МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

В.Ф. Бутузов, М.В. Бутузова

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Москва
2016

Предисловие

Учебное пособие предназначено как для студентов, так и для преподавателей, ведущих семинарские занятия по математическому анализу. Его содержание относится к разделу «Несобственные интегралы», не вошедшему в известное учебное пособие «Математический анализ в вопросах и задачах» (авторы: В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин). Структура данного пособия такая же, как и структура глав в упомянутом учебном пособии. Каждый параграф разбит на четыре пункта: «Основные понятия и теоремы», гда даются определения и приводятся (без доказательства) основные теоремы; «Контрольные вопросы и задания», способствующие усвоению основных понятий; «Примеры решения задач» (начало и конец решения каждой задачи отмечены знаками $\triangle$ и $\blacktriangle$) и «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» (в конце пособия приведены ответы и указания к задачам этих пунктов).

Авторы признательны Е.А. Михайловой за компьютерный набор текста пособия.

Рекомендовано Советом отделения прикладной математики в качестве пособия для студентов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, обучающихся по направлениям «физика» и «астрономия».

§1. Несобственные интегралы первого рода

Основные понятия и теоремы

1. Определение несобственного интеграла первого рода. Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leq x < +\infty$, и пусть $\forall A > a$ существует определённый интеграл $\int_a^A f(x)dx$. Он является функцией переменной A. Рассмотрим предел

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx. \tag{1}$$

Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае будем обозначать его так:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

и называть *несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ по полупрямой* $[a, +\infty)$.

Если предел (1) существует (не существует), то говорят, что *несобственный интеграл сходится (расходится)*.

Если функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a, +\infty)$ и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, то для любой первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ существует

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) =: F(\infty),$$

и справедлива формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)|_a^\infty = F(\infty) - F(a).$$

Аналогично определяются несобственный интеграл по полупрямой $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^a f(x)dx$$

и несобственный интеграл по всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A f(x)dx.$$

2. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода). *Для того, чтобы несобственный интеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие (условие Коши):* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *число* $A > a$*, такое, что* $\forall A' > A$ *и* $\forall A'' > A$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла первого рода от неотрицательной функции). *Если* $f(x) \geq 0$ *на полупрямой* $[a, +\infty)$*, то для сходимости несобственного интеграла* $\int_a^\infty f(x)dx$ *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$$

была ограниченной на полупрямой $a \leq A < +\infty$*.*

Теорема 3 (признак сравнения). *Если* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *на полупрямой* $[a, +\infty)$*, то из сходимости интеграла*

$$\int_a^\infty g(x)dx \tag{2}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^\infty f(x)dx, \tag{3}$$

а из расходимости интеграла (3) следует расходимость интеграла (2).

Теорема 4 (признак сравнения в предельной форме). *Пусть* $g(x) \geq 0$ *на полупрямой* $[a, +\infty)$*, и существует предел*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда: 1) если $k \neq 0$, то интегралы (2) и (3) сходятся или расходятся одновременно; 2) если $k = 0$, то из сходимости интеграла (2) следует сходимость интеграла (3), а из расходимости интеграла (3) следует расходимость интеграла (2).

Теорема 5 (признак Дирихле). *Пусть выполнены условия:*
1) на полупрямой $[a, +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную;
2) функция $g(x)$ является монотонной на полупрямой $[a, +\infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$.
Тогда несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

сходится.

3. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле первого рода.

Теорема 6 (о замене переменной). *Пусть:*
1) функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a, +\infty)$;
2) функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную положительную производную $\varphi'(t)$ на полупрямой $[\alpha, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Тогда несобственные интегралы

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\infty f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости они равны:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_\alpha^\infty f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема 7 (об интегрировании по частям). *Пусть:*
1) функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на полупрямой $[a, +\infty)$ непрерывные производные $f'(x)$ и $g'(x)$;
2) существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)g(x).$$

Тогда интегралы

$$\int_a^\infty f(x)g'(x)dx \quad \textit{и} \quad \int_a^\infty f'(x)g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости имеет место равенство

$$\int_a^\infty f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(x)g(x)dx.$$

4. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода.

