(z) = \dfrac{\cos z}{e^z + 1}$; з) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^z - 1}$;

   и) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{\sin z}$; к) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$; л) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$;

   м) $f(z) = \dfrac{\mathrm{tg} z}{z^3}$; н) $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$; о) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$;

   п) $f(z) = z^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$; р) $f(z) = \dfrac{z}{\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)}$; с) $f(z) = \dfrac{\mathrm{ctg} z}{z^2}$;

   т) $f(z) = \mathrm{ctg} z - \dfrac{1}{z}$; у) $f(z) = z \cdot \mathrm{ctg} z$;

   ф) $f(z) = z\cos z$; х) $f(z) = z \cdot e^z$.

2. Пусть $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Существует ли такая последовательность $\{z_n\} \to 0$, что последовательность $\{f(z_n)\} \to 1$? Ответ обоснуйте.

3. Пусть z_0 — существенно особая точка для функции $f(z)$. Какую особенность может иметь в этой точке функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$? Ответ обоснуйте.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение устранимой особой точки аналитической функции. Приведите пример.
2. Сформулируйте теорему об устранимой особой точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
3. Сформулируйте определение полюса. Приведите пример.
4. Сформулируйте и докажите теорему о полюсе $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.

5. Сформулируйте определение существенно особой точки. Приведите пример.
6. Сформулируйте и докажите теорему Сохоцкого–Вейерштрасса о существенно особой точке.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности

1. Приведите пример функции с особой точкой $z_0 \neq \infty$, которая не является изолированной. Ответ обоснуйте.
2. Приведите пример функции с особой точкой $z_0 = \infty$, которая не является изолированной. Ответ обоснуйте.
3. Пусть z_k, $k = 1, 2, 3, ..., n$ — точки, в которых функция $f(z) = \dfrac{\sin\left(z^2 + iz + 2\right)}{z^4 + 3z^2 - 4}$ имеет полюс. Найдите сумму $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n$.
4. Может ли предел последовательности $f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}}$ при соответствующем выборе последовательности $\{z_n\} \to 0$ быть равным:

   а) 1; б) 2; в) 0; г) $2i$; д) ∞. Ответ обоснуйте.

§ 15. Понятие вычета в изолированной особой точке

15.1. Определение вычета функции и основная теорема теории вычетов.

Напомним, что если z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, аналитической в некоторой проколотой окрестности этой точки, то в этой окрестности функцию $f(z)$ можно единственным образом разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

где C^+ — замкнутый контур, содержащий единственную особую точку z_0.

Определение 15.1 *Пусть C^+ — замкнутый контур, содержащий единственную изолированную особую точку z_0 и проходимый в положительном направлении (то есть так, что точка z_0 остается слева). Тогда комплексное число $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} f(\xi) d\xi$ называется* ***вычетом*** *функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается Выч$[f(z), z_0]$.*

Заметим, что

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi|_{n=-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\xi)d\xi$$

в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 представляет собой вычет функции $f(z)$ в точке z_0.

Теорема 15.1 *(основная теорема теории вычетов)*
Пусть $f(z)$ — аналитическая функция за исключением конечного числа N изолированных особых точек z_1, z_2, …, z_N, расположенных внутри контура C. Тогда

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n].$$

Доказательство. Окружим каждую из изолированных особых точек z_n функции $f(z)$ внутри контура C замкнутыми контурами γ_n, не содержащими внутри других особых точек, кроме z_n. В замкнутой многосвязной области, ограниченной контурами C и γ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, (рис. 28), функция $f(z)$ является всюду аналитической.

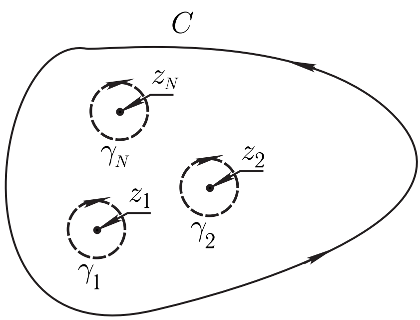


Рис. 28.

По теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_C f(z)dz + \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\gamma_n} f(z)dz = 0, \tag{15.1}$$

где контур C проходится против часовой стрелки, а контуры γ_n — по часовой. Перенеся второе слагаемое в (15.1) в правую часть равенства, поменяв направление обхода контуров γ_n и использовав определение вычета, получим:

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n].$$

15.2. Вычет в конечной изолированной особой точке.

I. Пусть точка z_0 — устранимая особая точка. В этом случае коэффициент c_{-1} в ряде Лорана равен нулю, поэтому Выч$[f(z), z_0] = 0$.

Пример. Выч$\left[\dfrac{\sin z}{z}, 0\right] = 0$.

II. Пусть точка z_0 — полюс первого порядка. Тогда

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n,$$

$$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{n+1}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $z \to z_0$, получаем $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z - z_0) = c_{-1}$. Таким образом, в полюсе первого порядка

$$\text{Выч}\,[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0).$$

Получим еще одну формулу для полюса первого порядка. Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, а точка z_0 является нулем первого порядка для $\psi(z)$, то есть

$$\psi(z) = (z - z_0)\psi'(z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + ...,$$

причем $\psi'(z_0) \neq 0$.

Тогда z_0 есть полюс первого порядка и

$$\text{Выч}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0) =$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)(z - z_0)}{(z - z_0)\psi'(z_0) + \dfrac{\psi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + ...} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (15.2)$$

Пример 1. Выч$\left[\dfrac{\cos^3 z}{z-1}, 1\right] = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\cos^3 z}{z-1}(z-1) = \cos^3 1$ (использование первой формулы).

Пример 2. Выч$\left[\dfrac{\cos^3 z}{z^3 + 2z - 3}, 1\right] = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\cos^3 z}{3z^2 + 2} = \dfrac{\cos^3 1}{5}$ (использование второй формулы).

III. Пусть точка z_0 — полюс порядка $m > 1$. В этом случае

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + ... + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

откуда

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + ... + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}.$$

Продифференцируем последнее соотношение $m - 1$ раз. Тогда, переходя к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = (m-1)! \cdot c_{-1},$$

откуда в полюсе m—того порядка

$$\text{Выч}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Пример. $\text{Выч}\left[\frac{e^{2z}}{\left(z^2+9\right)^2}, 3i\right] = \lim_{z \to 3i} \frac{d}{dz} \left[(z - 3i)^2 \frac{e^{2z}}{\left(z^2+9\right)^2} \right] =$
$= \lim_{z \to 3i} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{2z}}{(z+3i)^2} \right] = 2e^{2z} \cdot \frac{z + 3i - 1}{(z+3i)^3} \Big|_{z=3i} = e^{6i} \frac{1 - 6i}{216i}.$

IV. Точка z_0 — существенно особая.

В этом случае $\text{Выч}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} f(\xi) d\xi$ можно найти прямым вычислением интеграла, либо как c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана.

Пример. $\text{Выч}\left[\sin\frac{1}{z}, 0\right] = 1$, так как

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \dots.$$

15.3. Вычет в точке $z = \infty$.

Определение 15.2 *Вычетом функции в точке $z = \infty$ называется комплексное число, равное значению интеграла*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^{+}} f(\xi)d\xi,$$

где контур C — произвольный замкнутый контур, вне которого функция $f(z)$ является аналитической и не имеет особых точек, отличных от $z = \infty$.

Следовательно, Выч$[f(z), \infty] = -c_{-1}$ в разложении функции в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Важно помнить: если $z = \infty$ — устранимая особая точка, то вычет в ней может быть отличен от 0.

Пример. $f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$, $z = \infty$ — устранимая особая точка, Выч$[f(z), \infty] = -c_{-1} = -1 \neq 0$.

Теорема 15.2 *Пусть функция является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек. Тогда сумма всех вычетов, включая вычет в точке $z = \infty$, равна 0.*

Доказательство. Рассмотрим контур C, внутри которого находятся все N особых точек функции $f(z)$, расположенных на конечном расстоянии от точки 0. Тогда по основной теореме теории вычетов 15.1

$$\int\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n].$$

Но по определению вычета в точке $z = \infty$ этот интеграл и есть $-$Выч$[f(z), \infty]$. Следовательно, сумма всех вычетов, включая точку $z = \infty$, равна нулю.

Пример 15.1. *Вычислить вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках:*

а) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$; б) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$; в) $f(z) = \dfrac{1}{z^9 - z^{11}}$;

г) $f(z) = \sin z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$.

Решение.
а) Особыми точками функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$ являются точки $z = 0$ (полюс 3-го порядка) и $z = \infty$.

$$\text{Выч}\,[f(z), 0] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} (\cos z) \ = -\frac{1}{2}.$$

По теореме 15.2 Выч $[f(z), \infty] = \dfrac{1}{2}$.

б) Особыми точками функции $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$ являются $z = 1$ и $z = \infty$. Разложим функцию $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$ — существенно особой точки функции $f(z)$:

$$f(z) = (1 + (z-1)) \left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \ldots\right).$$

Суммируя коэффициенты при $(z-1)^{-1}$ в разложении, получаем, что Выч $[f(z), 1] = c_{-1} = \dfrac{3}{2}$. По теореме 15.2 Выч $[f(z), \infty] = -\dfrac{3}{2}$.

в) Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^9 - z^{11}} = \dfrac{1}{z^9(1-z^2)}$, имеет особые точки $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $z = \infty$.

Разложим функцию в ряд в проколотой окрестности $z = 0$ — полюса девятого порядка:

$$f(z) = \frac{1}{z^9} \cdot \frac{1}{(1-z^2)} = z^{-9} \left(1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^8 + \ldots\right).$$

Коэффициент при z^{-1} равен 1, значит, Выч $[f(z), 0] = 1$.

В простых полюсах $z = 1$ и $z = -1$ вычеты равны

$$\text{Выч}\,[f(z), 1] = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)}{z^9(1-z^2)} \ = -\frac{1}{2};$$

$$\text{Выч}\,[f(z), -1] = \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)}{z^9(1-z^2)} \ = -\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\text{Выч}\,[f(z), \infty] = 0 - \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0.$$

г) Функция $f(z) = \sin z \cdot \sin\frac{1}{z}$ имеет две особые точки $z = 0$ и $z = \infty$. Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Маклорена, получаем

$$f(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right).$$

При почленном умножении рядов получаются только четные степени z, поэтому Выч $[f(z), 0] = 0$, Выч $[f(z), \infty] = 0$.

Задача 15.2. *Вычислите вычеты во всех изолированных особых точках: а)* $\dfrac{e^z}{z^2+4}$; *б)* $\dfrac{\sin z}{(z-a)^5}$; *в)* $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

Ответ: а) Выч$[f(z); 2i] = \dfrac{-i}{4}e^{2i}$; Выч$[f(z); -2i] = \dfrac{i}{4}e^{-2i}$;

б) Выч$[f(z); a] = \dfrac{1}{4!}\sin a$;

в) Выч$[f(z); i] = \dfrac{-i}{4}$; Выч$[f(z); -i] = \dfrac{i}{4}$.

Пример 15.3. *Вычислить вычеты функции* $\operatorname{tg} z$ *во всех изолированных особых точках.*

Решение. Функция $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, поэтому ее особыми точками являются точки $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$ — полюсы первого порядка, так как это нули знаменателя первого порядка (производная знаменателя в этих точках не равна нулю). Воспользуемся формулой (15.2):

$$\text{Выч}\left[\operatorname{tg} z; \frac{\pi}{2} + \pi n\right] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)} = -1.$$

Точка $z = \infty$ — неизолированная особая точка, так как в любой ее окрестности есть особые точки $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$.

Задача 15.4. *Вычислите вычеты функции* $\operatorname{ctg} 2z$ *во всех изолированных особых точках.*

Ответ: $\dfrac{1}{2}$ в точках $\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

15.4. Задачи для самостоятельного решения.

Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках (включая бесконечно удаленную точку):

1. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+1)}$;

2. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$;
3. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)(z+2)}$;
4. $f(z)=\dfrac{z^2+z-2}{z^3+1}$;
5. $(z)=\dfrac{\sin z}{(z+2)^3}$;
6. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$;
7. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}$;
8. $(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$;
9. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z^2}}$;
10. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$;
11. $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-1}$;
12. $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$;
13. $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$;
14. $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^3}$;
15. $f(z)=\operatorname{ctg} z$;
16. $f(z)=\operatorname{ctg}^2 z$.

§ 16. Логарифмический вычет. Теорема Руше. Число нулей аналитической функции

16.1. Логарифмический вычет. Пусть $f(z)\in C^\infty$ во всех точках области g за исключением N особых точек — полюсов, и функция $f(z)\neq 0$ на границе области g. Пусть все точки границы ∂g области g правильные, и в них существует производная функции $f(z)$.

Определение 16.1 *Функция* $\varphi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}=(\ln f(z))'$ *называется* ***логарифмической производной*** *функции* $f(z)$. *Вычеты* $\varphi(z)$

в ее особых точках называются ***логарифмическими вычетами функции*** $f(z)$.

Теорема 16.1 *Особыми точками* $\varphi(z)$ *являются нули и полюса функции* $f(z)$.

Доказательство.

1. Пусть z_k — нуль порядка n_k функции $f(z)$, тогда

$$f(z) = (z - z_k)^{n_k} \cdot f_1(z),$$

где $f_1(z_k) \neq 0$, и точка z_k является правильной точкой $f_1(z)$. Тогда

$$\varphi(z) = \frac{n_k}{z - z_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Значит, z_k является полюсом 1-го порядка функции $\varphi(z)$ и Выч$[\varphi(z), z_k] = n_k$.

2. Пусть z_k — полюс порядка p_k: $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z - z_k)^{p_k}}$, где $\psi(z_k) \neq$ $\neq 0$, и точка z_k является правильной точкой функции $\psi(z)$, откуда

$$\varphi(z) = \frac{-p_k}{(z - z_k)} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Следовательно, Выч$[\varphi(z), z_k] = -p_k$ (логарифмический вычет в полюсе равен порядку полюса, взятому со знаком минус).

Теорема 16.2 *Если* $f(z) \in C^\infty$ *во всех точках области* g *за исключением* N *особых точек — полюсов, функция* $f(z) \neq 0$ *на границе области* g, *и все точки границы* ∂g *правильные, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = N - P,$$

где N *— полное число нулей* $f(z)$ *с учетом кратности,* P *— полное число полюсов* $f(z)$ *с учетом порядка полюсов* $\left(N = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k,\ P = \sum\limits_{k=1}^{p} p_k\right)$.

Доказательство. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\partial g^+} \varphi(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{m=1}^{M} \text{Выч}[\varphi(z), z_m] =$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{N} n_k - \sum_{k=1}^{P} p_k \right) = 2\pi i (N - P).$$

В частности, если $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$, то $N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$

16.2. Принцип аргумента. Для рассмотренного в теореме 16.2 интеграла справедливо следующее преобразование:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^+} d\ln f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^+} d\left(\ln |f(\xi)|\right) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial g^+} d(\arg f(\xi)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \text{Var}\left[\, \ln |f(\xi)|\, \right]\Big|_{\partial g^+} + \frac{1}{2\pi} \text{Var}\left[\arg f(\xi)\right]\Big|_{\partial g^+}. \quad (16.1)$$

Здесь $\text{Var}[f(\xi)]$ обозначает изменение (вариацию) функции при обходе точкой ξ замкнутого контура ∂g^+ Действительная функция $\ln |f(\xi)|$ является однозначной функцией, поэтому ее вариация при обходе точкой ξ замкнутого контура ∂g^+ равна 0, следовательно, первое слагаемое в (16.1) равно нулю. Второе слагаемое представляет собой полную вариацию аргумента функции $f(\xi)$ при обходе точкой ξ замкнутого контура ∂g^+, деленную на 2π.

