МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

Ф И З И Ч Е С К И Й   Ф А К У Л Ь Т Е Т

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина

Равномерная непрерывность функций одной переменной.

Пособие для студентов I курса

Москва

2010

В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина

Равномерная непрерывность функций одной переменной.

Пособие предназначено для студентов 1 курса физического факультета МГУ, изучающих курс математического анализа в I семестре. В нем приведены основные определения и доказан ряд утверждений, касающихся свойства равномерной непрерывности функций одной переменной. Все утверждения проиллюстрированы примерами решения задач, а также приведены задачи для самостоятельного решения.
Материал соответствует курсу лекций по математическому анализу, который читается в 1-3 семестрах физического факультета.

Определение. Числовое множество X называется всюду плотным, если любая окрестность каждой точки множества, содержит точки множества X, отличные от этой точки.

Отметим, что любой промежуток является всюду плотным множеством.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на некотором всюду плотном множестве X.

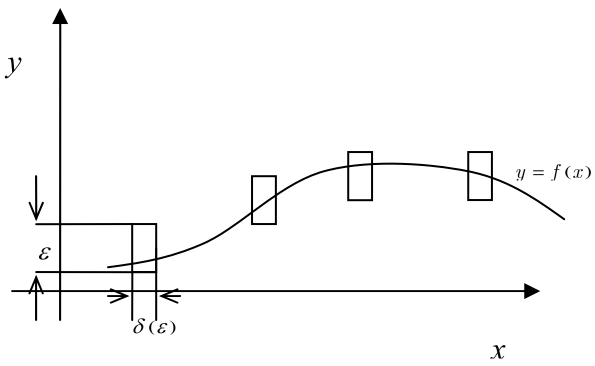
Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое что $\forall x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $\left| x'' - x' \right| < \delta$, выполняется неравенство $\left| f\left(x''\right) - f\left(x'\right) \right| < \varepsilon$.

<u>Замечание 1</u>. Равномерная непрерывность – это свойство функции, рассматриваемое на множестве точек, а не в отдельных точках.

<u>Замечание 2</u>. Если в определении равномерной непрерывности зафиксировать точку x', то получится определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x'. Таким образом, из равномерной непрерывности функции $f(x)$ на множестве X следует её непрерывность в каждой точке этого множества.

<u>Замечание 3.</u> Из непрерывности функции $f(x)$ на множестве X не следует её равномерная непрерывность на этом множестве. Примеры будут рассмотрены ниже.

Геометрическая интерпретация равномерной непрерывности функции.



Если функция $y = f(x)$ равномерно непрерывна на X, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и ε, параллельными осям Ox и Oy, можно так переместить вдоль графика этой функции, сохраняя параллельность сторон осям координат, что график не будет пересекать сторон прямоугольника, параллельных оси Ox, а будет пересекать лишь стороны, параллельные оси Oy.

Рассмотрим несколько примеров, где равномерная непрерывность функции устанавливается на основе определения.

Пример 1. Цех завода вырабатывает квадратные пластинки, стороны которых могут принимать значения в пределах от 1 до 10 см. С каким допуском можно обрабатывать стороны этих пластинок, чтобы независимо от их длины (в указанных границах) площадь их отличалась от проектной меньше, чем на 0.01см^2?

Решение. Допуском называется величина предельно допустимого отклонения размеров детали от нормы. Обозначим допуск буквой δ (см) и рассмотрим площадь пластинки S(см^2) как функцию длины l стороны пластинки: $S(l) = l^2$, $l \in [1;10]$. Наша цель – по заданному $\varepsilon = 0.01$ подобрать δ, такое, чтобы $\forall l_1, l_2 \in [1;10]$, таких что $\left| l_1 - l_2 \right| < \delta$ выполнялось неравенство $\left| S\left(l_1\right) - S\left(l_2\right) \right| < \varepsilon$.

Так как $\left| S\left(l_1\right) - S\left(l_2\right) \right| = \left| l_1^2 - l_2^2 \right| = \left| l_1 - l_2 \right| \cdot \left| l_1 + l_2 \right| < 20\delta$ при условии, что $\left| l_1 - l_2 \right| < \delta$, то неравенство $\left| S\left(l_1\right) - S\left(l_2\right) \right| < 0,01$ будет выполнено, если взять $\delta = 0.0005$ (см).