Определение. Несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$ расходится.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, что называется несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$: по полупрямой $[a, \infty)$; по полупрямой $(-\infty, a]$; по всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

2. Сформулируйте определение сходящегося несобственного интеграла:

$$\int_a^\infty f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^a f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Приведите для каждого из трёх типов пример сходящегося интеграла.

3. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^a f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

4. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии сходимости несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ от неотрицательной функции $f(x)$. Сформулируйте аналогичные теоремы для несобственных интегралов

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

5. Останется ли верным утверждение теоремы 2, если потребовать, чтобы функицця $f(x)$ была неотрицательной не на всей полупрямой $[a;+\infty)$, а только на полупрямой $[b;+\infty)$, где b - какое-нибудь число, большее a. Ответ обоснуйте.

6. Докажите, приведя соответствующий пример, что утверждение теоремы 2 стонавится неверным, если отказаться от условия неотрицательности $f(x)$ на полупрямой $[a;+\infty)$.

7. Сформулируйте теорему о признаке сравнения для несобственных интегралов первого рода. Останется ли верным утверждение теоремы, если отказаться от условия $f(x) \geq 0$, оставив условие $f(x) \leq g(x)$? Ответ обоснуйте.

8. Сформулируйте теорему о признаке сравнения в предельной форме для несобственных интегралов первого рода.

9. Сформулируйте теорему о признаке Дирихле сходимости несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$. Сформулируйте аналогичные теоремы для несобственных интегралов

$$\int_{-\infty}^a f(x(g(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

10. Можно ли к интегралу

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x+2\sin x}dx$$

применить признак Дирихле, положив $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x+2\sin x}$? Ответ обоснуйте.

11. Сформулируйте теорему о замене переменной в несобственном интеграле первого рода. Используя формулу замены переменной в определённом интеграле и определение несобственного интеграла первого рода, докажите эту теорему.

12. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для несобственного интеграла первого рода. Используя формулу интегрирования по частям для определённого интеграла и определение несобственного интеграла первого рода, докажите эту теорему.

13. Сформулируйте определения абсолютно сходящегося и условно сходящегося несобственного интеграла: $\int_a^\infty f(x)dx$; $\int_{-\infty}^a f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Приведите примеры абсолютно сходящихся и условно сходящихся интегралов указанных типов.

14. Докажите, что если несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно, то он сходится.

15. Докажите, что если интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ расходится, то: интеграл $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]dx$ расходится; интеграл $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ может быть сходящимся и может быть расходящимся (приведите соответствующие примеры).

16. Докажите, что если интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится абсолютно, а интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ сходится условно, то интеграл $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]dx$ сходится условно.

Примеры решения задач

1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0)$$

в зависимости от числа α.

$\triangle$ По определению

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_a^A, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \ln x\big|_a^A, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right), & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \ln\frac{A}{a}, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Таким образом, предел $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A \frac{dx}{x^\alpha}$ равен $\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, если $\alpha > 1$, и не существует, если $\alpha \leq 1$.

Следовательно, интеграл $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.▲

Замечание 1. Рассмотренный интеграл $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ является *эталонным* интегралом при применении признака сравнения ко многим интегралам вида $\int_a^\infty f(x)dx$. Из теорем 3 и 4 и примера 1 следует, что если

$$|f(x)| \leq cg(x) \ \text{ при } \ x \geq b > a,$$

либо существует

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{4}$$

где $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, c и b - некоторые положительные числа и $\alpha > 1$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, и притом абсолютно; если же

$$f(x) \geq cg(x) \ \text{ при } \ x \geq b > a,$$

либо существует не равный нулю предел (4), где $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $c > 0$ и $\alpha \leq 1$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ расходится.

В частности, если

$$f(x) \sim g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \ \text{ при } \ x \to +\infty$$

(знак $\sim$ обозначает эквивалентность функций, т.е. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$), то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}. \tag{5}$$

△ Так как

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \ \text{ при } \ x \to +\infty,$$

и интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится (см. пример 1), то интеграл (5) также сходится (см. замечание 1 после примера 1).▲

3. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^\alpha+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{x} dx \tag{6}$$

в зависимости от числа α.