Итак, справедлив ***принцип аргумента***:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg(f(\xi))]\Big|_{\partial g^+}.$$

Геометрическая интерпретация. Изобразим значения $w = f(z)$ точками на комплексной плоскости w. Поскольку $f(z) \in C(\partial g)$, то при полном обходе точкой z контура ∂g на комплексной плоскости z соответствующая ей точка на плоскости w описывает некий замкнутый контур C. При этом точка $w = 0$ может оказаться как вне, так и внутри области, ограниченной контуром C. В первом случае $\text{Var}[\arg(w)]\Big|_C = 0$

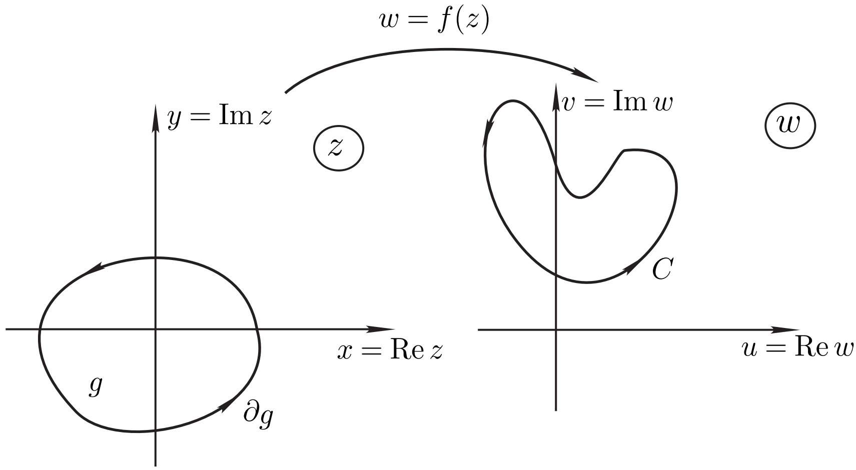


Рис. 29.

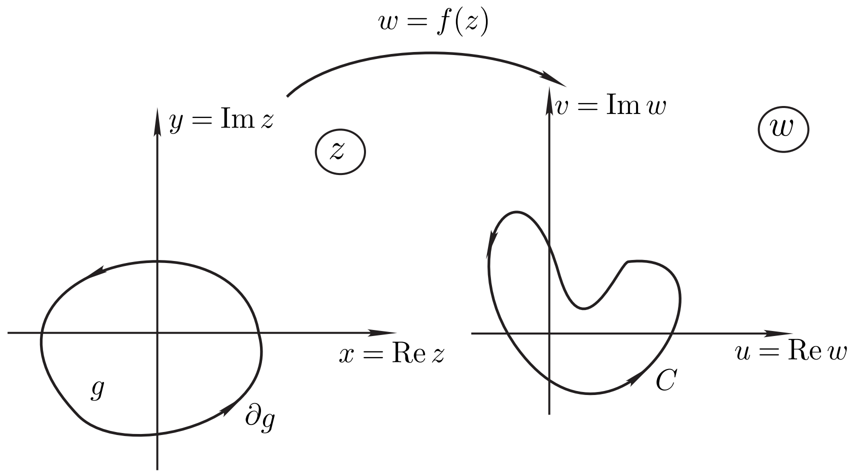


Рис. 30.

(рис. 29). Во втором случае $\operatorname{Var}[\arg(w)]\Big|_C = \pm 2\pi \cdot K$ (рис. 30), где K — число полных обходов вокруг точки $w = 0$, которое совершает точка w при своем движении по контуру C. При этом точка w может обходить точку $w = 0$ как в положительном направлении, против часовой стрелки (тогда выбираем 2π), так и в отрицательном, по часовой стрелке (тогда выбираем -2π).

Таким образом, разность между полным числом нулей и полюсов функции $f(z)$ в области g определяется числом оборотов, которое совершает точка $w = f(z)$ вокруг точки $w = 0$, при положительном обходе точкой z контура ∂g.

Пример 16.1. *Найти число корней уравнения*

$$\Psi(z) = z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0$$

в правой полуплоскости.

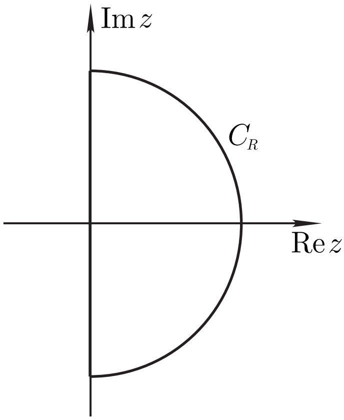


Рис. 31.

Решение. В силу принципа аргумента при $P = 0$ имеем $N = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\,[\arg\Psi(\xi)]\Big|_{\partial g^+}$, где граница области состоит из полуокружности C_R и ее диаметра, лежащего на мнимой оси (рис. 31).

Преобразуем функцию $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = z^5\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right).$$

В силу того, что аргумент произведения равен сумме аргументов, получаем

$$\begin{aligned}\arg(\Psi(z)) = \arg\left(z^5\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)\right) &=\\ = \arg\left(z^5\right) + \arg\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right) &=\\ = 5\arg(z) + \arg\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)&.\end{aligned}$$

Рассмотрим вариацию аргумента на полуокружности и устремим R к бесконечности:

$$\lim_{R\to\infty}\mathrm{Var}\,[\arg\Psi(z)]\Big|_{C_R} = 5\lim_{R\to\infty}\mathrm{Var}\,[\arg z]\Big|_{C_R} + \\ + \lim_{R\to\infty}\mathrm{Var}\left[\arg\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)\right]\Big|_{C_R}.$$

Первый предел равен π, так как переменная z изменяется от $-i\infty$ до $+i\infty$. Второй предел равен 0, так как под знаком arg стоит функция, которая стремится к 1 при $R \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\mathrm{Var}\,[\arg\Psi(z)]\Big|_{C_R} = 5\pi$.

Пусть z движется по мнимой оси от $z = iR$ до $z = -iR$, то есть $z = it$, где t — действительная переменная:

$$\Psi(z) = \Psi(it) = u(t) + iv(t) = t^4 - 1 + i\left(t^5 - 2t^3 - 8t\right).$$

Построим график функции. Для этого найдем точки пересечения кривой

$$\begin{cases} u(t) = t^4 - 1 \\ v(t) = t^5 - 2t^3 - 8t \end{cases}$$

с координатными осями:

$$\begin{cases} t^4 - 1 = 0 & \Rightarrow \quad t = \pm 1, \\ t^5 - 2t^3 - 8t = 0 & \Rightarrow \quad t = \pm 2,\ t = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $u(t)$ и $v(t)$ одновременно в ноль не обращаются, значит, на мнимой оси у исходной функции нет нулей, и применение принципа аргумента законно.

Таблица 1. К примеру 16.1.

t	u	v
2	15	0
1	0	-9
0	-1	0
-1	0	9
-2	15	0

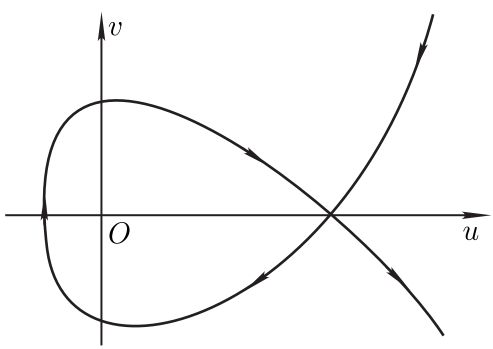


Рис. 32. К примеру16.1.

Отсюда $\lim\limits_{R\to\infty} \operatorname{Var}\left[\arg\Psi(z)\right]\Big|_{z=iR}^{z=-iR} = -3\pi$, то есть вектор, проведенный из начала координат до кривой, повернулся на угол -3π (рис. 32). Следовательно, $N = \dfrac{1}{2\pi}(5\pi - 3\pi) = 1$.

Пример 16.2. *Найти число корней уравнения* $\Psi(z) = 0$ *в правой полуплоскости, где* $\Psi(z) = z^7 - 2z - 5$.

Решение. В силу того, что $P = 0$, из принципа аргумента следует, что $N = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{Var}\left[\arg\Psi(\xi)\right]\Big|_{\partial g^+}$, где граница области состоит из полуокружности C_R и ее диаметра (рис. 31).

Преобразуем функцию $\Psi(z) = z^7\left(1 - \dfrac{2}{z^6} - \dfrac{5}{z^7}\right)$. Так как аргумент произведения комплексных чисел равен сумме их аргументов, то

$$\arg(\Psi(z)) = \arg\left(z^7\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)\right) =$$
$$= \arg\left(z^7\right) + \arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) = 7\arg(z) + \arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right).$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{Var}\left[\arg\Psi(z)\right]\Big|_{C_R} = 7\lim_{R\to\infty} \operatorname{Var}\left[\arg z\right]\Big|_{C_R} +$$
$$+ \lim_{R\to\infty} \operatorname{Var}\left[\arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)\right]\Big|_{C_R}.$$

Первый предел равен π, так как z изменятся от $-i\infty$ до $+$ $+i\infty$. Второй предел равен 0, так как под знаком аргумента стоит функция, которая стремится к единице при $R \to \infty$. Значит,

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{Var}\left[\arg\Psi(z)\right]\Big|_{\mathrm{C}_R} = 7\pi.$$

Пусть z движется по мнимой оси от $z = iR$ до $z = -iR$. Сделаем замену $z = it$:

$$\Psi(z) = \Psi(it) = u(t) + iv(t) = -5 - i\left(t^7 + 2t\right).$$

Заметим, что $u(t)$ и $v(t)$ одновременно в ноль не обращаются, значит, на мнимой оси у исходной функции нет нулей и применение принципа аргумента законно.

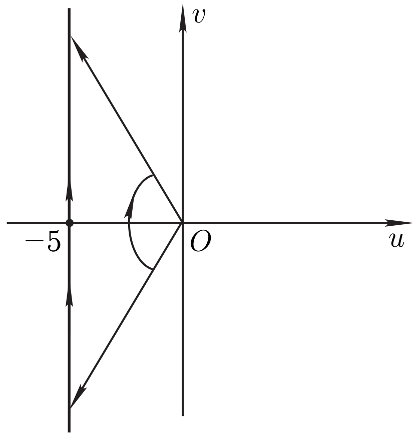


Рис. 33. К примеру 16.2.

Так как $\lim\limits_{R\to\infty} \operatorname{Var}\left[\arg \Psi(z)\right]\Big|_{z=iR}^{z=-iR} = -\pi$, то вектор повернулся по часовой стрелке на угол π (рис. 33).

Следовательно, $N = \dfrac{1}{2\pi}(7\pi - \pi) = 3$.

Задача 16.3. *Найдите число корней уравнения*

$$z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0$$

в правой полуплоскости комплексной плоскости z.
Ответ: 7.

16.3. Теорема Руше. Во многих случаях вычисления можно значительно облегчить благодаря теореме Руше.

Теорема 16.3 (<u>*Руше*</u>) *Если для функций* $f(z)$ *и* $\varphi(z)$ *выполняются условия* $f(z),\ \varphi(z) \in C^\infty(\overline{g})$ *и* $|f(z)|\Big|_{\partial g} > |\varphi(z)|\Big|_{\partial g}$, *то* $N[f(z)+\varphi(z)]\Big|_g = N[f(z)]\Big|_g$.

Доказательство. Для $f(z)$ и $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ выполнены все условия теоремы 16.2. Действительно, $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$, следовательно, $f(z)\Big|_{\partial g}$ не имеет особых точек, и так как

$$|f(z)|\Big|_{\partial g} > |\varphi(z)|\Big|_{\partial g},$$

то

$$|f(z)|\Big|_{\partial g} \neq 0.$$

Далее, $F(z) \in C^\infty(\overline{g})$, откуда $F(z)|_{\partial g}$ не имеет особых точек, и так как

$$|F(z)|\Big|_{\partial g} = |f(z) + \varphi(z)|\Big|_{\partial g} \geqslant |f(z)|\Big|_{\partial g} - |\varphi(z)|\Big|_{\partial g} > 0,$$

то

$$N[f+\varphi]\Big|_g = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg(f+\varphi)]\Big|_{\partial g}; \quad N[f]\Big|_g = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg(f)]\Big|_{\partial_g}.$$

Заметим, что

$$\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b},$$

и так как

$a = |a|e^{i\arg a}$, $b = |b|e^{i\arg b}$, получаем

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}e^{i(\arg a - \arg b)} \Longrightarrow \arg\frac{a}{b} = \arg a - \arg b.$$

Тогда

$$N[f+\varphi]\Big|_g - N[f]\Big|_g = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg(f+\varphi) - \arg(f)]\Big|_{\partial_g} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\left[\arg\left(\frac{f+\varphi}{f}\right)\right]\Big|_{\partial g} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]\Big|_{\partial g}.$$

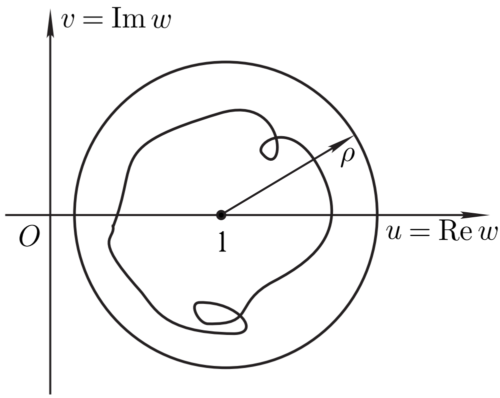


Рис. 34. К теореме 16.3

Введем функцию $w(z) = 1 + \dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$. При обходе точкой z контура ∂g соответствующая ей переменная w опишет некоторую замкнутую кривую C, которая в силу того, что $|f(z)|\Big|_{\partial g} >$ $> |\varphi(z)|\Big|_{\partial g}$, целиком будет лежать внутри некоторого круга $|w-1| \leqslant \rho < 1$, то есть точка $w=0$ лежит вне кривой C (рис. 34). Следовательно,

$$\operatorname{Var}\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]\Big|_{\partial g} = 0.$$

Пример 16.4. *Найти число корней уравнения* $\Psi(z)=0$ *в указанной области:*

$$\Psi(z) = z^6 - 6z + 10, \quad |z| < 1.$$

Решение. Положим $\varphi(z) = z^6 - 6z$, $f(z) = 10$, тогда на границе области $|z| = 1$ выполняются соотношения $|\varphi(z)| = \left|z^6 - 6z\right| \leqslant$ $\leqslant \left|z^6\right| + 6|z| = 7$. А так как $|f(z)| = 10$, то $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Функция $f(z)$ не имеет корней внутри области, значит по теореме Руше $N[f]\,|_{|z|<1} = 0$, откуда $N[\Psi]\,|_{|z|<1} = N[f]\,|_{|z|<1} = 0$.

Задача 16.5. *Найти число корней уравнения* $\Psi(z) = 0$ *в указанной области:* $\Psi(z) = z^7 - 6z^3 + z^2 - 9$ *в круге* $|z| < 1$.
Ответ: нет корней.