Пример 2. Функция $y = x$ является равномерно непрерывной на всей числовой прямой, поскольку взяв любое значение $\varepsilon > 0$ и положив $\delta = \varepsilon$, получим, что $\forall x', x'' \in \mathbb{R}$ из неравенства $\left|x'' - x'\right| < \delta$ следует $\left|y(x'') - y(x')\right| = \left|x'' - x'\right| < \varepsilon = \delta$.

Задача. Докажите с помощью определения, что функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Покажем, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ является равномерно непрерывной на полупрямой $x \geq 1$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и подберем для него значение $\delta(\varepsilon)$, такое, чтобы $\forall x', x'' \in [1; +\infty)$, удовлетворяющих неравенству $\left|x'' - x'\right| < \delta$, выполнялось неравенство $\left|\dfrac{1}{x'} - \dfrac{1}{x''}\right| < \varepsilon$. Поскольку $\left|\dfrac{1}{x'} - \dfrac{1}{x''}\right| = \left|\dfrac{x'' - x'}{x' \cdot x''}\right| < \dfrac{\left|x'' - x'\right|}{1 \cdot 1}$, то при $\left|x'' - x'\right| < \delta$ для выполнения неравенства $\left|\dfrac{1}{x'} - \dfrac{1}{x''}\right| < \varepsilon$ достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

Задача. Докажите с помощью определения, что функция $f(x) = e^x$ равномерно непрерывна на $(0,1)$.

Выше было показано, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ является равномерно непрерывной на полупрямой $[1; +\infty)$. Однако, функция $y = \dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$. Для того, чтобы доказать это, построим **отрицание к определению равномерной непрерывности**.

Функция $f(x)$ **не является равномерно непрерывной на промежутке *X***, если $\exists \varepsilon > 0$, такое, что для любого сколь угодно малого положительного числа δ найдутся точки $x', x'' \in X$ такие, что $\left|x'' - x'\right| < \delta$, но $\left|f\left(x''\right) - f\left(x'\right)\right| \geq \varepsilon$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \in (0;1)$. Воспользуемся отрицанием к определению равномерной непрерывности.

Возьмем $\varepsilon = 1$ и любое $\delta \in (0;1)$. Подберем такие значения $x', x'' \in (0;1)$, чтобы выполнялись неравенства $\left|x'' - x'\right| < \delta$ и $\left|\dfrac{1}{x'} - \dfrac{1}{x''}\right| > \varepsilon$.

Для этого положим $x' = \delta < 1,\ x'' = \dfrac{\delta}{\delta + 1}$. Тогда $x', x'' \in (0;1)$, $\left|x'' - x'\right| = \dfrac{\delta^2}{(\delta + 1)} < \delta$, при этом $\left|\dfrac{1}{x'} - \dfrac{1}{x''}\right| = \left|\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{\delta + 1}{\delta}\right| = \dfrac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon$. Таким образом, функция $y = \dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $x \in (0;1)$.

Пример 5. Покажем, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой. Возьмем $\varepsilon = 1$ и любое положительное число δ. Положим

$x' = \frac{1}{\delta},\ x'' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Тогда $\left|x'' - x'\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$, а

$$\left|\left(x''\right)^2 - \left(x'\right)^2\right| = \left|\frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon .$$

Это и означает, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой.

Задача. Докажите с помощью отрицания к определению равномерной непрерывности, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной функцией на $(0;1)$.

Пример 6. Докажем с помощью отрицания к определению равномерной непрерывности, что функция $f(x) = x\sin x$ не является равномерно непрерывной функцией на $(-\infty;+\infty)$.

Решение. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и любое $\delta > 0$. Положим $x' = 2\pi n,\ \ x'' = 2\pi n + \frac{1}{2\pi n},\ \ n \in \mathbb{N}$, Тогда при достаточно большом n имеем:

$$\left|x'' - x'\right| = \frac{1}{2\pi n} < \delta ,$$

$$\begin{aligned}\left|f\left(x''\right) - f\left(x'\right)\right| &= \left|x''\sin x'' - x'\sin x'\right| = \\ &= \left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right)\sin\left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right) - 2\pi n\sin(2\pi n) = \\ &= \left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right)\sin\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = 2\pi n\sin\left(\frac{1}{2\pi n}\right) + \frac{1}{2\pi n}\sin\left(\frac{1}{2\pi n}\right) > \\ &> 2\pi n\sin\left(\frac{1}{2\pi n}\right) > \frac{1}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(2\pi n)\sin\frac{1}{2\pi n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2\pi n}}{\frac{1}{2\pi n}} = 1$, откуда следует, что при достаточно большом n справедливо неравенство $2\pi n\sin\frac{1}{2\pi n} > \frac{1}{2}$.