△ Для подынтегральной функции в интеграле (6) введём обозначение $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^\alpha+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ и применим к интегралу (6) признак сравнения в предельной форме (см. замечание 1 после примера 1).

Если $\alpha > 0$, то

$$\frac{1}{\sqrt{x^\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{x}{2}}} \text{ при } x \to +\infty,$$

а, поскольку $\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$, то

$$f(x) \sim g(x) = \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}} \text{ при } x \to +\infty.$$

Так как интеграл $\int_1^\infty g(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ сходится при $\alpha > 0$ (см. пример 1), то интеграл (6) также сходится при $\alpha > 0$.

Если $\alpha \leq 0$, то $\frac{1}{\sqrt{x^\alpha+1}} = O(1)$ при $x \to +\infty$, и в качестве функции сравнения возьмём $g(x) = \frac{1}{x}$. Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^\alpha+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{если } \alpha = 0, \\ 1, & \text{если } \alpha < 0, \end{cases}$$

а интеграл $\int_1^\infty g(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ расходится (см. пример 1), то по теореме 4 интеграл (6) также расходится при $\alpha \leq 0$.

Итак, интеграл (6) сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \leq 0$.▲

4. Доказать с помощью критерия Коши, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx \tag{7}$$

сходится.

$\triangle$ Отметим, что очевидная оценка подынтегральной функции $|\frac{\cos x}{x}| \le \frac{1}{x}$ не даёт ответа на вопрос о сходимости интеграла (7), поскольку интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ расходится.

Чтобы воспользоваться критерием Коши, получим сначала оценку для определённого интеграла

$$\int_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x} dx, \quad \text{где} \ \ A' > 0, \quad A'' > 0,$$

который фигурирует в критерии Коши применительно к интегралу (7). По формуле интегрирования по частям имеем:

$$\int_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x} dx = \int_{A'}^{A''} \frac{d \sin x}{x} = \frac{\sin x}{x}\bigg|_{A'}^{A''} + \int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x^2} dx,$$

откуда следуют неравенства

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x} dx \right| \le \frac{1}{A''} + \frac{1}{A'} + \left| \int_{A'}^{A''} \frac{dx}{x^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{A''} + \frac{1}{A'} + \left| -\frac{1}{x}\bigg|_{A'}^{A''} \right| \le \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''}.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмём $A = \frac{4}{\varepsilon}$. Тогда $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ справедливы неравенства

$$\frac{2}{A'} < \frac{2}{A} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{2}{A''} < \frac{2}{A} = \frac{\varepsilon}{2} \ \ \text{и, следовательно,}$$

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x} dx \right| \le \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, согласно критерию Коши, что несобственный интеграл (7) сходится. $\blacktriangle$

5. Доказать с помощью критерия Коши, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

расходится.

$\triangle$ В соответствии с критерием Коши нужно доказать, что условие Коши не выполняется, т.е. $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $\forall A > 1$ $\exists A' > A$ и $\exists A'' > A$, для которых

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{|\sin x|}{x} dx \right| > \varepsilon.$$

Возьмём любое ε из интервала $0 < \varepsilon < \frac{1}{\pi}$ и $\forall A > 1$ возьмём натуральное число n, такое, что $\pi n > A$. Положим $A' = \pi n$, $A'' = 2\pi n$ и получим оценку снизу для интеграла

$$I := \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Если $x \in [\pi n, 2\pi n]$, то $x \leq 2\pi n$, поэтому $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2\pi n}$ и

$$I \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx.$$

Интеграл $J := \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx$ представим в виде суммы n интегралов по отрезкам $[\pi n, \pi(n+1)]$, $[\pi(n+1), \pi(n+2)]$, $\ldots$, $[\pi(2n-1), 2\pi n]$. По каждому такому отрезку интеграл от функции $|\sin x|$ равен 2, поэтому $J = 2n$, и, следовательно,

$$I = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2\pi n} \cdot 2n = \frac{1}{\pi} > \varepsilon.$$

Итак, если взять какое-нибудь ε из интервала $0 < \varepsilon < \frac{1}{\pi}$, то $\forall A > 1$ $\exists A' = \pi n > A$ и $A'' = 2\pi n > A$, такие, что $\left| \int_{A'}^{A''} \frac{|\sin x|}{x} dx \right| > \varepsilon$. Отсюда в силу критерия Коши следует, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. $\blacktriangle$

6. Исследовать на сходимость (условную или абсолютную) интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx \quad (\alpha > 0) \tag{8}$$

в зависимости от числа α.