Пример 16.6. *Найти число корней уравнения* $\Psi(z) = 0$ *в указанной области:* $\Psi(z) = z^4 - 3z^3 - 1, \quad |z| < 2$.

Решение. Положим $\varphi(z) = z^4 - 1$; $f(z) = -3z^3$, тогда на границе области $|z| = 2$ выполняются соотношения $|\varphi(z)| = \left|z^4 - 1\right| \leqslant$ $\leqslant \left|z^4\right| + 1 = 17$ и $|f(z)| = \left|3z^3\right| = 24$, то есть $|f(z)| > |\varphi(z)|$. В силу того, что $f(z)$ имеет 3 корня внутри области, по теореме Руше получаем

$$N[f]\Big|_{|z|<2} = 3 \quad \Rightarrow \quad N[\Psi]\Big|_{|z|<2} = N[f]\Big|_{|z|<2} = 3.$$

Задача 16.7. *Найти число корней уравнения* $\Psi(z) = 0$ *в указанной области:* $\Psi(z) = z^{12} - 5z^3 - 2$ *в круге* $|z| < 1$.
Ответ: 3 корня.

Пример 16.8. *Найти число корней уравнения* $\Psi(z) = 0$ *в указанной области:*

$$\Psi(z) = z^4 - 5z + 1, \; 1 < |z| < 2.$$

Решение. Пусть N — число корней уравнения в заданном кольце, тогда

$$N\left[\Psi\right]\Big|_{1<|z|<2} = N_2\left[\Psi\right]\Big|_{|z|<2} - N_1\left[\Psi\right]\Big|_{|z|<1}.$$

Здесь N_1 — число корней в круге радиуса 1, N_2 — число корней в круге радиуса 2.

Для нахождения N_1 положим $\varphi(z) = z^4 + 1$; $f(z) = -5z$, тогда на границе $|z| = 1$ выполняются соотношения $|\varphi(z)| = = \left|z^4 + 1\right| \leqslant \left|z^4\right| + 1 = 2$. В силу того, что $|f(z)| = |5z| = 5$, получаем $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

Так как функция $f(z)$ имеет один корень внутри области, то по теореме Руше

$$N_1\left[f\right]\Big|_{|z|=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad N_1\left[\Psi\right]\Bigg|_{|z|<1} = N_1\left[f\right]\Big|_{|z|<1} = 1.$$

Для того, чтобы найти N_2, положим $\varphi(z) = 1 - 5z$, $f(z) = z^4$, тогда $|z| = 2$ $|\varphi(z)| = |1 - 5z| \leqslant |5z| + 1 = 11$. В силу того, что $|f(z)| = \left|z^4\right| = 1$, выполняется соотношение $|f(z)| > |\varphi(z)|$ и, так как функция $f(z)$ имеет 4 корня внутри области, по теореме Руше

$$N_2\left[f\right]\Big|_{|z|<2} = 4 \quad \Rightarrow \quad N_2\ \left[\Psi\right]\Big|_{|z|<2} = N_2\left[f\right]\Bigg|_{|z|<2} = 4.$$

Окончательно,

$$N\left[\Psi\right]\Big|_{1<|z|=2} = N_2\left[\Psi\right]\Big|_{|z|<2} - N_1\left[\Psi\right]\Big|_{|z|<1} = 4 - 1 = 3.$$

Задача 16.9. *Найти число корней уравнения* $z^5 - 6z^2 + 1 = 0$ *в области:* *а)* $|z| < 1$, *б)* $1 < |z| < 2$.
Ответ: а) 2 корня, б) 3 корня.

16.4. Основная теорема алгебры. Важным следствием теоремы Руше является основная теорема высшей алгебры.

Теорема 16.4 *Полином n-ой степени имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учетом их кратности).*

Доказательство. Представим полином

$$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

в виде

$$F(z) = f(z) + \varphi(z), \text{ где } f(z) = a_0 z^n, \ \varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Составим отношение

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

Для любых a_0, $a_1 \ldots$, a_n существует такое значение R_0, что для любых $z = R > R_0$ выполняется соотношение

$$0 < \left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|\Bigg|_{|z|=R} < 1.$$

В силу теоремы Руше

$$N[F]\Big|_{|z|<R} = N[f]\Big|_{|z|<R}.$$

Так как функция $f(z) = a_0 z^n$ на всей комплексной плоскости имеет единственный n-кратный нуль — точку $z = 0$, то $N[F]\Big|_{|z|<R} = N[f]\Big|_{z<R} = n.$

16.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите число корней уравнения в правой полуплоскости:
   а) $z^3 - 4z^2 + 5 = 0$; б) $z^7 - 2z - 5 = 0$;
   в) $z^5 + 5z^4 - 5 = 0$; г) $z^3 - 2z - 5 = 0$.
2. Найдите число корней уравнения в указанной области:
   а) $z^{10} - 6z^4 + 3z - 1 = 0$ в круге $|z| < 1$;
   б) $e^z - 4z^n - 1 = 0$ (n – натуральное число) в круге $|z| < 1$;
   в) $z^6 - 6z + 10 = 0$ в круге $|z| < 1$;
   г) $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ в круге $|z| < 2$;
   д) $z^3 + z + 1 = 0$ в круге $|z| < \dfrac{1}{2}$;
   е) $z^5 + z^2 + 1 = 0$ в круге $|z| < 2$;
   ж) $z^8 + 6z + 10 = 0$ в круге $|z| < 1$;
   з) $z^4 - 5z + 1 = 0$ в кольце $1 < |z| < 2$;
   и) $z^6 - 8z + 10 = 0$ в кольце $1 < |z| < 3$.
   Совет. Воспользуйтесь теоремой Руше.

§ 17. Вычисление контурных и определенных интегралов с помощью вычетов

17.1. Вычисление контурных интегралов. Интегралы по кривой на комплексной плоскости можно находить с помощью основной теоремы теории вычетов.

Пример 17.1. *Вычислить интеграл:*

$$\text{а)} \int\limits_{|z|=2} \frac{e^{az}}{z^2+1}dz; \qquad \text{б)} \int\limits_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz.$$

Решение. а) В область, ограниченную контуром, попадают две изолированные особые точки: $z = i$ и $z = -i$. Тогда

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{az}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\text{Выч}\left[\frac{e^{az}}{z^2+1}; i\right] + \text{Выч}\left[\frac{e^{az}}{z^2+1}; -i\right]\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{ia}}{2i} - \frac{e^{-ia}}{2i}\right) = 2\pi i \sin a\ ;$$

б) В область, ограниченную контуром, попадают две изолированные особые точки: $z = 0$ и $z = 1$.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz = 2\pi i\left(\text{Выч}\left[\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}; 0\right] + \text{Выч}\left[\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}; 1\right]\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{2} - e\right).$$

Задача 17.2. *Вычислите интеграл* $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=0,5} \frac{z-2}{z^3+1}dz.$

Ответ: $-2\pi i$

Пример 17.3. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-i\pi)^n}dz.$

Решение. В область, ограниченную контуром, попадает одна изолированная особая точка $z = i\pi$ — полюс n—ного порядка:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-i\pi)^n}dz = 2\pi i\text{Выч}\left[\frac{e^z}{(z-i\pi)^n}; i\pi\right] = 2\pi i\frac{e^{i\pi}}{(n-1)!} = \frac{-2\pi i}{(n-1)!}.$$

Задача 17.4. *Вычислите интеграл:*

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}dz$; *б)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2{,}5} \frac{1}{z^2(z-2)(z+3)}dz.$

Ответ: а) $-\dfrac{\pi i}{3}$; б) $\dfrac{2\pi i}{45}$.

Иногда удобнее не находить вычеты во всех особых точках внутри контура, а воспользоваться теоремой о равенства нулю суммы всех вычетов, включая бесконечно удаленную точку.

Пример 17.5. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^5+3}{z^6+1}dz.$

Решение.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^5+3}{z^6+1}dz = -2\pi i \text{Выч}\left[\frac{z^5+3}{z^6+1}; \infty\right] = 2\pi i.$$

Задача 17.6. *Вычислите интеграл* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^9-z^{11}}dz.$

Ответ: 0.

17.2. Задачи для самостоятельного решения.

Вычислите интегралы (обход контура — в положительном направлении):

1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3}dz$; 2. $\displaystyle\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{(z-z_0)^2}$; 3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}dz$;

4. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z-1}{z^3}dz$; 5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \sin\frac{1}{z}\,dz$; 6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2+z^3}dz$;

7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2+z^3}dz$; 8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^3+1}dz$; 9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^4+1}dz$;

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^3 e^{\frac{1}{z}}dz$; 11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cos\frac{1}{z}\,dz$; 12. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} z\sin\frac{1}{z-2}\,dz$;

13. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z^2}}dz$; 14. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} z e^{\frac{1}{z+1}}dz$; 15. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \operatorname{ctg} z\,dz.$

17.3. Вычисление определенных интегралов. С помощью основной теоремы теории вычетов можно вычислять интегралы вида

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx,$$

где R — рациональная функция своих аргументов. Интегралы такого типа могут быть сведены к интегралам от аналитической функции комплексной переменной по замкнутому контуру.

Сделаем замену

$$z = e^{ix} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}, \quad \cos x = \frac{z + \dfrac{1}{z}}{2}, \quad \sin x = \frac{z - \dfrac{1}{z}}{2i}.$$

Тогда интеграл преобразуется к виду

$$I = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} R\left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

где интегрирование ведется по контуру $|z| = 1$ на комплексной плоскости.

Такой интеграл можно найти с помощью теории вычетов:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\left[\widetilde{R}(z), z_k\right],$$

где $\widetilde{R}(z) = \dfrac{1}{z} \cdot R\left(z + \dfrac{1}{z}, z - \dfrac{1}{z}\right)$, а точки z_k — особые точки $\widetilde{R}(z)$, находящиеся внутри единичного круга.

Пример 17.7. *Вычислить* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{3}{5}\cos x}$.

Сделаем замену $z = e^{ix}$, тогда $dx = \dfrac{1}{i}\dfrac{dz}{z}$, $\cos x = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}$. Тогда

$$I = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{3}{10}\left(z + \frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z} = \frac{10}{3i} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{10}{3}z + 1}.$$

Особые точки $z_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $z_2 = -3$ — полюсы 1-го порядка, причем внутрь круга попадает только первая из них. Следовательно,

$$I = 2\pi i \text{Выч}\left[\frac{1}{z^2 + \frac{10}{3}z + 1}; -\frac{1}{3}\right] = \frac{20\pi}{3}\frac{1}{2z + \frac{10}{3}}\Bigg|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{5\pi}{2}.$$

Задача 17.8. *Вычислите* $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

17.4. Задачи для самостоятельного решения.

Вычислите определенные интегралы, сведя их к интегралам по окружности $|z| = 1$ с помощью замены переменной $z = e^{ix}$:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\cos x - 5}$;
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{10 - 6\cos x}$;
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2 + \sin x}$;
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5 - \sin x}$;
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin x - 2}$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение вычета в конечной изолированной особой точке аналитической функции.
2. Сформулируйте определение вычета в бесконечно удаленной изолированной особой точке аналитической функции.
3. Запишите формулу для вычисления вычета функции $f(z)$ в полюсе $z_0 \neq \infty$ порядка $m \geqslant 1$.

4. Сформулируйте основную теорему теории вычетов.
5. Сформулируйте теорему о вычетах функции, аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Найдите сумму вычетов функции $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ ($n \geqslant 2$ — натуральное число) во всех изолированных особых точках, кроме бесконечно удаленной точки.

2. Вычислите интегралы (обход контура — в положительном направлении):

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4+1)^5}$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z^2+2z+5)^6}$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^4 dz}{(z^3-1)^2}$.

3. Вычислите интегралы (обход контура — в положительном направлении):

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3} \operatorname{ctg} z\, dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \operatorname{tg} z\, dz$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z-i+2|=5} \frac{dz}{\sin z}$.

§ 18. Вычисление несобственных интегралов I-го рода от функции действительной переменной с помощью теории вычетов

Пусть на комплексной плоскости даны две области g_1 и g_2, имеющие общую часть. Пусть в области g_1 задана однозначная аналитическая функция $f_1(z)$, а в области g_2 — однозначная аналитическая функция $f_2(z)$, причем на общей части областей они тождественно совпадают. Тогда функция

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in g_1, \\ f_2(z), & z \in g_2 \end{cases}$$

— аналитическая на области $g_1 + g_2$.

Эту функцию называют **аналитическим продолжением** функции $f_1(z)$ ($f_2(z)$) на область $g_1 + g_2$.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть на отрезке $[a; b]$ действительной оси x задана непрерывна функция действительной переменной $f(x)$. Тогда в некоторой области комплексной плоскости, содержащей данный отрезок действительной оси, может существовать **только одна** аналитическая функция $f(z)$ комплексной переменной z, принимающая значения $f(x)$ на $[a; b]$. В этом случае **функция** $f(z)$

называется аналитическим продолжением $f(x)$ в комплексную область.

18.1. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Лемма 18.1 *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют такие положительные числа M, R_0, δ, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R_0$, выполняется условие $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$, где $\delta > 0$. Тогда существует $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(\xi)d\xi = 0$, где C_R — полуокружность $|z| = R$ в области $\operatorname{Im} z > 0$.*

Доказательство. Отметим, что условие равномерной ограниченности $|f(z)|$ относительно аргумента при $|z| > R_0$ означает, что все особые точки лежат внутри полукруга радиуса R_0.

При $R > R_0$:

$$\left|\int\limits_{C_R} f(\xi)d\xi\right| \leqslant \int\limits_{C_R} |f(\xi)|\, dl < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^{\delta}} \to 0 \ \text{ при } \ R \to \infty.$$

Замечание 18.1

1. *Если условия леммы 18.1 выполнены в каком-либо секторе $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} f(\xi)d\xi = 0$, где C'_R — дуга окружности, лежащая в секторе $\{|z| = R;\ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$.*
2. *Условия леммы 18.1 будут выполнены, если $f(z)$ является аналитической в окрестности точки $z = \infty$, которая является <u>нулем не ниже второго порядка</u> для $f(z)$, то есть в окрестности $z = \infty$ можно функцию $f(z)$ представить в виде $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{z^2}$, где $|\psi(z)| < M$.*

Теорема 18.2 *Пусть функция $f(x)$ задана на действительной оси $-\infty < x < +\infty$, и существует аналитическая функция*

$f(z)$ в области $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, совпадающая на действительной оси с $f(x)$, при этом $f(z)$ не имеет особых точек на действительной оси и удовлетворяет условиям леммы 18.1. *Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *сходится, и имеет место равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n],$$

где z_n — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур в верхней полуплоскости, состоящий из полуокружности C_R и диаметра $-R \leqslant x \leqslant R$, который охватывает все особые точки функции $f(z)$. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{-R}^{R} f\,(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n], \tag{18.1}$$

где z_n — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости. По лемме 18.1 $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(\xi)d\xi = 0$, а правая часть равенства (18.1) не зависит от R.