Полученные неравенства доказывают, что функция $f(x) = x\sin x$ не является равномерно непрерывной функцией на $(-\infty;+\infty)$.

Исследование равномерной непрерывности с помощью определения бывает достаточно трудоемким, поэтому далее будут сформулированы достаточные, а в некоторых случаях и необходимые, условия равномерной непрерывности функции.

Утверждение 1. (Теорема Кантора).

Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Предположим, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a;b]$. Тогда $\exists\varepsilon > 0$, такое что $\forall\delta > 0\quad \exists\ x', x'' \in [a;b]$, для которых $\left|x'' - x'\right| < \delta$, но $\left|f\left(x''\right) - f\left(x'\right)\right| \geq \varepsilon$.

Возьмем последовательность $\{\delta_n\} \to 0,\ \delta_n > 0$ (например, $\delta_n = \frac{1}{n}$).

Согласно нашему предположению, $\forall\delta_n\ \exists\ x'_n,\ x''_n \in [a;b]$, для которых $\left|x''_n - x'_n\right| < \delta_n$, но $\left|f\left(x''_n\right) - f\left(x'_n\right)\right| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\left\{x'_n\right\}$. Она ограничена, и поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность $\left\{x'_{n_k}\right\}$, сходящуюся к некоторой точке $c \in [a,b]$. В силу того, что $\left|x''_n - x'_n\right| < \delta_n$ и $\delta_n \to 0$, имеем: $x''_{n_k} \to c$ при $n_k \to \infty$. По условию $f(x)$ непрерывна в точке c, поэтому $f\left(x'_{n_k}\right) \to f(c)$, $f\left(x''_{n_k}\right) \to f(c)$ при $n_k \to \infty$, и, значит, $\lim\limits_{n_k \to \infty}\left|f\left(x''_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| = 0$.

С другой стороны, в силу неравенства $\left|f\left(x''_n\right) - f\left(x'_n\right)\right| \geq \varepsilon$ получаем, что $\left|f\left(x''_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon$, откуда следует, что $\lim\limits_{n_k \to \infty}\left|f\left(x''_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Очевидно, что с помощью этой теоремы вопрос о равномерной непрерывности функции на сегменте сводится к вопросу о непрерывности функции на этом сегменте.

Утверждение 2. (О связи равномерной непрерывности функции на интервале и на отрезке). ***Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале $(a;b)$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная на сегменте $[a;b]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на интервале $(a;b)$.***

Доказательство:

Достаточность. Пусть существует функция $g(x)$, непрерывная на $[a;b]$ и совпадающая с функцией $f(x)$ на интервале $(a;b)$. По теореме Кантора $g(x)$ является равномерно непрерывной на сегменте $[a;b]$, а, значит, и на интервале $(a;b)$, что следует непосредственно из определения равномерной непрерывности. А поскольку функция $g(x)$ совпадает на $(a;b)$ с $f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a;b)$.

Необходимость. Пусть $a < b$ и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале $(a;b)$. Покажем, что при этих условиях существует $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению равномерной непрерывности $\exists\delta > 0$, такое что $\forall x', x'' \in (a;b)$, удовлетворяющих условию $\left|x' - x''\right| < \delta$, выполняется неравенство $\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon$. Выберем точки x', x'' таким образом, чтобы $0 < x' - a < \delta$; $0 < x'' - a < \delta$. Очевидно, что в этом случае $\left|x' - x''\right| < \delta$, и, значит, $\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon$. Таким образом, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке $x = a$ справа. Значит, $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ [см. Ильин Позняк I часть, гл.8, § 1]. Обозначим этот предел буквой A. Точно так же можно показать, что $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = B$.

Введем функцию $g(x) = \begin{cases} A, & x = a; \\ f(x), & x \in (a;b); \\ B, & x = b. \end{cases}$ Функция $g(x)$ определена на сегменте $[a;b]$, непрерывна на этом сегменте и совпадает с функцией $f(x)$ на интервале (a,b). Утверждение доказано.