$\triangle$ Положим

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

и воспользуемся признаком Дирихле. Функция $f(x) = \sin x$ на полупрямой $[1; +\infty)$ нерерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, т.е. функция $f(x)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 5 (о признаке Дирихле).

Функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ при $\alpha > 0$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, т.е. функция $g(x)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 5.

Поэтому, согласно теореме 5, интеграл (8) сходится при $\alpha > 0$.

Докажем теперь, что при $0 < \alpha \leq 1$ интеграл (8) сходится условно. Для этого нужно доказать, что при $0 < \alpha \leq 1$ интеграл

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \tag{9}$$

расходится.

Воспользуемся неравенствами

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} \geq 0 \text{ при } x \geq 1. \tag{10}$$

Так как интеграл $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx$ сходится (это доказывается с помощью признака Дирихле в точности так же, как была доказана сходимость интеграла (8)), а интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{2x^\alpha}$ расходится при $0 < \alpha \leq 1$ (см. пример 1), то интеграл $\int_1^\infty \left(\frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} \right) dx$ расходится, и, следовательно, в силу неравенств (10) по теореме 3 интеграл (9) также расходится.

Отметим, что доказать расходимость интеграла (9) можно ещё проще, если воспользоваться примером 5. Так как

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \text{ при } x \geq 1, \ \ 0 < \alpha \leq 1,$$

и интеграл $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится (см. пример 5), то по теореме 3 интеграл (9) также расходится.

Если $\alpha > 1$, то интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, а поскольку $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, то интеграл $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ также сходится (по теореме 3), т.е. интеграл (8) сходится абсолютно.

Итак, интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится условно, если $0 < \alpha \leq 1$, и сходится абсолютно, если $\alpha > 1$.

Если $\alpha \le 0$, то этот интеграл расходится (докажите это). ▲

7. Исследовать на сходимость (условную или абсолютную) интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x + 2\sin x} dx. \tag{11}$$

△ Введём обозначения

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x + 2\sin x}. \tag{12}$$

Функция $f(x) = \sin x$ на полупрямой $[1; +\infty)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Казалось бы, можно применить к данному интегралу признак Дирихле. Однако не следует забывать, что в теореме 5 (о признаке Дирихле) было ещё одно условие - требовалось, чтобы функция $g(x)$ была монотонной. В данном случае это условие не выполнено. В самом деле,

$$g'(x) = -\frac{1 + 2\cos x}{(x + 2\sin x)^2},$$

и, следовательно, $g'(x) > 0$ на тех инервалах полупрямой $[1; +\infty)$, где $1 + \cos 2x < 0$, и $g'(x) < 0$ на тех интервалах, где $1 + \cos 2x > 0$. Поэтому функция $g(x)$ возрастает на интервалах первого типа и убывает на интервалах второго типа и, следовательно, не является монотонной на полупрямой $[1; +\infty)$. Таким образом, признак Дирихле к данному интегралу применить нельзя, если взять в качестве $f(x)$ и $g(x)$ функции (12).

Применим другой подход. Используя формулу Маклорена

$$(1 + y)^{-1} = 1 - y + o(y) \ \text{ при } \ y \to 0$$

применительно к функции $(1 + \frac{2\sin x}{x})^{-1}$, получаем (в нашем случае $y = \frac{2\sin x}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$):

$$\frac{\sin x}{x + 2\sin x} = \frac{\sin x}{x}\left(1 + \frac{2\sin x}{x}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{2\sin x}{x} + o\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) \ \text{ при } \ x \to +\infty.$$

Таким образом,

$$\frac{\sin x}{x+2\sin x} = \frac{\sin x}{x} + \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = -\frac{2\sin^2 x}{x^2} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$|\varphi(x)| \leq \frac{c}{x^2} \quad \text{при} \quad x \geq x_0, \qquad (13)$$

где c и x_0 - некоторые положительные числа.