Поэтому, переходя к пределу в (18.1) при $R \to \infty$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n].$$

Замечание 18.2

1. *В этом случае функция $f(z)$ является аналитическим продолжением $f(x)$ на верхнюю полуплоскость.*
2. *Если $f(x)$ — четная функция, и она удовлетворяет условиям теоремы* 18.2, *то* $\int\limits_{0}^{\infty} f\,(x)\,dx = \pi i \sum\limits_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n]$.
3. *Для аналитического продолжения $f(x)$ в нижнюю полуплоскость можно сформулировать аналогичную теорему.*

Важно помнить: данную теорему можно применять только если на действительной оси нет особых точек функции $f(z)$.

Пример 18.1. *Вычислить несобственные интегралы*

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; *б)* $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}$.

Решение.

а) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\cdot \text{Выч}\left[\frac{1}{1+z^2},i\right]=\pi \qquad \text{(рис. 35);}$$

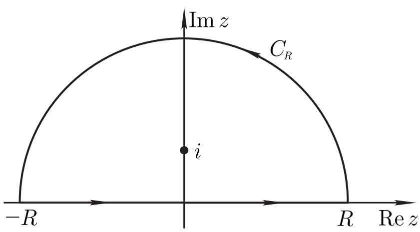


Рис. 35.

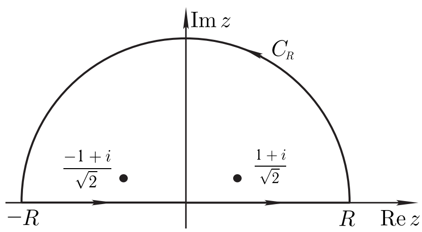


Рис. 36.

б) $$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}=\pi i\left(\text{Выч}\left[\frac{z^2}{1+z^4},\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right]+\right.$$
$$\left.+\text{Выч}\left[\frac{z^2}{1+z^4},\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right]\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\qquad \text{(рис. 36).}$$

Задача 18.2. *Вычислите* $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(9+x^2\right)\left(4+x^2\right)}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{60}$.

Пример 18.3. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{1}{1+z^n}$, совпадающую с $f(x)$ на действительной оси. Тогда интеграл по замкнутому контуру Г, состоящему из L_1 — отрезка действительной оси от 0 до R, дуги окружности C_R' и L_2 — радиуса сектора для $\varphi=\dfrac{2\pi}{n}$

(рис. 37) равен

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \text{Выч}\left[\frac{1}{1+z^n}, e^{\frac{i\pi}{n}}\right] = \frac{2\pi i}{ne^{i\pi\frac{n-1}{n}}} = -\frac{2\pi i}{ne^{-\frac{i\pi}{n}}}, \qquad (18.2)$$

($z_0 = e^{i\pi n}$ — полюс 1-го порядка).

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{C'_R} f(\xi)d\xi + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^R f(x)\,dx + \int\limits_{C'_R} f(\xi)d\xi + e^{\frac{2\pi i}{n}} \int\limits_R^0 f(x)\,dx,$$

так как в третьем слагаемом $z = xe^{\frac{2\pi i}{n}}$, то есть $f(z) = f\left(xe^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = \dfrac{1}{1+x^n e^{2\pi i}} = \dfrac{1}{1+x^n}$.

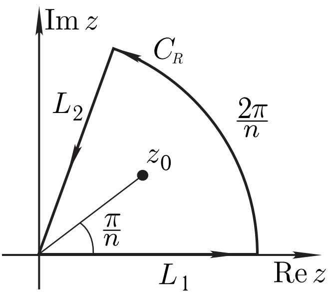


Рис. 37.

Нетрудно видеть, что первое и третье слагаемые в сумме дают $\int\limits_0^R f(x)\,dx\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$.

При $R \to \infty$ второе слагаемое стремится к нулю (по замечанию 1 к лемме 18.1), поэтому из (18.2) получаем

$$-\frac{2\pi i}{ne^{-\frac{i\pi}{n}}} = \int\limits_0^\infty f(x)\,dx\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \iff$$

$$\iff \int\limits_0^\infty f(x)\,dx = -\frac{2\pi i}{(ne^{-\frac{i\pi}{n}})(1 - e^{\frac{2i\pi}{n}})} = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}.$$

Задача 18.4. *Вычислите* $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{2+x^6}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2^{\frac{5}{6}}}\dfrac{\pi}{3}$.

Пример 18.5. *Вычислить* $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx,\ (0 < a < 1).$

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^{z}}$, являющуюся аналитическим продолжением подынтегральной функции на комплексную плоскость. Возьмем контур L в виде прямоугольника $ABCD$ (рис. 38). Внутри этого контура у функции $f(z)$ суще-

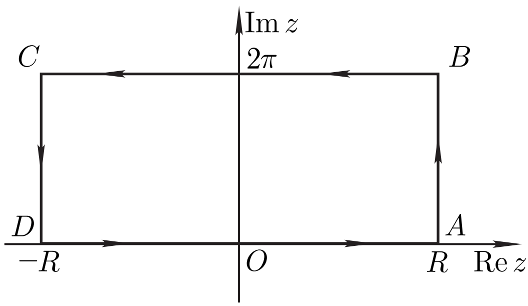


Рис. 38.

ствует одна особая точка $z = \pi i$, найдем в ней вычет:

$$\text{Выч}[f(z), \pi i] = \left. \frac{e^{az}}{(1+e^{z})'} \right|_{z=\pi i} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Тогда $\int\limits_{L} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \text{Выч}\,[f(z), \pi i]\,.$

Оценим интегралы по вертикальным сторонам AB и CD прямоугольника L:

$$\left| \int\limits_{AB} f(z)dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ z = R + iy, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\ , \left| \frac{e^{az}}{1+e^{z}} \right| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^{R}-1} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^{R}-1}dy = \frac{2\pi e^{aR}}{e^{R}-1} \to 0$$

при $R \to \infty$, так как $0 < a < 1$. Аналогично

$$\left| \int\limits_{CD} f(z)dz \right| \leqslant \frac{2\pi e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Интеграл по нижней стороне прямоугольника равен $\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$, а интеграл по верхней стороне —

$$\int\limits_{BC} f(z)dz = \{z = x + 2\pi i, -R \leqslant x \leqslant R\} =$$

$$= \int\limits_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{a2\pi i} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx. \quad (18.3)$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в формуле (18.3), получаем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Задача 18.6. *Вычислите*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1+e^x} dx \ (0 < a < 1,\ 0 < b < 1).$$

Ответ: $\pi \left(\dfrac{1}{\sin(a\pi)} - \dfrac{1}{\sin(b\pi)} \right)$.

18.2. Задачи для самостоятельного решения.

Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 - 4x + 13)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(x^2 - 1)\, dx}{x^4 + 1}$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 2)\, dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$; е) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$.

18.3. Лемма Жордана. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx$.

Лемма 18.3 (Жордана) *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек, и $f(z)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg z$ $(0 \leqslant \arg z \leqslant \pi)$ при $|z| \to \infty$.*

Тогда при $a > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi = 0,$$

где C_R — дуга полуокружности $|z| = R$ в области $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказательство. По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $R_0 > 0$, что $|f(z)| < \varepsilon$ при любом $|z| = R > R_0$. Заметим, что $\varepsilon \to 0$ при $R \to \infty$.

Сделаем замену переменной $\xi = Re^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $d\xi = Rie^{i\varphi} d\varphi$.

При $R > R_0 > 0$ выполняются неравенства:

$$\left| \int\limits_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi \right| = \left| \int\limits_{C_R} e^{ia(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)} f\,(\xi)\, Rie^{i\varphi} d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant R \int\limits_{C_R} e^{-aR\sin\varphi} \left| f(\xi) \right| d\varphi \leqslant \varepsilon R \int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi = 2\varepsilon R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi.$$

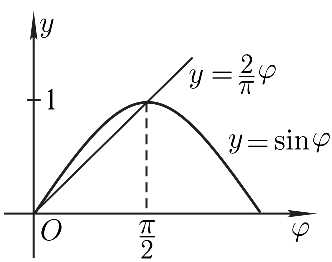


Рис. 39.

Учитывая, что $\sin\varphi \geqslant \dfrac{2}{\pi}\varphi$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 39) и $a > 0$, получаем:

$$2\varepsilon R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi \leqslant 2\varepsilon R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = \frac{\pi\varepsilon(1-e^{-aR})}{a} \to 0$$

при $R \to \infty$ ($\varepsilon \to 0$).

Замечание 18.3

1. *Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, то при $a > 0$ $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{-ia\xi}f(\xi)d\xi = 0$, где C_R — полуокружность $|z| = R$ в области $\operatorname{Im} z < 0$.*
2. *Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, то при $a > 0$ $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'_R} e^{-a\xi}f(\xi)d\xi = 0$, где C_R — полуокружность $|z| = R$ в области $\operatorname{Re} z > 0$.*
3. *Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, то при $a > 0$ $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{a\xi}f(\xi)d\xi = 0$, где C_R — полуокружность $|z| = R$ в области $\operatorname{Re} z < 0$.*

Теорема 18.4 *Пусть функция $f(x)$ на действительной оси совпадает с функцией $f(z)$, аналитической в верхней полуплоскости, кроме, быть может, конечного числа изолированных особых точек, не имеет особых точек на действительной оси и удовлетворяет условиям леммы Жордана в верхней полуплоскости.*

Тогда при $a > 0$ существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\,dx$, и имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{n=1}^{N}\text{Выч}\left[e^{iaz}f(z), z_n\right], \tag{18.4}$$

где z_n — изолированные особые точки в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказательство. При $R > R_0$ рассмотрим замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R < x < R$ и полуокружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости (рис. 40).

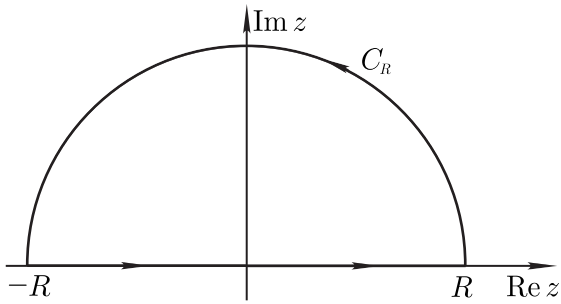


Рис. 40.

По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)dx + \int_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[e^{iaz} f(z), z_n].$$

Но, по лемме Жордана $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi = 0$, а правая часть не зависит от R, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}\left[e^{iaz} f(z), z_n\right].$$

Пример 18.7. *Вычислить несобственный интеграл* $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)dx}{x^2 + a^2}$, *если* $k > 0$, $a > 0$.

Решение.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(kx)dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)dx}{x^2 + a^2} = \text{Re}\left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}dx}{x^2 + a^2}\right) =$$

$$= \text{Re}\left(\pi i \text{Выч}\left[\frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2}, ia\right]\right) = \text{Re}\left(i\frac{e^{-ka}}{2ia}\right) = \frac{e^{-ka}}{2a}.$$

Задача 18.8. *Вычислите несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos^2 x \ dx}{x^2+9}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}\left(1+e^{-6}\right)$.

Пример 18.9. *Вычислить несобственные интегралы:*

$$C = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(ax)dx}{x^2-2x+10}; \quad S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)dx}{x^2-2x+10}\,(a>0)\,.$$

Решение.

$$C + iS = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}dx}{x^2-2x+10} = 2\pi i \text{Выч}\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2-2z+10}, 1+3i\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-3a}(1+3i)\cdot(\cos a + i\sin a).$$

Отсюда:

$$C = \text{Re}\left(\frac{\pi}{3}e^{-3a}(1+3i)(\cos a + i\sin a\ )\right) = \frac{\pi}{3}e^{-3a}(\cos a - 3\sin a);$$

$$S = \text{Im}\left(\frac{\pi}{3}e^{-3a}(1+3i)(\cos a + i\sin a)\right) = \frac{\pi}{3}e^{-3a}(\sin a + 3\cos a).$$

Пример 18.10. *Вычислить несобственные интегралы*

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x\sin x\ dx}{x^2+4}$; *б)* $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x^3\sin x\ dx}{x^4+4}$.

Решение.

а) $$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x\ dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\text{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4} =$$

$$= \text{Im}\left(2\pi i\text{Выч}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2+4}, 2i\right]\right) = \text{Im}\left(\pi i\frac{2ie^{-2}}{2i}\right) = \frac{\pi e^{-2}}{2};$$

б) $$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3\sin x\ dx}{x^4+4} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x dx}{x^4+4} = \frac{1}{2}\text{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3e^{ix}dx}{x^4+4} =$$

$$= \text{Im}\left(\pi i\left(\text{Выч}\left[\frac{z^3e^{iz}}{z^4+4}, 1+i\right] + \text{Выч}\left[\frac{z^3e^{iz}}{z^4+4}, -1+i\right]\right)\right) = \frac{\pi}{2}e^{-a}\cos a.$$

Задача 18.11. *Вычислите несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x dx}{x^2+9}$.

Ответ: πe^{-6}.

Пример 18.12. *Доказать, что* $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a$ *(интеграл Дирихле).*

Доказательство. Рассмотрим интеграл при $a > 0$:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x}dx \, .$$

В данном случае подынтегральная функция имеет особую точку на действительной оси, поэтому напрямую нельзя применить теорему 18.4. Выберем замкнутый контур Γ, изображенный на (рис. 41). Функция $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z}$, являющаяся аналитическим

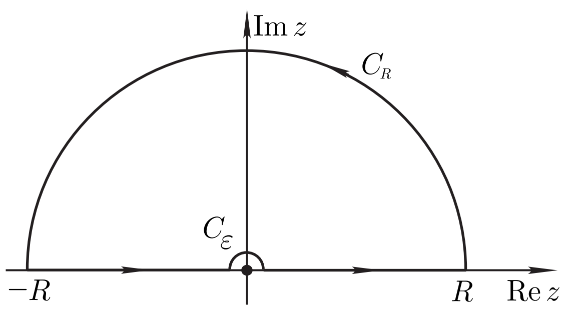


Рис. 41.

продолжением функции $\frac{e^{iax}}{x}$ на верхнюю полуплоскость, в области, ограниченной контуром Γ, особых точек не имеет. Значит по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma} f(\xi)d\xi = \int\limits_{-R}^{-\infty} \frac{e^{iax}}{x}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iax}}{x}dx + \int\limits_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{ia\xi}}{\xi}d\xi + \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{ia\xi}}{\xi}d\xi = 0.$$

Последний интеграл по лемме Жордана стремится к 0 при $R \to \infty$. Сумма первых двух интегралов при $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ стремится к $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx$ (в смысле главного значения).

Рассмотрим третий интеграл. Так как $\xi = \varepsilon e^{i\varphi}$ на контуре C_ε, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{ia\xi}}{\xi} d\xi = -\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{C_\varepsilon^+} \frac{e^{ia\xi}}{\xi} d\xi = -\pi i.$$

Значит, $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}$ при $a > 0$. Аналогично рассматривается интеграл при $a < 0$.

18.4. Вычисление несобственных интегралов с особенностями на действительной оси.

Утверждение 18.5 *Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы* 18.4 *и имеет конечное число простых полюсов на действительной оси. Тогда верно равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}[f(z), z_n] + \pi i \sum_{k=1}^{K} \text{Выч}[f(z), z_k],$$

где z_n — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости, z_k — простые полюсы на действительной оси.

Для доказательства этого утверждения будет использована следующая лемма.

Лемма 18.6 *Если $z = z_0$ — полюс первого порядка функции $f(z)$, то интеграл*

$$\int\limits_{C_\rho} f(z) dz = \pi i \cdot \text{Выч}[f(z); z_0],$$

где C_ρ — полуокружность, представленная на рис. 42.