Пример 7. Исследуем на равномерную непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ на интервале $(0;1)$. Поскольку на отрезке $[0;1]$ существует непрерывная функция $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, которая совпадает с $f(x)$ на интервале $(0;1)$, то, согласно ***утверждению 2***, функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$.

Задача. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x)=e^{-1/x}$ на $(0;1)$.

Утверждение 3. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a;c]$ и $[c;b]$, где $a<c<b$. Тогда она равномерно непрерывна на сегменте $[a;b]$.

Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Поскольку функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на сегменте $[a;c]$, то $\exists\delta_1>0$, такое, что для любых $x',x''\in[a;c]$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta_1$, выполняется неравенство $\left|f(x'')-f(x')\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Точно так же $\exists\delta_2>0$, такое, что для любых $x',x''\in[c;b]$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta_2$, выполняется неравенство $\left|f(x'')-f(x')\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь $x'\in[a;c]$, $x''\in[c;b]$ и $|x''-x'|<\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Тогда $c-x'<\delta\le\delta_1$, $x''-c<\delta\le\delta_1$, поэтому $\left|f(c)-f(x')\right|<\varepsilon/2$; $\left|f(x'')-f(c)\right|<\varepsilon/2$, откуда следует, что

$$\left|f(x'')-f(x')\right|=\left|f(x'')-f(c)+f(c)-f(x')\right|\le$$
$$\le\left|f(x'')-f(c)\right|+\left|f(c)-f(x')\right|<\varepsilon$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon>0$ мы указали такое δ, что если $x',x''\in[a;b]$ и $|x''-x'|<\delta$, то $\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$, а это и означает что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на всем сегменте $[a;b]$.

<u>Замечание 1</u>. В утверждении 3 можно заменить условие равномерной непрерывности $f(x)$ на сегментах $[a;c]$ и $[c;b]$на условие непрерывности функции на этих сегментах.

<u>Замечание 2.</u> Утверждение 3 справедливо и для сегментов, имеющих более одной общей точки (перекрывающихся).

<u>Замечание 3.</u> В формулировке утверждения 3 можно заменить один или оба сегмента на полубесконечные промежутки. Так, например, утверждение 3 справедливо для объединения промежутков $[b;c]$ и $[c;+\infty)$.

<u>Замечание 4</u>. Для объединения двух интервалов аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Пример 8. Покажем, что функция $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на интервалах $I_1=(-1<x<0)$ и $I_2=(0<x<1)$, но не является равномерно непрерывной на множестве $I_1\bigcup I_2$, являющемся объединением этих интервалов.

Решение. Заметим, что множество $X=I_1\bigcup I_2$ является всюду плотным, хотя точка $x=0$ и не принадлежит указанному множеству.

Равномерная непрерывность функции $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ на интервалах $I_1=(-1<x<0)$ и $I_2=(0<x<1)$ следует из ***утверждения 2*** (см. пример 7), а отсутствие равномерной непрерывности функции $f(x)$ на множестве X можно усмотреть из следующих рассуждений. Поскольку $\lim\limits_{x\to+0}\frac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$, а $\lim\limits_{x\to-0}\frac{|\sin x|}{x}=-\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=-1$, то взяв $\varepsilon=1$ и любое $\delta>0$, можно выбрать точки x' и x'', лежащие по разные стороны от нуля, так что будет выполнено неравенство $|x''-x'|<\delta$, а разность значений функции в этих точках будет сколь угодно близко к 2, и, следовательно, больше $\varepsilon=1$. Это и означает, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве X.

Утверждение 4. ***Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;+\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;+\infty)$.***

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ Из условия $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$ следует, что $\forall\varepsilon>0\quad\exists A=A(\varepsilon)>0$, такое, что $\forall x\geq A$ выполняется неравенство $|f(x)-c|<\frac{\varepsilon}{4}$. Поэтому для любых значений x',x'', удовлетворяющих условиям $x'\geq A,\ x''\geq A$, выполнено неравенство

$$|f(x'')-f(x')|=$$
$$=|f(x'')-c-f(x')+c|\leq|f(x')-c|+|f(x'')-c|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{если}\ x'\geq A,\ x''\geq A. \qquad (1)$$

На отрезке $[a;A]$ непрерывная функция $f(x)$ является равномерно непрерывной согласно теореме Кантора. Поэтому для заданного ε найдется $\delta>0$, такое, что

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{если}\ x',x''\in[a,A]\ \text{и}\ |x''-x'|<\delta \qquad (2)$$

Пусть теперь $x'\leq A,\quad x''\geq A$ и $|x''-x'|<\delta$.