В силу неравенства (13) интеграл $\int_1^\infty \varphi(x)dx$ сходится (см. замечание 1 после примера 1). Интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ также сходится (см. пример 6). Следовательно, сходится интеграл (11), равный сумме сходящихся интегралов от функций $\frac{\sin x}{x}$ и $\varphi(x)$.

Отметим, что в данном примере отсутствие монотонности функции $g(x) = \frac{1}{x+2\sin x}$ не помешало сходимости интеграла.

Докажем теперь, что интеграл (11) сходится условно. Для этого нужно доказать, что интеграл

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x+2\sin x}\right| dx \qquad (14)$$

расходится.

Так как $|x+2\sin x| \leq 3x$ при $x \geq 1$, то

$$\left|\frac{\sin x}{x+2\sin x}\right| \geq \frac{|\sin x|}{3x} \quad \text{при} \quad x \geq 1.$$

Интеграл $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{3x}dx$ расходится (см. пример 5). Следовательно, по признаку сравнения (теорема 3) интеграл (14) также расходится.

Итак, интеграл (11) сходится условно.▲

8. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \qquad (15)$$

△ Введём обозначения

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sin x}.$$

Как и в предыдущем примере функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 5 за исключением условия монотонности функции $g(x)$ (убедитесь в этом, вычислив производную $g'(x)$). Это не позволяет применить признак Дирихле. Но в отличие от предыдущего примера, где интеграл оказался сходящимся при отсутствии монотонности функции $g(x)$, данный интеграл, как мы сейчас увидим, является расходящимся. Используя формулу Маклорена

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 + o(y^2) \ \text{ при } \ y \to 0,$$

приходим к равенству

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right] \ \text{ при } \ x \to +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \varphi(x), \tag{16}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{\sin^3 x}{x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \ \text{ при } \ x \to +\infty,$$

и, следовательно,

$$|\varphi(x)| \leq \frac{c}{x^{\frac{3}{2}}} \ \text{ при } \ x \geq x_0,$$

c и x_0 - некоторые положительные числа.

Рассмотрим несобственные интегралы от каждого слагаемого в правой части (16). Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится (см. пример 6), интеграл $\int_1^{\infty} \varphi(x)dx$ также сходится (см. Замечание 1 после примера 1), а интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится - это доказывается таким же образом, как была доказана расходимость интеграла (9) в ходе решения примера 6.

Итак, несобственные интегралы по полупрямой $[1; +\infty)$ от первого и третьего слагаемых в правой части (16) сходятся, а интеграл от второго слагаемого расходится. Следовательно, расходится интеграл от суммы этих трёх слагаемых, т.е. расходится исходный интеграл (15).▲

9. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) интеграл
$$\int_1^{\infty} \sin(x^2)dx. \tag{17}$$
$\triangle$ Сделаем замену переменной $x = \sqrt{t}$, $1 \le t < +\infty$. Функция $f(x) = \sin(x^2)$ непрерывна на полупрямой $[1 \le x < \infty)$, а функция $\varphi(t) = \sqrt{t}$ имеет непрерывную положительную производную $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ на полупрямой $[1 \le t < \infty)$ и удовлетворяет условиям $\varphi(1) = 1$ и $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$. Тем самым выполнены все условия теоремы 6 о замене переменной в несобственном интеграле.

При переходе к переменной t интеграл (17) принимает вид
$$\frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$
Этот интеграл сходится (см. пример 6). Следовательно, по теореме 6 интеграл (17) также сходится.

Докажем теперь, что интеграл (17) сходится условно. Для этого нужно доказать, что интеграл
$$\int_1^{\infty} |\sin(x^2)|dx \tag{18}$$
расходится. Сделав замену переменной $x = \sqrt{t}$ в интеграле (18), получим интеграл
$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}dt,$$
расходимость которого следует из расходимости интеграла (9) при $\alpha = \frac{1}{2}$ (см. решение примера 6).