Доказательство. Пусть точка $z = z_0$ — полюс 1-го порядка $f(z)$. Тогда в окрестности точки z_0 функцию можно представить в следующем виде:

$$f(z) = \frac{a}{z - z_0} + g(z),$$

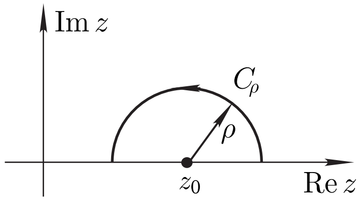


Рис. 42.

где $g(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки z_0, а значение $a = \text{Выч}\,[f(z); z_0]$. Тогда

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)dz = \int\limits_{C_\rho} g(z)dz + \int\limits_{C_\rho} \frac{adz}{z - z_0},$$

где, полагая $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, получаем

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{adz}{z - z_0} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{a\rho e^{i\varphi} i d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = -\pi i a = -\pi \cdot \text{Выч}\,[f(z), z_0]$$

Пусть $M = \max|g(z)|$ в рассматриваемой окрестности точки z_0, тогда

$$\left| \int\limits_{C_\rho} g(z)dz \right| \leqslant \pi\rho M \underset{\rho\to 0}{\to} 0.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)dz \underset{\rho\to 0}{\to} -\pi \cdot \text{Выч}\,[f(z), z_0]\,.$$

Видно, что вклад в интеграл в два раза меньше, чем от полюса, попавшего внутрь замкнутого контура. Поэтому иногда используется термин «полувычет».

Теперь докажем утверждение 18.5.

Доказательство. Рассмотрим контур Γ, представленный на рис. 43, состоящий из полуокружности C_R радиуса R в верхней полуплоскости, полуокружностей Γ_{kr} радиуса r с центрами в полюсах действительной оси и отрезков действительной оси Γ_k,

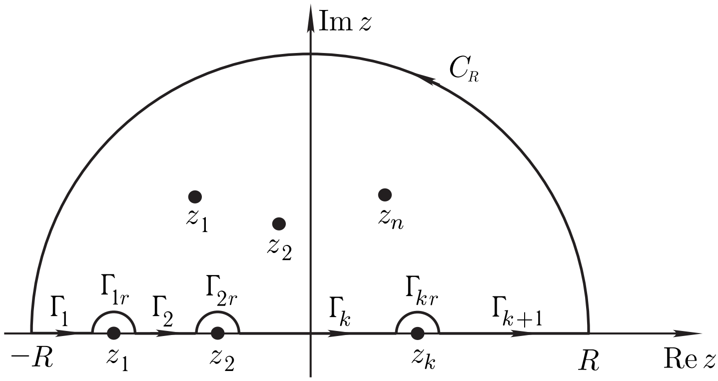


Рис. 43.

соединяющих полуокружности. Тогда по теореме Коши о вычетах имеем

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Gamma_{kr}^{-}} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{K+1} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \text{Выч}\left[f(z), z_n\right].$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, $r \to 0$ и принимая во внимание соотношения

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to 0} \int\limits_{\Gamma^{-}{}_{kr}} f(z)\,dz = -\frac{1}{2}\text{Выч}\left[f(z), z_k\right],$$

получаем требуемую формулу.

Пример 18.13. *Вычислить*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\ dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\ \ dx}{x^2 - 5x + 6} = \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\pi i\left(\text{Выч}\left[\frac{e^{iz}}{(z-2)(z-3)},2\right]+\text{Выч}\left[\frac{e^{iz}}{(z-2)(z-3)},3\right]\right)\right)=$$

$$= \operatorname{Im}\left(\pi i\left(\frac{e^{2i}}{-1}+\frac{e^{3i}}{+1}\right)\right)=\operatorname{Im}\left(\pi i\left(-\cos 2 - i\sin 2+\cos 3+i\sin 3\right)\right)=$$

$$= \pi\left(\cos 3-\cos 2\right).$$

Отметим, что у подынтегральной функции нет других особых точек, кроме точек на действительной оси.

Задача 18.14. *Вычислите* $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x\;dx}{x^2-5x+6}$.

Ответ: $\pi\left(2\sin 2-3\sin 3\right)$.

Пример 18.15. *Вычислить несобственные интегралы:*

а) $\displaystyle I=\int\limits_0^\infty\frac{\sin x\;dx}{x(x^2+1)}$; б) $\displaystyle I=\int\limits_0^\infty\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin ax\;dx}{x}$.

Решение. а) $\displaystyle I=\int\limits_0^\infty\frac{\sin x\;dx}{x(x^2+1)}=\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty\frac{e^{ix}\;dx}{x(x^2+1)}$.

Аналитическим продолжением функции $\dfrac{e^{ix}}{x(x^2+1)}$ на комплексную плоскость является функция $\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$, имеющая один полюс $z=0$ на действительной оси и один полюс $z=i$ в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_C\frac{e^{iz}dz}{z(z^2+1)}=\pi i\text{Выч}\left[\frac{e^{iz}dz}{z(z^2+1)};0\right]+2\pi i\text{Выч}\left[\frac{e^{iz}dz}{z(z^2+1)};i\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\left(1-e^{-1}\right);$$

$$\text{б) } I=\int\limits_0^\infty\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx.$$

Аналитическим продолжением функции $f(x)=\dfrac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\dfrac{e^{ix}}{x}$ на комплексную плоскость является функция $f(z)=\dfrac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\cdot\dfrac{e^{iz}}{z}$, имеющая один полюс $z = 0$ на действительной оси и один полюс $z = ib$ в верхней полуплоскости. Тогда

$$I = \pi i \text{Выч}\left[\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \cdot \frac{e^{iz}}{z}; 0\right] + 2\pi i \text{Выч}\left[\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \cdot \frac{e^{iz}}{z}; ib\right] = \\ = -\frac{\pi}{2} + \pi e^{-ab}.$$

18.5. Задачи для самостоятельного решения.

Вычислите несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2 + 1}$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^2}$; в) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + x + 1}$;

г) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1}$; д) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2 + 2x + 2}$; е) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$,

ж) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \; dx}{x^2 - 5x + 6}$.

§ 19. Вычисление интегралов от неоднозначных функций

19.1. Интегралы вида $\int\limits_{0}^{\infty} x^{a-1} f(x) dx$, $0 < a < 1$.

Пример 19.1. *Доказать, что*

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^{a-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[z^{a-1} f(z), \; z_k\right], \; 0 < a < 1,$$

если $f(x)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость.

Пусть аналитическое продолжение $f(x)$ является однозначной аналитической функцией, за исключением конечного числа изолированных особых точек, не лежащих на положительной части действительной оси, $z = \infty$ является нулем не ниже первого порядка, а точка $z = 0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

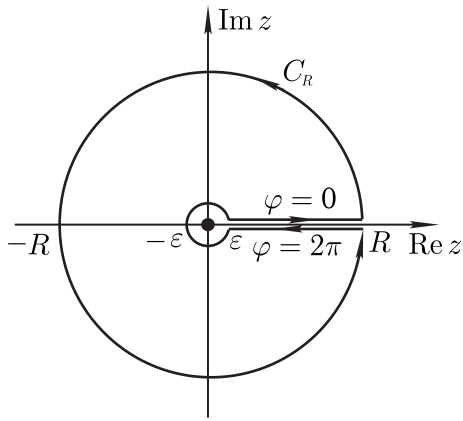


Рис. 44.

Рассмотрим функцию $\psi(z) = z^{a-1}f(z)$. Внутри контура Γ, представленного на рис. 44 двумя окружностями радиусов R и ε и двумя отрезками прямых, $\psi(z)$ является аналитическим продолжением $f(x)$, причем она однозначна, и ее особые точки совпадают с особыми точками $f(z)$

$$\int\limits_{\Gamma}\psi(\xi)d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{R}x^{a-1}f(x)dx + \int\limits_{C_R^+}\xi^{a-1}f(\xi)d\xi + \int\limits_{R}^{\varepsilon}\xi^{a-1}f(\xi)d\xi + \\ + \int\limits_{C_\varepsilon^-}\xi^{a-1}f(\xi)d\xi = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\left[z^{a-1}f(z), z_k\right].$$

Рассмотрим каждый из интегралов в отдельности:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R}x^{a-1}f(x)dx \to \int\limits_{0}^{\infty}x^{a-1}f(x)dx \quad \text{при} \quad R\to\infty, \quad \varepsilon\to 0,$$

откуда

$$\left|\int\limits_{C_R^+}\xi^{a-1}f(\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{MR^{a-1}}{R}2\pi R \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

$$\int_R^{\varepsilon} \xi^{a-1} f(\xi) d\xi = e^{i2\pi(a-1)} \int_R^{\varepsilon} x^{a-1} f(x) dx \to -e^{i2\pi(a-1)} \int_0^{\infty} x^{a-1} f(x) dx$$

при $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, отсюда

$$\left| \int_{C_\varepsilon^-} \xi^{a-1} f(\xi) d\xi \right| < M_1 \varepsilon^{a-1} 2\pi\varepsilon \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, $a > 0$.

Переходя к пределам, окончательно получаем:

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[z^{a-1} f(z), z_k\right].$$

Пример 19.2. *Вычислить несобственный интеграл*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{x^2 - 2x\cos\lambda + 1}, \quad \text{где} \quad p \in (-1;1),\ \lambda \in (-\pi;\pi).$$

Решение.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{x^2 - 2x\cos\lambda + 1} =$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i p}} \cdot \text{Выч}\left[\frac{z^p}{z^2 - 2z\cos\lambda + 1}, \begin{matrix} e^{i\pi} \\ e^{i(2\pi - \lambda)} \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i p}} \left(\frac{e^{ip\lambda}}{2i\sin\lambda} - \frac{e^{ip(2\pi - \lambda)}}{2i\sin\lambda} \right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{\left(e^{-\pi i p} - e^{\pi i p}\right) e^{\pi i p}} \cdot \frac{e^{\pi i p}\left(e^{ip(\lambda - \pi)} - e^{-ip(\lambda - \pi)}\right)}{2i\sin\lambda} =$$

$$= \frac{-\pi}{\sin\pi p} \frac{\sin p(\pi - \lambda)}{\sin\lambda} = \frac{\pi}{\sin\pi} \frac{\sin p(\lambda - \pi)}{\sin\pi p}.$$

Задача 19.3. *Вычислите несобственный интеграл*

а) $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x^2 + 4)}$ б) $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2 + 1)}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}}$; б) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

19.2. Интегралы вида $I = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a} f(x)dx$ при $0 < a < 1$.

Пример 19.4. *Доказать, что*

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a} f(x)dx =$$

$$= \frac{\pi a_0}{\sin \pi a} + \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[z^{a-1}(1-z)^{-a} f(z), z_k\right],$$

где $a_0 = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, $0 < a < 1$, *если* $f(x)$, *заданная на отрезке действительной оси* $[0,1]$), *может быть продолжена на всю комплексную плоскость, причем ее аналитическое продолжение* $f(z)$ *является однозначной аналитической функцией, за исключением конечного числа изолированных особых точек, а точка* $z = \infty$ *— устранимой особой точкой.*

Доказательство.

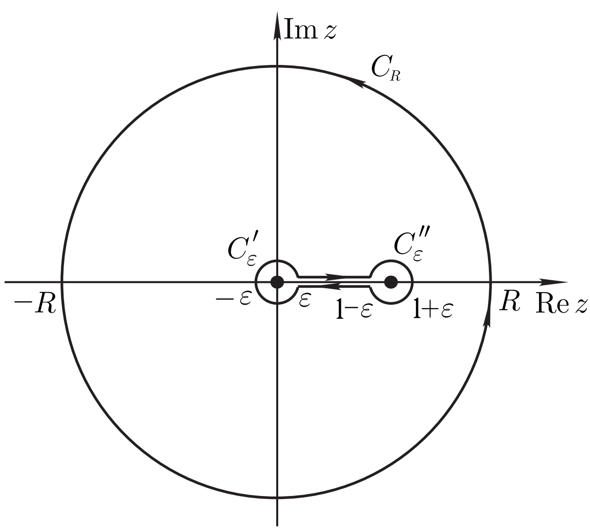


Рис. 45.

Выберем контур Г (рис. 45), состоящий из обоих берегов разреза $[0,1]$, замыкающих их окружностей $C'_\varepsilon : |z| = \varepsilon$ и

$C''_\varepsilon : |z-1| = \varepsilon$, окружности большого радиуса C_R и дважды проходимого (в противоположных направлениях) отрезка, соединяющего большую и малые окружности. Так как функция на выбранном отрезке аналитическая, то сумма интегралов по противоположно направленным одинаковым отрезкам равна нулю. Следовательно, по основной теореме теории вычетов:

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(\xi)d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{a-1}(1-x)^{-a}f(x)dx + \int\limits_{C''_\varepsilon{}^-} \psi(\xi)d\xi + \int\limits_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{C'_\varepsilon{}^-} \psi(\xi)d\xi + \int\limits_{C^+{}_R} \psi(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\left[z^{a-1}(1-z)^{-a}f(z), z_k\right].$$

Рассмотрим каждое слагаемое. По условию $z=\infty$ является устранимой особой точкой $f(z)$. В окрестности точки $z=\infty$ выполняются соотношения:

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \qquad a_0 = \lim_{z\to\infty} f(z),$$

$$z^{a-1}(1-z)^{-a} = \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^a = \frac{e^{i\pi a}}{z} + \frac{\varphi(z)}{z^2},$$

где $\varphi(z)$ — ограниченная аналитическая функция. Тогда разложение в ряд Лорана функции $\psi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\psi(z) = a_0\frac{e^{i\pi a}}{z} + \frac{\varphi_1(z)}{z^2},$$

где $\varphi_1(z)$ — ограниченная аналитическая функция. Поэтому Выч $[\psi(z), \infty] = -a_0 e^{i\pi a}$. Следовательно,

$$\int\limits_{C^+{}_R} \psi(\xi)d\xi = 2\pi i a_0 e^{i\pi a},$$

так как интеграл равен вычету в точке $z=\infty$.

Аргумент на нижнем берегу разреза больше аргумента на верхнем берегу разреза на $2\pi a$. Тогда

$$\int\limits_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(\xi)d\xi = -e^{i2\pi a}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{a-1}(1-x)^{-a}f(x)dx.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, тогда интегралы по малым окружностям стремятся к 0. В итоге получаем

$$\left(1-e^{i2\pi a}\right) I + i2\pi e^{i\pi a} a_0 = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\left[z^{a-1}(1-z)^{-a} f(z), z_k\right]$$

и, окончательно,

$$I = \frac{\pi a_0}{\sin a} + \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[z^{a-1}(1-z)^{-a} f(z), z_k\right],$$

где $a_0 = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Задача 19.5. *Вычислите значение бета-функции:*

$$B(a, 1-a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a} dx, \quad 0 < a < 1.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{\sin \pi a}$.

19.3. Интегралы вида $\int\limits_0^\infty f(x) \ln x dx$.

Пример 19.6. *Доказать, что*

$$\int_0^\infty f(x) \ln x dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}[f(z)(\ln z - i\pi/2), z_k],$$

если $f(x)$ является четной функцией, может быть продолжена на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, и ее аналитическое продолжение удовлетворяет условиям леммы 18.1.