Тогда $A-x'<\delta,\ x''-A<\delta$ и, следовательно, в силу (1) и (2) получаем: $|f(x'')-f(x')|\leq|f(x'')-f(A)|+|f(A)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. (3)

Из (1), (2) и (3) следует, что $\forall x', x'' \in [a, +\infty)$, удовлетворяющих условию $|x''-x'|<\delta$, выполнено неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$, а это и означает, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

Пример 9. Покажем, что функция $f(x)=e^{-x}$ равномерно непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$. Действительно, эта функция определена и непрерывна на всей числовой оси, а также $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$. Следовательно, согласно ***утверждению 4***, эта функция равномерно непрерывна на $[0;+\infty)$.

Задача. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x)=x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ на $[1;+\infty)$.

Утверждение 5. ***Если функция*** $f(x)$ ***определена и непрерывна на*** $(-\infty;+\infty)$ ***и*** $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$***, а также*** $\exists \lim\limits_{x\to=-\infty} f(x)=d$***, то функция*** $f(x)$ ***равномерно непрерывна на*** $(-\infty;+\infty)$.

Доказательство аналогично доказательству ***утверждения 4***.

Пример 10. Докажем, что функция $f(x)=\operatorname{arctg} x$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой. Действительно, эта функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, а также $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}$ и $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, согласно ***утверждению 5***, эта функция равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

Задача. Исследуйте на равномерную непрерывность на всей числовой прямой функцию $f(x)=e^{-x^2}$.

Утверждение 6. ***Пусть ограниченная монотонная функция*** $f(x)$ ***непрерывна на интервале (на всей числовой прямой). Тогда*** $f(x)$ ***равномерно непрерывна на этом промежутке***.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай интервала. Пусть $a<b$ и ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b). Тогда, в силу монотонности и ограниченности функции $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ и $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)=B$.

Положим $g(x)=\begin{cases} A, & x=a; \\ f(x), & x\in(a;b); \\ B, & x=b. \end{cases}$

Тогда функция $g(x)$, определенная на сегменте $[a;b]$, непрерывна на этом сегменте и совпадает с $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Согласно ***утверждению 2***, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале $(a;b)$.

Пусть теперь монотонная ограниченная непрерывная функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$. Тогда существуют $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, следовательно, согласно ***утверждению5***, функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на $(-\infty;+\infty)$.

Задача. Докажите, что непрерывная, монотонная и ограниченная на полубесконечном промежутке функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этом промежутке.

Задача. Докажите, что функция $f(x)=\arccos x$ является равномерно непрерывной на $(-1;1)$, пользуясь монотонностью функции $f(x)$.

Задача. Докажите, что функция $f(x)=\operatorname{arcsh} x$ является равномерно непрерывной на $(-1;1)$.

Совет. Учтите, что функция $f(x)=\operatorname{arcsh} x$ является обратной по отношению к непрерывной монотонной функции $g(x)=\operatorname{sh} x$, а значит, и сама является непрерывной монотонной функцией.

Утверждение 7. ***Если функция $f(x)$ определена, но не ограничена в любой проколотой окрестности точки x_0, то она не является равномерно непрерывной ни в какой проколотой окрестности этой точки.***

Доказательство. Рассмотрим произвольную проколотую окрестность точки x_0 (обозначим ее ω) и возьмем $\varepsilon=1$. Пусть $\delta>0$ – произвольное число, столь малое, что проколотая $\dfrac{\delta}{2}$-окрестность точки x_0 (обозначим ее $\omega_{\delta/2}$) содержится в ω. Очевидно, что расстояние между любыми двумя точками из $\omega_{\delta/2}$ меньше δ. Выберем какую-нибудь точку x' из $\omega_{\delta/2}$. В силу неограниченности функции $f(x)$ в $\omega_{\delta/2}$ найдется точка x'', такая, что $\left|f\left(x''\right)\right|>\left|f\left(x'\right)\right|+1$. Таким образом, $\left|x''-x'\right|<\delta$, но при этом $\left|f(x'')-f\left(x'\right)\right|\geq\left|f(x'')\right|-\left|f\left(x'\right)\right|>1=\varepsilon$, что и означает отсутствие равномерной непрерывности функции $f(x)$ в проколотой окрестности ω.