Доказательство. Аналитическое продолжение функции $\psi(x) = f(x)\ln x$ — ветвь полной аналитической функции функцию $f(z)\ln z$, совпадающая с $f(x)\ln x$ при $x > 0$. На отрицательной части действительной оси $z = -x$, $(x > 0)$ выполняются равенства

$$\psi(z) = f(x)\ln\left(xe^{i\pi}\right) = f(x)\left[\ln x + i\pi\right].$$

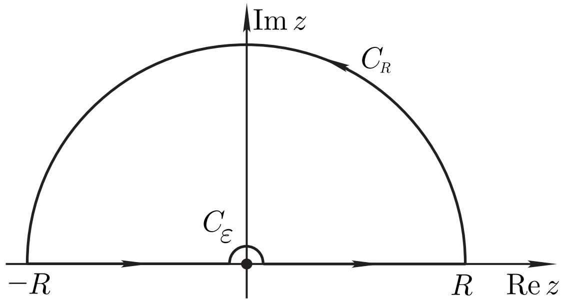


Рис. 46.

Рассмотрим контур Г: $[-R;-\varepsilon]\cup C_\varepsilon\cup[\varepsilon;R]\cup C_R$ (рис. 46):

$$\int\limits_{\Gamma}\psi(\xi)d\xi=\int\limits^{R}\varepsilon f(x)\ln x\ dx+\int\limits_{C_R}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{\varepsilon}^{R}f(x)\left[\ln x+i\pi\right]dx+$$
$$+\int\limits_{C_\varepsilon}\psi(\xi)d\xi=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\left[f(z)\ln z,z_k\right],\ \operatorname{Im}z_k>0.\quad(19.1)$$

Тогда для второго слагаемого в (19.1):

$$\left|\int\limits_{C_R}\psi(\xi)d\xi\right|\leqslant\frac{M}{R^{1+\delta}}\int\limits_0^{\pi}\left|\ln\xi\right|dl=\frac{M}{R^{1+\delta}}\int\limits_0^{\pi}\left|\ln R+i\arg\xi\right|dl\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M2\pi R}{R^{1+\delta}}\sqrt{\ln^2R+\pi^2}\to0,$$

при $R\to\infty$. Последнее слагаемое в (19.1) $\int\limits_{C_\varepsilon}\psi(\xi)d\xi\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Наконец, так как функция $f(x)$ четная, то

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)dx=\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\left[f(z),z_k\right],\ \operatorname{Im}z_k>0.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)\ln x\ dx=\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\left[f(z)\left(\ln z-\frac{i\pi}{2}\right),z_k\right],\ \operatorname{Im}z_k>0.$$

Пример 19.7. *Вычислить несобственный интеграл*

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln 2x dx}{16x^4+1}.$$

Решение.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln 2x dx}{16x^4+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\ln t dt}{t^4+1} = \pi i \left(\text{Выч}\left[\frac{1}{z^4+1}\left(\ln z - \frac{i\pi}{2}\right), e^{\frac{i\pi}{4}}\right] + \right.$$

$$\left. + \text{Выч}\left[\frac{1}{z^4+1}\left(\ln z - \frac{i\pi}{2}\right), e^{\frac{3i\pi}{4}}\right]\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\ln e^{\frac{i\pi}{4}} - \frac{i\pi}{2}}{4\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^3} + \frac{\ln e^{\frac{3i\pi}{4}} - \frac{i\pi}{2}}{4\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{-\frac{i\pi}{4}}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{\frac{i\pi}{4}}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right) = \frac{-\pi^2\sqrt{2}}{32}.$$

Пример 19.8. *Вычислить несобственный интеграл*

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x\ dx}{x+1}.$$

Решение.

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x\ dx}{x+1} = \frac{dI}{dp}, \quad \text{где } I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}dx}{x+1} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i p}}\left(\text{Выч}\left[\frac{z^{p-1}}{z+1}, e^{i\right.\right.$$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i p}}e^{i\pi(p-1)} = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad \Rightarrow \quad J = -\frac{\pi^2 \cos \pi p}{\sin^2 \pi p}.$$

Задача 19.9. *Вычислите несобственный интеграл* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2+9}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}\ln 3$.

19.4. Задачи для самостоятельного решения. Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{x^2+1}$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x}}$; д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt[3]{x}}$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[4]{x}}$;

ж) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln 2x dx}{x^2+1}$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте лемму Жордана для верхней полуплоскости.
2. Сформулируйте лемму Жордана для нижней полуплоскости.
3. Сформулируйте лемму Жордана для правой полуплоскости.
4. Сформулируйте лемму Жордана для левой полуплоскости.
5. Сформулируйте теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ при помощи вычетов.
6. Сформулируйте теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\ dx\ (a > 0)$ при помощи вычетов.

§ 20. Преобразование Лапласа

20.1. Понятие преобразования Лапласа. Пусть функция $f(t)$ определена на $-\infty < t < +\infty$, при этом

1. $f(t) \equiv 0, \quad t < 0$;
2. $f(t)$ — кусочно-непрерывна при $t > 0$, то есть на любом конечном сегменте $[a, b]$ функция $f(t)$ имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода;
3. функция $f(t)$ имеет ***ограниченную степень роста***: существуют такие $M > 0$ и $\alpha > 0$, что $|f\,(t)| < Me^{\alpha t}$, $t > 0$.

Определение 20.1 *Величина* $\inf\{\alpha\} = a$ *называется* ***показателем степени роста****, а множество функций ограниченной степени роста с показателем* a *— классом функций* $A(a)$.

<u>Примеры.</u>

1. Функция $f(t) = t^n \in A(0)$, $a = 0$, так как $t^n < Me^{\alpha t}$ для любого $\alpha > 0$.
2. Не существует такого показателя степени роста a, что функция $f(t) = \exp\left(2t^2\right) \in A(a)$.

Определение 20.2 ***Преобразованием Лапласа*** *функции* $f(t)$ *класса* $A(a)$ *называется функция* $F(p)$ *комплексной переменной* p*, определяемая соотношением*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Если существует $F(p)$, то связь функций $f(t)$ и $F(p)$ обозначается $f(t) \risingdotseq F(p)$, где $f(t)$ называется ***оригиналом***, а $F(p)$ — ***изображением***.

Теорема 20.1 *Если функция* $f(t) \in A(a)$*, то функция* $F(p)$ *существует при* $\operatorname{Re} p > a$*, при этом в области* $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$ *интеграл сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} p = x$ и $x > a$, то есть $|f(t)| < Me^{at}$.

$$|F(p)| = \left|\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt\right| \leqslant M\int\limits_0^{\infty} e^{-xt}e^{at}dt = \frac{M}{x-a},$$

значит, при $\operatorname{Re} p = x > a$ существует изображение $F(p)$. Для доказательства равномерной сходимости интеграла по параметру p в области $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$ можно воспользоваться мажорантным признаком Вейерштрасса. Так как

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| \leqslant Me^{-(x_0-a)t} = \frac{M}{x_0-a}$$

всюду в области $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$, то отсюда следует равномерная сходимость интеграла в этой области по признаку Вейерштрасса:

$$\left|\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt\right| < M\int\limits_0^{\infty} e^{-x_0 t}e^{\alpha t} f(t)\,dt = \frac{M}{x_0-\alpha}.$$

Теорема 20.2 *Для функций* $f(t) \in A(a)$ *изображение* $F(p)$ *является аналитической функцией в области* $\operatorname{Re} p > a$.

Замечание 20.1 *Так как* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(p)$ *равномерно сходится к* $F^{(k)}(p)$ *при* $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$, *то* $F^{(k)}(p) = (-1)^k \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, t^k dt$.

20.2. Некоторые важные изображения и свойства изображений.

1. Пусть $f(t) = \sigma(t)$ — функция Хевисайда:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0, \\ 1, \ t \geqslant 0, \end{cases}$$

$\sigma(t) \in A(0)$, тогда $F(p) \in C^{\infty}(\operatorname{Re} p > 0)$:

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p},$$

то есть $\sigma(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, при $\operatorname{Re} p > 0$.

2. Пусть $f(t) = e^{\alpha t}$.

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p - \alpha}; \ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

3. Пусть $f(t) = t^{\nu}$; $\nu > -1$; $t^{\nu} \in A(0)$; $F(p) \in C^{\infty}(\operatorname{Re} p > 0)$. Тогда

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} t^{\nu} e^{-pt} dt. \tag{20.1}$$

Рассмотрим функцию от действительной переменной

$$F(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{\nu} e^{-xt} dt \tag{20.2}$$

в области $x > 0$. Тогда, сделав замену $xt = s$, получим

$$\int\limits_0^\infty t^\nu e^{-xt} dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int\limits_0^\infty s^\nu e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}.$$

Так как функция $F(p)$, заданная формулой (20.1), является аналитической в области $p > 0$, а ее значение на действительной оси задано (20.2), то в силу единственности аналитического продолжения имеем, что $F(p)$ — аналитическое продолжение $F(x)$ в правую полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$:

$$F(p) \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}.$$

Если ν — дробное, то берется та ветвь корня, которая является непосредственным аналитическим продолжением $x^{\nu+1}$, $x > 0$.

Рассмотрим два важных частных случая: если $\nu = 0$, тогда $f(t) = \sigma(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$; если $\nu = n \in \mathbb{Z}$, тогда $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Линейность изображений.
Пусть $f\,(t) \risingdotseq F\,(p)\,,\quad g\,(t) \risingdotseq G\,(p)$, тогда

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Пример 20.1.
а) Найти изображение полинома степени не выше N;
б) найти изображение функции $\sin \omega t$.
Решение.

$$\text{а)}\quad f(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \risingdotseq \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

б) $\sin \omega t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{1}{p-i\omega} - \dfrac{1}{p+i\omega}\right] = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
при $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$.

Задача 20.2. *Найдите изображение* $\cos \omega t$.
Ответ: $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ при $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$.

Теорема запаздывания. Пусть $f(t) \in A(a)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, и задана функция

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \quad \tau > 0, \\ f(t-\tau), & t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_\tau(t) \in A(a)$. Тогда

$$f_\tau(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f(t-\tau) d\tau = [t-\tau=\xi] =$$

$$= e^{-p} \int\limits_0^\infty e^{-p\xi} f\left(\xi\right) d\xi = e^{-p} F(p).$$

Пример 20.3. *Найти изображение ступенчатой функции*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ n \cdot f_0, & n\tau \leqslant t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где f_0 — заданная постоянная величина.

Решение. Представим функцию $f(t)$ с помощью функции Хевисайда:

$$f(t) = f_0[\sigma(t-\tau) + \sigma(t-2\tau) + \sigma(t-3\tau) + ...].$$

Воспользуемся теоремой запаздывания и свойством линейности, а также формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$f(t) \risingdotseq F(p) = f_0\, e^{-p\tau} \frac{1}{p} + f_0\, e^{-2p\tau} \frac{1}{p} + ... = f_0 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}}.$$

Задача 20.4. *Найдите изображение прямоугольного импульса*

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ t < \tau_1, \\ 1, \ \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2, \\ 0, \ t > \tau_2. \end{cases}$$

Ответ: $F(p) = \dfrac{1}{p} \left(e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}\right)$.

Изображение производной. Пусть $f(t) \in C[0;\infty)$ и имеет конечную производную $f'(t)$, причем и $f(t)$, и $f'(t)$ принадлежат классу $A(a)$. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} f'\left(t\right) dt = -f\left(0\right) + p \int\limits_0^\infty e^{-pt} f\left(t\right) dt = [\mathrm{Re}\, p > a] =$$

$$= pF\left(p\right) - f\left(0\right) = p\left(F\left(p\right) - \frac{f\left(0\right)}{p}\right).$$

Если $f^{(n-1)}(t) \in C[0;\infty)$, $f^{(n)}(t)$ — кусочно-непрерывна и $f^{(k)}(t) \in A(a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то интегрируя необходимое число раз по частям, получаем

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right]. \qquad (20.3)$$

Изображение интеграла. Пусть $f(t) \in A(a)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau \in A(a)$. Тогда

$$\varphi(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} \int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt = \int\limits_0^\infty \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau)dtd\tau,$$

при $\operatorname{Re} p > a$.

Преобразуем по теореме запаздывания и получаем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau)dtd\tau = \frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau = \frac{F(p)}{p}.$$

Можно обобщить этот результат на случай n-кратного интеграла:

$$\varphi_n(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{\tau_1} \ldots \int\limits_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\ d\tau_n\ \ldots d\tau_1 \risingdotseq \frac{1}{p^n}F(p).$$

Изображение свертки. Пусть $f_1(t) \in A(a_1)$, $f_2(t) \in A(a_2)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau, \quad \varphi(t) \in A(a),$$

где $a = \max(a_1, a_2)$. Тогда в области $\operatorname{Re} p > a$

$$\varphi(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau dt = \int\limits_0^\infty f_1(\tau) \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)dtd\tau =$$

$$= \{t - \tau = t'\} = \int\limits_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau} \int\limits_0^\infty e^{-pt} f_2(t')dt'd\tau = F_1(p)F_2(p).$$

Таблица изображений.

1. $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$;
2. $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in N$, $\operatorname{Re} p > 0$;
3. $t^\nu \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, $\nu > -1$, $\operatorname{Re} p > 0$;
4. $e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$;
5. $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
6. $\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
7. $\operatorname{sh} \lambda t \risingdotseq \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$;
8. $\operatorname{ch} \lambda t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$;
9. $t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $n \in N$, $\operatorname{Re} p > \alpha$;
10. $t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
11. $t \cos \omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
12. $te^{\lambda t} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{\left((p-\lambda)^2+\omega^2\right)^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|$;
13. $te^{\lambda t} \cos \omega t \risingdotseq \frac{p-\lambda}{\left((p-\lambda)^2+\omega^2\right)^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|$;
14. $\frac{\sin \omega t}{t} \risingdotseq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$.

Заметим, что используя приведенную таблицу, можно найти оригинал по известному изображению.

Пример 20.5. *Найти оригинал для функции* $F(p) = \frac{pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

Решение. Воспользуемся таблицей изображений: так как $\frac{a}{p^2+a^2} \risingdotseq \sin at$ и $\frac{p}{p^2+a^2} \risingdotseq \cos at$, то по теореме запаздывания

$$F(p) = \frac{pa}{\left(p^2+a^2\right)^2} = \frac{a}{p^2+a^2} \cdot \frac{p}{p^2+a^2} = \int\limits_0^t \sin a\tau \cdot \cos a(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2} \left(\sin at + \sin a(2\tau - t)\right) d\tau = \frac{t}{2} \sin at.$$

Задача 20.6. *Найдите оригинал для функции* $F(p) = \dfrac{1}{\left(p^2+1\right) \cdot p^2}$.

Ответ: $t - \sin t$.

Задача 20.7. *Найдите оригинал для функции* $F(p) = \dfrac{ap^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(\sin at + at \cos at\right)$.

20.3. Формула Меллина. Рассмотрим общий метод построения оригинала по изображению.

Теорема 20.3 (Меллина). *Пусть* $F(p) \in C^\infty(\operatorname{Re} p > a)$, *и выполнены следующие условия:*

1. $|F(p)| \to 0$ *при* $|p| \to \infty$, $\operatorname{Re} p > a$;

2. при $x > a$ *выполняется неравенство* $\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\, dp < M$.

Тогда существует такая функция $f(t) \in A(a)$, *что* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *причем*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \qquad \text{для любого } x > a. \tag{20.4}$$

Замечание 20.2 *Несобственный интеграл* $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp$ *вычисляется вдоль прямой* $\operatorname{Re} p = x > a$ *и понимается в смысле главного значения:*

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R\to\infty} \int_{x-iR}^{x+iR} e^{pt} F(p) dp.$$

Для того, чтобы вычислить интеграл (20.4), рассматривается контур, состоящий из вертикального отрезка прямой

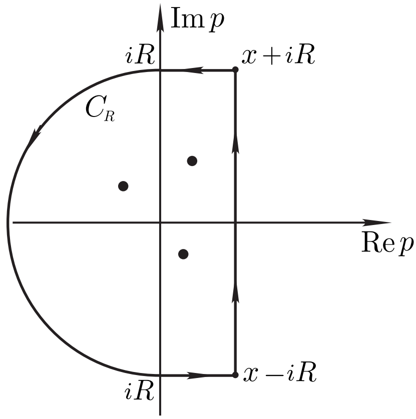


Рис. 47.

$[x-iR; x+iR]$, двух горизонтальных отрезков $[x+iR, iR]$ и $[-iR, x-iR]$ и замыкающей его дуги полуокружности радиуса R (рис. 47), при этом контур берется таким, чтобы можно было применить лемму Жордана (чтобы интеграл по полуокружности стремился к нулю при стремлении радиуса к бесконечности). В данном случае замыкаем через левую полуплоскость, так как $t > 0$. При этом контур берется таким, чтобы включить все особые точки $F(p)$. Интеграл по замкнутому контуру вычисляется с помощью теории вычетов, а далее R устремляют к бесконечности.

Пример 20.8. *Найти оригинал функции* $\dfrac{1}{p\left(p^2-a^2\right)}$.

$$\frac{1}{p\left(p^2-a^2\right)} \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{p\left(p^2-a^2\right)} = \text{Выч}\left[\frac{e^{pt}}{p\left(p^2-a^2\right)}; 0\right] +$$

$$+ \text{Выч}\left[\frac{e^{pt}}{p\left(p^2-a^2\right)}; a\right] + \text{Выч}\left[\frac{e^{pt}}{p\left(p^2-a^2\right)}; -a\right] =$$

$$= -\frac{1}{a^2} + \frac{e^{at}}{2a^2} + \frac{e^{-at}}{2a^2} = \frac{1}{a^2}\left(\operatorname{ch} at - 1\right).$$

Задача 20.9. *Найдите оригинал функции* $\dfrac{1}{p^3+3p^2+2p}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \dfrac{1}{2}$.

Пример 20.10. *Найти оригинал функции* $\dfrac{1}{(p-a)^2+1}$.

$$\frac{1}{(p-a)^2+1} \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{(p-a)^2+1} = \text{Выч}\left[\frac{e^{pt}dp}{(p-a)^2+1}; a+i\right] +$$
$$+ \text{Выч}\left[\frac{e^{pt}dp}{(p-a)^2+1}; a-i\right] = \frac{e^{(a+i)t}}{2i} - \frac{e^{(a-i)t}}{2i} = e^{at}\sin t \; .$$

Задача 20.11. *Найдите оригинал функции* $\dfrac{p-1}{p^2-2p+5}$.

Ответ: $e^t\cos 2t$.

20.4. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите изображение по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t ($f(t)\equiv 0$ при $t<0$), если при $t\geqslant 0$:
   а) $f(t)=1$; б) $f(t)=t$; в) $f(t)=e^{2t}$;
   г) $f(t)=t^n$ ($n-$ натуральное число);
   д) $f(t)=\sin 3t$; е) $f(t)=\cos t$; ж) $f(t)=\operatorname{sh} t$;
   з) $f(t)=\operatorname{ch} 4t$; и) $f(t)=t\mathrm{e}^{3t}$.
2. Найдите оригинал $f(t)$, если задано его изображение по Лапласу $F(p)$:
   а) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}$, $\operatorname{Re} p>1$;
   б) $F(p)=\dfrac{1}{p(p+2)}$, $\operatorname{Re} p>0$;
   в) $F(p)=\dfrac{p-1}{(p-2)^2+1}$, $\operatorname{Re} p>2$.
3. Вычислите интегралы:
   а) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p+2}dp$, $t>0$;
   б) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p+2}dp$, $t<0$;
   в) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p^2+4}dp$, $t>0$;

г) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{pe^{pt}}{p^2+9}dp,\ t>0;$

д) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p}dp,\ t>0;$

е) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p^2}dp,\ t>0;$

ж) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p(p+2)}dp,\ t>0;$

з) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p(p+3)}dp,\ t<0.$

Вопросы к экзамену.

1. Запишите формулу преобразования Лапласа функции действительной переменной.
2. Сформулируйте достаточные условия, при которых определено преобразование Лапласа.
3. Сформулируйте теорему об аналитичности изображения по Лапласу функции действительной переменной.
4. Сформулируйте теорему запаздывания.
5. Запишите формулу изображения свертки.
6. Запишите формулу изображения производной.
7. Запишите формулу изображения интеграла.
8. Запишите формулу Меллина.
9. Сформулируйте теорему о достаточных условиях существования оригинала функции комплексной переменной.
10. Запишите интеграл Дюгамеля.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Пусть $F(p)$ — изображение по Лапласу функции $f(t)$. Какая функция переменной t имеет своим изображением n-ю производную $F^{(n)}(p)$ функции $F(p)$ $(n \geqslant 1)$?
2. Пусть $F(p)$ — изображение по Лапласу функции $f(t)$. Считая, что изображение n-й производной $f^{(n)}(t)$ функции $f(t)$ $(n \geqslant 1)$ существует, выразите его через $F(p)$.

§ 21. Применение преобразования Лапласа

21.1. Решение дифференциальных и интегральных уравнений. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения n-ного порядка:

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t),\ t > 0;$$

$$y(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$. Применив преобразование Лапласа к функциям и производным, входящим в уравнение, получим алгебраическое уравнение для изображения $Y(p)$:

$$P_n(p)Y(p) = F(p),\ \text{откуда } Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)},$$

где $P_n(p)$ — многочлен степени n.

Решением исходного дифференциального уравнения является оригинал $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Пример 21.1. *Найти решение задачи Коши*

$$y''(t) + y'(t) = 1; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Воспользуемся полученными выше формулами:

$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1;$$

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p); \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}.$$

Отсюда, с учетом граничных условий, получаем алгебраическое уравнение для изображения $Y(P)$

$$p^2Y(p) - 1 + pY(p) = \frac{1}{p},$$

следовательно $Y(p) = \dfrac{1}{p^2} \risingdotseq t = y(t)$.

Задача 21.2. *Найдите решение задачи Коши*

$$y''(t) + 3y'(t) = e^t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Ответ: $y = \dfrac{e^t}{4} + \dfrac{5}{12}e^{-3t} - \dfrac{2}{3}$.

Пример 21.3. *Решить интегральное уравнение*

$$f(t) = \cos t + \int\limits_0^t \sin(t-x) f(x) dx.$$

Применим к левой и правой частям уравнения преобразование Лапласа и, используя изображение свертки, получим

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} + F(p)\frac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{1}{p} \risingdotseq 1 = f(t).$$

Задача 21.4. *Решите интегральное уравнение:*

а) $f(t) = \mathrm{e}^t + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{t-s} f(s) ds;$ *б)* $f(t) = t + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{t-s} f(s)\, ds.$

Ответ: а) e^{2t}; б) $\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$.

21.2. Интеграл Дюгамеля. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 g(t) = 0,\ t > 0; \\ &g(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0;\ g^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Пусть $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда

$$g^{(k)}(t) \risingdotseq p^k G(p),\ k = 0, 1, \ldots n-1;$$

$$g^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \left(G(p) - \frac{g^{(n-1)}(0)}{p^n} \right) = p^n G(p) - 1;$$

Отсюда

$$P_n(p) G(p) = a_n \Longrightarrow G(p) = \frac{a_n}{P_n(p)};\ Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)} = \frac{1}{a_n} G(p) F(p),$$

следовательно,

$$y(t) \risingdotseq \frac{1}{a_n} G(p) F(p) = \frac{1}{a_n} \int\limits_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

— ***интеграл Дюгамеля***. Функцию $g(t)$ часто называют функцией единичного точечного источника.

21.3. Решение дифференциальных уравнений с использованием формулы Меллина.

Пример 21.5. *Решить задачу Коши:*

$$
\begin{aligned}
&y^{(IV)} + y''' = 0;\\
&y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;\ y'''(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Применим к левой и правой частям уравнения преобразование Лапласа, используя формулу (20.3) для изображения производной, и получим:

$$p^4\left(F(p) - \frac{1}{p^4}\right) + p^3F(p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(p) = \frac{1}{p^4+p^3}.$$

Воспользуемся теоремой Меллина:

$$\frac{1}{p^4+p^3} \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{p^4+p^3} = \text{Выч}\left[\frac{1}{p^4+p^3};0\right] +$$

$$+\,\text{Выч}\left[\frac{1}{p^4+p^3};-1\right] = \frac{1}{2}(t^2-2t+2) - e^{-t}.$$

Таким образом, решением задачи Коши является

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(t^2-2t+2\right) - e^{-t}.$$

Задача 21.6. *Решите задачу Коши:*

$$y''(t) + y = 2\cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Ответ: $(t-1)\sin t$.

21.4. Задачи для самостоятельного решения. Применяя преобразование Лапласа, решите задачу Коши:

а) $\begin{cases} y'' + y = t\sin t,\ t > 0,\\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'' + y = t\sin t,\ t > 0,\\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y'' + y = te^t,\ t > 0,\\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y'' + y = te^t,\ t > 0,\\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y'' - y = te^{2t}, \ t > 0, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y'' - y = te^{2t}, \ t > 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} y'' - y = te^{-2t}, \ t > 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y'' + y = te^{-2t}, \ t > 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1; \end{cases}$

и) $\begin{cases} y'' + y' = te^{-t}, \ t > 0, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} y'' + y' = te^{-t}, \ t > 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$

Ответы

Ответы к задачам для самостоятельного решения 1.3.

1. а) i; б) $-i$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; д) $14-5i$; е) $10-11i$; ж) $5,25+0,25i$; з) $-i$.

2. а) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-i\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$; б) $a\sqrt{a^2+b^2}+ib\sqrt{a^2+b^2}$; в) $2a$; г) $4abi$.

3. а) $1; \dfrac{\pi}{2}$; б) $1; \dfrac{3\pi}{2}$; в) $1; \dfrac{7\pi}{4}$; г) $1; \dfrac{\pi}{4}$; д) $\sqrt{221}; \pi - \arccos\dfrac{14}{\sqrt{221}}$; е) $\sqrt{221}$; $\pi-\arccos\dfrac{10}{\sqrt{221}}$; ж) $\dfrac{\sqrt{442}}{4}$; $\arccos\dfrac{21}{\sqrt{442}}$; з) $1; \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 1.6.

1. а) $i=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}$; б) $-i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{i\frac{\pi}{4}}$;

д) $-2^{10}=2^{10}\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)=2^{10}e^{i\pi}$;

е) $-2^{6}=2^{6}\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)=2^{6}e^{i\pi}$;

ж) $-2^{10}=2^{10}\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)=2^{10}e^{i\pi}$;

з) $i2^5=2^5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=2^5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2. а) $|z|=1$; $\operatorname{Arg} z=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

б) $|z|=1$; $\operatorname{Arg} z=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

в) $|z|=2^5$; $\operatorname{Arg} z=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

г) $|z|=2^{10}$; $\operatorname{Arg} z=-\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

3. а) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; б) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; в) $-\dfrac{4}{5}+i\dfrac{3}{5}=e^{i\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)}$; г) 10; д) 1; е) $2\sqrt{2}$; ж) 8; з) 2^6; и) -2^{-6}.

4. а) $-4+7i$; б) $9+8i$; в) $-4+7i$; г) i; д) $5-15i$.

5. а) $z_1=2=2e^{0\cdot i}=2(\cos 0+i\sin 0)$,

$z_2=-1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{2\pi}{3}i}=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

$z_3 = -1 - i\sqrt{3}\, 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$;

б) $z_1 = 1 = 1\cdot e^{0\cdot i} = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$,

$z_2 = i = 1\cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = 1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$z_3 = -1 = 1\cdot e^{\pi\cdot i} = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi$,

$z_4 = -i = 1\cdot e^{\frac{3\pi}{2}i} = 1\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

в) $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$,

$z_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}$,

$z_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}$,

$z_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}$;

г) $z_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$,

$z_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$;

д) $z_1 = 2+3i = \sqrt{13}\, e^{\operatorname{arctg}\frac{3}{2}i} = \sqrt{13}\,\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right)\right)$,

$z_2 = 2-3i = \sqrt{13}\, e^{-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}i} = \sqrt{13}\,\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right) + i\sin\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right)\right)$;

е) $z_1 = -1 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$, $z_2 = 1 = e^{0\cdot i} = \cos 0 + i\sin 0$, $z_3 = 0$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 2.1.

1. а) $\cos 2\cdot\operatorname{ch} 1 - i\sin 2\cdot\operatorname{sh} 1$; б) $i\operatorname{sh} 2$; в) $\operatorname{ch}\pi$; г) $\dfrac{\sin 4 - i\operatorname{sh} 2}{2(\cos^2 2 + \operatorname{sh} 1)} = \dfrac{\sin 4 - i\operatorname{sh} 2}{\cos 4 + \operatorname{ch} 2}$; д) $\ln 2 + i2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; е) $\ln 2$; ж) $i\dfrac{\pi}{2} + i2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; з) $\dfrac{1}{2}\ln 13 - i\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + i2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; и) $e^{-2\pi k},\ k\in\mathbb{Z}$; к) $e^{i\pi^2\left(\frac{1}{2}+2k\right)} = \cos\left(\pi^2\left(\dfrac{1}{2}+2k\right)\right) + i\sin\left(\pi^2\left(\dfrac{1}{2}+2k\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; л) $e^{-2\pi k}(\cos\ln\pi + i\sin\ln\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; м) $e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k},\ k\in\mathbb{Z}$.

2. а) $-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $z_1 = -i\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, z_2 = -i\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; в) $z_1 = \dfrac{i}{4}\ln 2 + \dfrac{3\pi}{8} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; г) $-i\ln(\sqrt{2}\pm 1) + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; д) $-i\ln\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}) + \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; е) $z_1 =$

$= \ln\left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right) + i2\pi k,\ z_2 = \ln\left(\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right) + i\pi + i2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ ж) $-i\dfrac{\pi}{2} + i2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ з) $z_1 = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + i\dfrac{\pi}{2} + i2\pi k,\ z_2 = \ln\left(\sqrt{2}-1\right) - i\dfrac{\pi}{2} + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ и) $i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ к) $-\ln 2 + i\dfrac{\pi}{2} + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

3. а) $\sqrt{5}\, e^{i\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}};$ б) $\sqrt{5}\, e^{-i\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}};$ в) $\sqrt{5}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)};$ г) $\sqrt{5}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}.$

Ответы к задачам для самостоятельного решения 3.3.

1. нельзя. **2.** а) непрерывна; б) равномерно непрерывна; **3.** а) непрерывна; б) не является равномерно непрерывной; **4.** а) непрерывна; б) равномерно непрерывна.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 4.3.