Задача. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x)=\operatorname{ctg} x$ на $(-1;1)$.

Утверждение 8. ***Если функция $f(x)$ имеет на промежутке X ограниченную производную, то $f(x)$ равномерно непрерывна на этом промежутке.***

Доказательство: Ограниченность производной функции $f(x)$ на промежутке X означает, что существует такое число $M>0$, для которого $\left|f'(x)\right|<M \quad \forall x\in X$.

Зададим произвольное число $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$. Рассмотрим любые две точки $x',x''\in X$, удовлетворяющие условию $\left|x'-x''\right|<\delta$. Заметим, что для функции $f(x)$ на отрезке $\left[x';x''\right]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. Поэтому найдется такая точка $\xi\in\left(x';x''\right)$, что $\left|f\left(x''\right)-f\left(x'\right)\right|=\left|f'(\xi)\right|\left|x''-x'\right|<M\cdot\delta=M\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. Согласно определению равномерной непрерывности функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на промежутке X.

Пример 11. Исследуем функцию $f(x)=e^{-1/x}$ на равномерную непрерывность на интервале $(0;1)$. Производная $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x}$ ограничена на интервале $(0;1)$, поскольку она положительна, а её максимальное значение на интервале $(0;1)$ достигается в точке $x = \frac{1}{2}$ и равно $\frac{4}{e^2}$. Отметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}e^{-1/x} = 0$. Таким образом, всюду на указанном интервале $0 < f'(x) \le \frac{4}{e^2}$. Согласно ***утверждению 8***, функция $f(x) = e^{-1/x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0;1)$.

Пример 12. Исследуем функцию $f(x) = \sqrt{x}$ на равномерную непрерывность на полупрямой $[0;+\infty)$.

Решение. Сначала рассмотрим промежуток $[1;+\infty)$. На этом промежутке функция $f(x) = \sqrt{x}$ имеет ограниченную производную: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1$. Согласно ***утверждению 8*** функция $f(x) = \sqrt{x}$ является равномерно непрерывной на промежутке $x \in [1;+\infty)$. Пусть теперь $x \in [0;1]$. На этом сегменте, функция $f(x) = \sqrt{x}$ является равномерно непрерывной по теореме Кантора. Отсюда следует (в силу ***утверждения 3*** и замечания 3 к ***утверждению 3***), что функция $f(x) = \sqrt{x}$ является равномерно непрерывной на объединении множеств $[0;1]$ и $[1;+\infty)$, то есть на полупрямой $[0;+\infty)$.

Задача. Исследуйте на равномерную непрерывность на $(1;+\infty)$ функцию $f(x) = \ln x$.

Утверждение 9. ***Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, $a > 0$ и её график имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном промежутке.***

Доказательство. По условию у графика функции $y = f(x)$ существует наклонная асимптота при $x \to +\infty$, поэтому функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где k и b – числа, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Если $k = 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и, следовательно, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ в силу утверждения 4.

Пусть $k \ne 0$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $\exists A = A(\varepsilon)$, такое что $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{8}$ при $x \ge A$. Положим $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{4|k|}$ и рассмотрим любые x' и x'', удовлетворяющие условиям $x' \ge A$, $x'' \ge A$, $|x'' - x'| < \delta_1$.

Для таких x' и x'' имеем

$$\left|f(x'') - f(x')\right| = \left|k(x'' - x') + \alpha(x'') - \alpha(x')\right| \le$$

$$\le |k| \cdot |x'' - x'| + |\alpha(x'')| + |\alpha(x')| < |k| \cdot \delta_1 + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = |k| \cdot \frac{\varepsilon}{4|k|} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$ Итак,

$$\left|f(x'') - f(x')\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } x' \ge A,\ x'' \ge A,\ |x'' - x'| < \delta_1. \qquad (4)$$

На сегменте $[a, A]$ функция $f(x)$ является равномерно непрерывной согласно теореме Кантора. Поэтому для заданного ε найдется $\delta_2 > 0$, такое что

$\left|f\left(x''\right)-f\left(x'\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, если $x', x'' \in [a, A]$ и $\left|x''-x'\right|<\delta_2$. (5)

Положим $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$ и возьмем любые x' и x'', удовлетворяющие условиям $x' \le A$, $x'' \ge A$, $\left|x''-x'\right|<\delta$. Тогда, используя (4) и (5), получим (аналогично тому, как было получено неравенство (3) на основе (1) и (2)):

$$\left|f\left(x''\right)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon \qquad (6)$$

Из (4), (5) и (6) следует, что $\forall x', x'' \in [a, +\infty)$, удовлетворяющих условию $\left|x''-x'\right|<\delta$, выполняется неравенство $\left|f\left(x''\right)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon$, а это и означает, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;+\infty)$.

Пример 13. Исследуем на равномерную непрерывность функцию $f(x)=2x-1+\frac{1}{x+1}$ на $[a;+\infty)$, $a>0$.

Решение. Так как $\alpha(x)=\frac{1}{x+1}\to 0$ при $x\to+\infty$, то у графика функции $y=f(x)$ существует наклонная асимптота при $x\to+\infty$: $y=2x-1$. Поэтому, согласно ***утверждению 9***, функция $f(x)=2x-1+\frac{1}{x+1}$ равномерно непрерывна на $[a;+\infty)$.

Задача. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x)=\frac{x^4}{(1+x)^3}$ на $[a;+\infty)$, $a>0$.

Утверждение 10. ***Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой и периодична с периодом T. Тогда функция $f(x)$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой.***

Доказательство. По условию функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Выберем отрезок $[0;2T]$. Согласно теореме Кантора функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на этом отрезке. Значит, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для любых $x', x'' \in [0;2T]$ из неравенства $\left|x''-x'\right|<\delta$ следует $\left|f\left(x''\right)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon$. Рассмотрим теперь любые две точки x', x'', связанные соотношением $\left|x''-x'\right|<\delta$. Возможны два варианта.

1) Точки x', x'' лежат в пределах одного отрезка $\left[kT;(k+1)T\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

2) Точки x', x'' лежат на соседних отрезках: $x' \in \left[kT;(k+1)T\right]$, $x'' \in \left[(k+1)T;(k+2)T\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

Как в первом, так и во втором случае, $x'-kT, x''-kT \in [0;2T]$, и при этом $\left|\left(x'-kT\right)-\left(x''-kT\right)\right|<\delta$, поэтому $\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\left|f\left(x'-kT\right)-f\left(x''-kT\right)\right|<\varepsilon$, а это и означает, что функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на всей числовой прямой.

Пример 14. Исследуйте на равномерную непрерывность на всей числовой прямой функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Функция $f(x)$ является непрерывной на множестве $(-\infty;+\infty)$ и периодической с периодом π, а значит, согласно ***утверждению 10***, она равномерно непрерывна на этом множестве.

Задача. Докажите, что функция $f(x) = 2\sin x - \cos x$ является равномерно непрерывной на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Утверждение 11. ***Равномерно непрерывная на ограниченном промежутке функция ограничена на этом промежутке.***

Доказательство.

В случае сегмента ограниченность функции следует непосредственно из непрерывности равномерно непрерывной функции и 1-й теоремы Вейерштрасса.

Пусть теперь функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на интервале $(a;b)$. Тогда, согласно ***утверждению 2***, существует непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Согласно 1-й теореме Вейерштрасса, функция $g(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$, а, значит, и на интервале $(a;b)$, то есть функция $f(x)$ является ограниченной на интервале $(a;b)$.

Замечание. Функция, равномерно непрерывная на неограниченном промежутке, может быть неограниченной на этом промежутке (см. пример 2).

Утверждение 12. ***Сумма и произведение двух равномерно непрерывных на ограниченном промежутке функций равномерно непрерывны на этом промежутке.***

Докажем утверждение для произведения функций. (Доказательство для суммы предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ равномерно непрерывны на ограниченном промежутке X. Тогда, согласно ***утверждению 11***, эти функции ограничены на рассматриваемом промежутке, то есть существуют числа M_1 и M_2, такие что $|f(x)| < M_1$, $|g(x)| < M_2$, $\forall x \in X$. Согласно определению равномерной непрерывности, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0$, такое, что $\forall x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta_1$, верно неравенство $\left|f(x'') - f(x')\right| < \dfrac{\varepsilon}{2M_2}$;

$\exists \delta_2 > 0$, такое, что $\forall x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta_2$, верно неравенство $\left|g(x'') - g(x')\right| < \dfrac{\varepsilon}{2M_1}$.

Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Тогда $\forall x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, получаем

$$\left|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')\right| =$$
$$= \left|f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x')g(x')\right| \le$$
$$\le \left|\left(f(x'') - f(x')\right)g(x'')\right| + \left|\left(g(x'') - g(x')\right)f(x')\right| \le$$
$$\le \left|g(x'')\right|\frac{\varepsilon}{2M_2} + \left|f(x')\right|\frac{\varepsilon}{2M_1} < M_2\frac{\varepsilon}{2M_2} + M_1\frac{\varepsilon}{2M_1} = \varepsilon,$$

а это и доказывает равномерную непрерывность произведения $f(x)g(x)$ на промежутке X.

Замечание 1. На неограниченном множестве утверждение, аналогичное утверждению 12 для суммы равномерно непрерывных функций, также справедливо.

Замечание 2. Произведение равномерно непрерывных функций на неограниченном множестве может не быть равномерно непрерывным. Например, произведение функций $f(x) = x$ и $g(x) = x$, равномерно непрерывных на $(-\infty;+\infty)$, не является равномерно непрерывной функцией на этом прормежутке (см. пример 2 и пример 5).

Задача. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sin 2x \cdot \sin 5x$ на $(-\infty;+\infty)$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Для данного $\varepsilon > 0$ найдите какое-нибудь $\delta > 0$, удовлетворяющее определению равномерной непрерывности функции $f(x)$, если

a. $f(x) = x^2 - 2x - 1,\ -2 \le x \le 5$

b. $f(x) = \sqrt[n]{x},\ 0 < x < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите с помощью отрицания к определению равномерной непрерывности, что функция $f(x) = \ln x$ не является равномерно непрерывной функцией на $(0;1)$.

3. Докажите, что сумма и произведение конечного числа равномерно непрерывных на интервале $(a;b)$ функций равномерно непрерывны на этом интервале.

4. Докажите, что функция $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ непрерывна и ограничена на интервале $(0;1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

5. Докажите, что неограниченная функция $f(x) = \sin x + x$ равномерно непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

6. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию

- $f(x) = e^x \cos\dfrac{1}{x}$ на $(0;1)$;
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ на $(-\infty;+\infty)$;
- $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ на $(-1;0)$ и на $(0;+\infty)$;
- $f(x) = x\cos x$ на $(-\infty;+\infty)$;
- $f(x) = \sqrt{x^2}\ln x$ на $(0;1)$ и на $[1;+\infty)$;
- $f(x) = e^{-|x|}$ на $(-\infty;+\infty)$.
- $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ на $(-\infty;+\infty)$.
- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ на $(-\infty;+\infty)$;
- $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}$ на $(-\infty;+\infty)$;
- $f(x) = \dfrac{2e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ на $(-\infty;+\infty)$;
- $f(x) = x^2\cos x$ на $[0;\pi]$.

- $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ на $(-\infty; +\infty)$.
- $f(x) = x + \ln x$ на $[1; +\infty)$;
- $f(x) = x^2 + \ln x$ на $[1; +\infty)$;
- $f(x) = x \ln x$ на $(0;1)$ и на $[1; +\infty)$;

7. Модулем непрерывности функции $f(x)$ на данном множестве называется функция $\omega_f(\delta) = \sup|f(x) - f(y)|$, где x, y - любые две точки множества, связанные условием $|x - y| < \delta$. Докажите, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$ на данном множестве необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. Москва, «Высшая школа», 1999.
2. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах. Изд-во «Лань», 2008.
3. Н.Я. Виленкин, К.А. Бохан, И.А. Марон, И.В. Матвеев, М.Л. Смолянский, А.Т. Цветков. Задачник по курсу математического анализа. М.: «Просвещение», 1971.
4. И.А Виноградова, С.Н. Олехник, В.А, Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1. М.:Высш.шк.,2002.
5. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.:Астрель, 2005.
6. В.А. Зорич. Математический анализ. Часть I. Издание второе, исправленное и дополненное. М.: ФАЗИС 1997
7. В.А. Ильин Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть I. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд. Перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
9. И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П. Головач. Справочное пособие по высшей математике. УРСС, 2001.