1. а) не дифф.; б) не дифф.; в) не дифф.; г) не дифф.; д) дифф. в т. (0,0); е) дифф. в т. (0,0); ж) дифф. в т. (0,0).

2. а) не аналит.; б) не аналит.; в) не аналит.; г) не аналит.; д) не аналит.; е) не аналит.; ж) не аналит.; з) не аналит.; и) не аналит. к) аналит. при $z \neq 0$; л) аналит.; м) аналит.; н) аналит.; о) аналит.; п) выполняются при $z \neq 0$; р) выполняются; с) выполняются при $z \neq 0$; т) не аналит.; у) не аналит.

3. а) $v(x,y) = 3x^2 - y^3 - y + C;$ б) $v(x,y) = 2xy + 5y - x - \dfrac{x}{x^2+y^2} + C.$

4. а) $u = x^3 - 3y^2 - x + C;$ б) $v(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} + C;$ в) $2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} - 2x - 3x^2y + C.$

Ответы к задачам для самостоятельного решения 5.6.

1. а) $\dfrac{w}{w-2i} * \dfrac{1-3i}{1-i} = \dfrac{z+1}{z-i} * \dfrac{1}{i+2};$ б) $w = i + \dfrac{z+1}{z-i} * \dfrac{1-i}{i+2};$ в) $w = i + \dfrac{2}{z+1};$ г) $\dfrac{w-1}{w-i} * \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{z-1}{z-i} * i;$ д) $w = \dfrac{i-z}{1-iz};$ $|w| < 1.$

2. а) $G : |w| > 1, Rew < 0;$ б) $G : |w| < 1, \left|w + \dfrac{5}{4}i\right| > \dfrac{3}{4};$ в) $G : \left|w - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2} < argw < 0;$

г) $G : |w| < 1, Imw < 0;$ д) $G : \left|w - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}, Rew < 1;$ е) $G : \left|w - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}, \left|w - \dfrac{3}{4}\right| > \dfrac{1}{4};$

ж) $G: |w|<1, \left|w-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$; з) $G: |w-1-i|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}, Imw\ >0$; и) $G: |w|<1, Imw\ <0$;
к) $G: |w|>2$.

3. а) $f(z)=\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$; б) $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$; в) $f(z)=-4ie^{i\alpha}\dfrac{z-i}{z+i}$; г) $f(z)=i\dfrac{z-2i}{z+2i}$;
д) $f(z)=\dfrac{1-z}{z+1}$; е) $f(z)=-i\dfrac{z+2i}{z-2i}$; ж) $f(z)=i\dfrac{4z+2}{z+2}$; з) $f(z)= = 2\dfrac{z-1}{z-4}$;
и) $f(z)=2i\dfrac{2z-1}{z+1}$; к) $f(z)=i\dfrac{5z-8i}{z-4i}$; л) $f(z)=2i\dfrac{z-i}{z+2+i}$.

4. а) $0<\arg w\ <\dfrac{\pi}{3}$; б) $0<\arg w\ <\pi$; в) $\arg w\ =\dfrac{2\pi}{3}$;
г) $|w|=e,\ 0<\arg w<2$;
д) $|w|=1,\ 0\leqslant \arg w\ \leqslant\dfrac{\pi}{2}$; е) $|w|>4,\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg w\ <\dfrac{\pi}{2}$;

Ответы к задачам для самостоятельного решения 6.2.

1. а) $\dfrac{16}{3}i$; б) $16i$; **2.** а) $-\dfrac{16}{3}i$; б) $\dfrac{16}{3}i$; **3.** а) i; б) i; в) i; **4.** а) 1; б) $1+\dfrac{i}{3}$; в) $1+i$; **5.** $2\pi i$; **6.** 0.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 8.4.

1. 2. а) $\pi i e^{-1}$; б) $2\pi i\,(\cos 1\ -\sin 1\ )$; в) $\dfrac{\pi i}{2}$. **3.** Пусть C ограничивает некоторую область g, и пусть $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3= =-1$. Обозначим искомый интеграл I. Тогда, если $z_1,z_2,z_3\notin g$, то $I=0$. Если $z_1,\ z_2\notin g$; $z_3\in g$ то $I=\pi i$: $z_1,\ z_3\notin g$; $z_1\in g$ то $I=\pi i$; $z_2,\ z_3\notin g$; $z_1\in g$ то $I=-2\pi i$; если $z_2\notin g$; $z_1,z_3\in g$, то $I=-\pi i$; если $z_3\notin g$; $z_1,\ z_2\in g$ то $I=-\pi i$; если $z_1,\ z_2,\ z_3\in \in g$. то $I=0$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 9.3.

1. 1; **2.** Не существует.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 11.4.

1. а) $|z|<\sqrt{2}$; б) $|z-2|<1$; в) $|z+1|<1$; г) $|z-i|<1$; д) $|z+1-i|<1$; е) $|z+i|<1$; ж) $z=0$; з) $|z+2|<\dfrac{1}{4}$; и) $|z|<1$.

2. а) $f(z) = 4 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, $R = 1$; $f(z) = -\sum\limits_{n=2}^{\infty} (z+1)^n$, $R = 1$;

б) $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (z-1)^n$, $R = 1$; $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$, $R = 1$;

в) $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, $R = 1$;

$f(z) = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[(z-1) + \frac{(z-1)^2}{2} \right]^n$, $R = 1$;

г) $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) \frac{\left(z + \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$, $R = \infty$;

д) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2z)^{2n-2}}{(2n-2)!} \left\{ \frac{2z\cos 1}{2n-1} + \sin 1 \right\}$, $R = \infty$;

$f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2(z+1))^{2n-2}}{(2n-2)!} \left\{ \frac{2(z+1)\cos 1}{2n-1} - \sin 1 \right\}$, $R = \infty$;

е) $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{(z+2)^n}{5^{n+1}}$, $R = \frac{5}{3}$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n z^n$, $R = \frac{1}{3}$;

ж) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} z^{2n+1}$, $R = 1$;

$f(z) = \frac{z}{i+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left[(z-1)^2 + 2(z-1) \right]^n}{(i+1)^n}$, $R = \sqrt{2 - 2\sqrt{2}}$;

з) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$, $R = 1$; $f(z) = i\pi - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n}$, $R = 1$;

и) $f(z) = \ln 2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n}$, $R = 2$; $f(z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$, $R = 1$;

3. а) $f(z)=1+\dfrac{z}{2}-\dfrac{23}{24}z^2+\ldots$; б) $f(z)=1-\dfrac{z}{2}-\dfrac{23}{24}z^2+\ldots$; в) $f(z)=z+\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{2}{15}z^5+\ldots$; г) $f(z)=-\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{z^4}{12}+\dfrac{11}{180}z^6+\ldots$

Ответы к задачам для самостоятельного решения 13.3.

1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2z)^{2n-1}}{(2n)!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{n-1}}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{3-n}}{n!}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{4-2n}}{(2n)!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^{2n-2}}{(2n)!}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n-3}}{n!}$.

2. а) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z^n}{3^{n+1}}+\dfrac{2^n}{z^{n+1}}\right)$; $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-3)^n$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3^n-2^n}{z^{n+1}}\right)$;
б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}$; $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^{n-1}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{2^{n+1}}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z^{n+1}}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^n}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{(z-1)^2}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{n+1}{z^{n+2}}+(-1)^n\dfrac{2^n}{z^{n+1}}\right]$
г) $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(z+2)^n}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{(z+2)^{n+1}}\right)$; $-\sum\limits_{n=-1}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{z^{2n+2}}$;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[i^n-(1-i)^n]}{(z+i)^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\dfrac{(z+i)^{n-3}}{(2i)^{n+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{z^{2n+2}}$;
ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[\dfrac{1}{(z-1)^{2n-1}}+\dfrac{2}{(z-1)^{2n}}+\dfrac{1}{(z-1)^{2n+1}}\right]$; з) $0+\ldots$; $\dfrac{\pi}{\pi-z}+\ldots$; и) $\dfrac{1}{z}+\ldots$

Ответы к задачам для самостоятельного решения 14.4.

1. а) $z=0$ — устр.ос.т.; $z=\infty$ — сущ.ос.т.; б) $z=0$ — полюс 1-го порядка; $z=\infty$ – сущ.ос.т.; в) $z=0$ — полюс 2-го порядка; $z=\infty$ — сущ.ос.т.; г) $z=0$ — полюс 1-го порядка; $z=1$ — полюс 2-го порядка; $z=\infty$ — устр.ос.т.; д) $z=0$ — полюс 5-го порядка; $z=\infty$ — полюс 2-го порядка; е) $z_k=\sqrt[4]{-1}, k=0,1,2,3$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — устр.ос.т.; ж) $z_k=\ln(-1)=i(\pi+2\pi k), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т.; з) $z=0$ — устр.ос.т; $z_k=\ln(1)=i2\pi k, k=\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т.; и) $z_k=2\pi k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ — устр.ос.т.; $z_l=\pi(2l+1), l=0,\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т. ; к) $z=0$ — устр.ос.т; $z_k=\pi k, k=\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — сущ.ос.т.; л) $z_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т.; м) $z=0$ — полюс 2-го порядка; $z_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т.; н) $z=0$ — сущ.ос.т.; $z=\infty$ — устр.ос.т.; о) $z=0$ — сущ.ос.т.; $z=\infty$ — устр.ос.т. п) $z=0$ — сущ.ос.т.; $z=\infty$ — устр.ос.т.; р) $z=0$ — неизол.ос.т.; $z_k=\dfrac{1}{\pi k}, k=\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — полюс 2-го порядка; с) $z=0$ — полюс 3-го порядка; $z_k=\pi k, k=$ $=\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т.; т) $z=0$ — устр.ос.т.; $z_k=\pi k, k=\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т.; у) $z=0$ — устр.ос.т.; $z_k=\pi k, k=\pm1,\pm2,\ldots$ — полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ — неизол.ос.т.; ф) $z=\infty$ — сущ.ос.т.; х) $z=\infty$ — сущ.ос.т.

2.

3.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 15.4.

1. Выч $[f(z);0]=1$; Выч $[f(z);i]=-\dfrac{e^i}{2i}$; Выч $[f(z);-i]=$ $=\dfrac{e^{-i}}{2i}$; Выч $[f(z);\infty]=\sin 1-1$; **2.** Выч $[f(z);-1]=$ $=\dfrac{1}{27}$; Выч $[f(z);2]=-\dfrac{1}{27}$; Выч $[f(z);\infty]=0$; **3.** Выч $[f(z);-2]=$ $=\dfrac{e^{-2i}}{3}$; Выч $[f(z);-1]=-\dfrac{e^{-i}}{2}$; Выч $[f(z);1]=\dfrac{e^i}{6}$; Выч $[f(z);\infty]=$ $=\dfrac{e^{-i}}{2}-\dfrac{e^{-2i}}{3}-\dfrac{e^i}{6}$; **4.** $z_k=\sqrt[3]{-1}, k=0,1,2$; Выч $[f(z);z_k]=$ $=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3z_k}-\dfrac{2}{(z_k)^2}$; Выч $[f(z);\infty]=-1$ **5.** Выч $[f(z);2]=$ $=\dfrac{\sin 2}{2}$; Выч $[f(z);\infty]=-\dfrac{\sin 2}{2}$.

6. Выч $[f(z);0]=1$; Выч $[f(z);\infty]=-1$; **7.** Выч $[f(z);0]=$ $=0$; Выч $[f(z);\infty]=0$; **8.** Выч $[f(z);0]=\dfrac{1}{4!}$; Выч $[f(z);\infty]=$ $=-\dfrac{1}{4!}$; **9.** Выч $[f(z);0]=\dfrac{1}{2}$; Выч $[f(z);\infty]=-\dfrac{1}{2}$; **10.** Выч $[f(z);1]=0$; Выч $[f(z);\infty]=0$; **11.** Выч $[f(z);1]=$ $=\dfrac{1}{4!}$; Выч $[f(z);\infty]=-\dfrac{1}{4!}$.

12. Выч $[f(z);\pi k]=(-1)^k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$; **13.** Выч $[f(z);0]=$ $=0$; Выч $[f(z);\pi k]=(-1)^k\pi k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$; **14.** Выч $[f(z);0]=$

$= 0$; Выч $\left[f(z); \frac{\pi}{2} + \pi k\right] = -\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^3}, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$; **15.** Выч $[f(z); \pi k] = 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$; **16.** Выч $[f(z); \pi k] = 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$;

Ответы к задачам для самостоятельного решения 16.5.

1. 1) 0; 2) 0; 3) πi; 4) $-\pi i$; 5) $2\pi i$; 6) 0; 7) $-2\pi i$; 8) 0; 9) 0; 10) $2\pi i/4!$; 11) $-\pi$i; 12) 4πi ; 13) 2πi; 14) $-\pi$i; 15) πi.

2. а) $-\frac{\pi}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; д) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$; е) $-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 18.2.

а) $\frac{\pi}{27}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{8}$; г) 0; д) $\frac{7\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{3}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 18.5.

а) πe^{-2}; б) $\frac{\pi e^{-1}}{2}$; в) $\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{2}\right)$; г) $\frac{\pi e^{-1}}{2}$; д) $\pi e^{-3}(\cos 3 + \sin 3)$; е) $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$

ж) $\pi(\sin 2 - \sin 3)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 19.4.

а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; д) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; е) $\sqrt{2}\,\pi$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 20.4.

1. а) $\frac{1}{p}$; б) $\frac{1}{p^2}$; в) $\frac{1}{p-2}$; г) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; д) $\frac{3}{p^2+9}$; е) $\frac{p}{p^2+1}$;

ж) $\frac{1}{p^2-1}$; з) $\frac{p}{p^2-16}$; и) $\frac{1}{(p-3)^2}$.

2. а) te^t; б) $e^{-t}\operatorname{sh} t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$; в) $e^{2t}(\sin t + \cos t)$.

3. а) e^{-2t}; б) 0; в) $\frac{1}{2}\sin 2t$; г) $\cos 3t$; д) 1; е) t;

ж) $e^{-t}\operatorname{sh} t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$; з) 0.

Ответы к задачам для самостоятельного решения 21.4.

а) $\frac{1}{4}\left((4+t)\sin t + (4-t^2)\cos t\right)$; б) $\frac{1}{4}\left((4+t)\sin t - t^2\cos t\right)$;

в) $\frac{1}{2}\left(3\cos t + (t-1)e^t\right)$; г) $\frac{1}{2}\left(2\sin t + \cos t + (t-1)e^t\right)$;

д) $\frac{1}{9}\left(9e^t + 4e^{-t} + (3t-4)e^{2t}\right)$; е) $\frac{1}{9}\left(9e^t - 5e^{-t} + (3t-4)e^{2t}\right)$;

ж) $\frac{1}{9}\left(5e^t - 9e^{-t} + (3t+4)e^{-2t}\right)$; з) $\frac{1}{25}\left(28\sin t - 4\cos t + (5t+4)e^{-2t}\right)$;

и) $2 - e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$; к) $2 - e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + t + 2\right)$.

Список литературы

1. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М. Физматлит, 2005.
2. М.А. Лаврентьев, Б.М. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
3. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. А.В. Кравцов, А.Р. Майков. Пособие к курсу теории функций комплексной переменной. М.: Физический факультет МГУ, 2007.
5. А.В. Бицадзе. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969.