Итак, интеграл (17) сходится условно. $\blacktriangle$

Замечание. Рассмотренный пример поучителен в том отношении, что подынтегральная функция $f(x) = \sin(x^2)$ не стремится к нулю при $x \to +\infty$, а интеграл сходится. Следовательно, условие $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ не является необходимым условием сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$. В связи с этим замечанием обратите внимание на упражнение 7.

10. Вычислить интеграл
$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx.$$

$\triangle$ Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = -\int_0^\infty xd(e^{-x}) = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx.$$

Последний интеграл вычисляем по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Итак, $\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$. $\blacktriangle$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Используя определения сходящегося и расходящегося несобственных интегралов первого рода, исследуйте на сходимость интегралы (для сходящегося интеграла найдите его значение):

$$\text{а)}\ \int_0^\infty x\sin x dx;\quad \text{б)}\ \int_0^\infty x^2e^{-x}dx;\quad \text{в)}\ \int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x}};$$

$$\text{г)}\ \int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x^2+2x};\quad \text{д)}\ \int_0^\infty (\sin x)e^{-x}dx;\quad \text{е)}\ \int_{-\infty}^0 (\cos x)e^{x}dx;$$

$$\text{ж)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};\quad \text{з)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. Докажите с помощью критерия Коши, что интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha > 0$, а интеграл $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ расходится при $0 < \alpha < 1$.

3. Исследуйте на сходимость интегралы:

$$\text{а)}\ \int_1^\infty \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2+x}dx;\quad \text{б)}\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x};\quad \text{в)}\ \int_0^\infty x^{10}e^{-x}dx;$$

$$\text{г)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx;\quad \text{д)}\ \int_1^\infty \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}{x^3}dx;\quad \text{е)}\ \int_1^\infty \frac{\sin 3x}{\ln 3x}dx;$$

$$\text{ж)}\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+\sin x}dx;\quad \text{з)}\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^\alpha x};\quad \text{и)}\ \int_1^\infty x^\alpha \operatorname{ctg}\frac{1}{x}dx;$$

$$\text{к)} \int_{-\infty}^{-1} |x|^{\alpha} 2^x dx; \quad \text{л)} \int_1^{\infty} (1+\frac{1}{x})^{-x} dx.$$

4. Исследуйте на сходимость (абсолютную или условную) интегралы:

$$\text{а)} \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx; \quad \text{б)} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\cos x)\cdot \sin x}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{в)} \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}+\sin x} dx;$$

$$\text{г)} \int_3^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x + \cos x} dx; \quad \text{д)} \int_1^{\infty} x^{\alpha} \cos(x^3) dx.$$

5. Пусть интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, а функция $g(x)$ ограничена на полупрямой $[a,+\infty)$. Докажите, что интеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится абсолютно.

6. Пусть интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится условно, а функиця $g(x)$ ограничена на полупрямой $[a;+\infty)$. Докажите, приведя соответствующие примеры, что интеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ может: быть расходящимся; сходиться условно; сходиться абсолютно.

7. Докажите, что если $f(x) \geq 0$ (либо $f(x) \leq 0$) на полупрямой $[a;+\infty)$, и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$f(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

8. Докажите, что если $f(x)$ - монотонная функция на полупрямой $[a,+\infty)$, и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to +\infty.$$

9. Приведите пример функции $f(x)$, такой, что

$$|f(x)| \geq \frac{1}{x} \text{ на полупрямой } 1 \leq x < \infty,$$

а интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

§2. Несобственные интегралы второго рода

Основные понятия и теоремы

1. Определение несобственного интеграла второго рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на полусегменте $(a < x \leq b]$, не ограничена на этом полусегменте, но ограничена на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$, где δ - произвольное положительное число, такое, что $a + \delta < b$, (т.е. $\delta < b - a$). Точку a назовём *особой точкой* функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$, имеющая особую точку $x = a$, интегрируема на любом сегменте $[a + \delta, b]$, где $0 < \delta < b - a$. Отметим, что на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ не интегрируема в силу её неограниченности, т.е. определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует, а интеграл $\int_{a+\delta}^b f(x)dx$ существует и является функцией переменной $\delta \in (0, b - a)$. Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx. \tag{1}$$

Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае будем называть его *несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по полусегменту* $(a, b]$ и обозначать так же, как определённый интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Если предел (1) существует (не существует), то говорят, что *несобственный интеграл (2) сходится (расходится).*

Если функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $(a, b]$, и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то для любой первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ существует
$\lim_{\delta \to +0} F(a + \delta) =: F(a)$, и справедлива формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Аналогично определяются несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по полусегменту $[a \leq x < b)$, где b - особая

точка $f(x)$:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx,$$
и несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по интервалу (a,b), где a и b - особые точки $f(x)$. и других особых точек на сегменте $[a,b]$ у функции $f(x)$ нет:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx.$$
Если внутренняя точка c сегмента $[a,b]$ является особой точко функции $f(x)$ как на сегменте $[a,c]$, так и на сегменте $[c,b]$, и других особых точек на сегменте $[a,b]$ у функции $f(x)$ нет, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется как сумма двух пределов:
$$\lim_{\delta_1\to+0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2\to+0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)dx.$$
Если оба предела существуют, то говорят, что несобственный интеграл
$\int_a^b f(x)dx$ сходится, а если хотя бы один из пределов не существует, то - расходится.

Понятия абсолютной и условной сходимости для несобственных интегралов второго рода вводятся аналогично этим понятиям для несобственных интегралов первого рода.

2. Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода. Для несобственных интегралов второго рода имеют место признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов первого рода. Рассмотрим некоторые из них для несобственных интегралов по полусегменту $(a < x \le b]$, где a - особая точка функции.

Теорема 8 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода). *Для того, чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по полусегменту $(a,b]$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие (условие Коши): $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, такое, что $\forall\delta'$ и δ'', удовлетворяющих неравенствам $0 < \delta' < \delta$ и $0 < \delta'' < \delta$, выполняется* *неравенство*

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема 9 (признак сравнения). *Если* $0 \le f(x) \le g(x)$ *на полусегменте* $(a < x \le b]$, *и точка* a *- единственная особая точка функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *на сегменте* $[a, b]$, *то из сходимости интеграла*

$$\int_a^b g(x)dx \tag{3}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{4}$$

а из рассходимости интеграла (4) следует расходимость интеграла (3).

Теорема 10 (признак сравнения в предельной форме).*Пусть точка* a *- единственная особая точка функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *на сегменте* $[a, b]$, $g(x) \ge 0$ *на полусегменте* $(a < x \le b]$, *и существует предел*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда: 1) если $k \ne 0$, *то интегралы (3) и (4) сходятся или расходятся одновременно; 2) если* $k = 0$, *то из сходимости интеграла (3) следует сходимость интеграла (4), а из расходимости интеграла (4) следует расходимость интеграла (3).*

3. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле второго рода.

Теорема 11 (о замене переменной).*Пусть:*
1) функция $f(x)$ *непрерывна на полусегменте* $(a < x \le b]$, *и* a *- особая точка* $f(x)$*;*
2) функция $\varphi(t)$ *имеет непрерывную положительную производную* $\varphi'(t)$ *на сегменте* $[\alpha \le t \le \beta]$, *и выполнены равенства* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда несобственные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \quad \textit{и} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости они равны:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Замечание 1. Аналогичная теорема имеет место, если условие 2) теоремы 11 заменить условием: функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную отрицательную производную на сегменте $\alpha \leq t \leq \beta$ и выполнены равенства $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$.

Замечание 2. Теорема 11 остаётся в силе, если в условии 2) положить $\beta = +\infty$, т.е. если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную положительную производную на полупрямой $[\alpha \leq t < \infty)$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = b$. В этом случае в результате замены переменной $x = \varphi(t)$, $\alpha \leq t < \infty$ несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$ переходит в несобственный интеграл $\int_\alpha^\infty f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, который можно представить в виде суммы двух несобственных интегралов:

$$\int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + \int_\gamma^\infty f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

первый из которых является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $(\alpha, \gamma]$, а второй - несобственным интегралом первого рода по полупрямой $[\gamma, +\infty)$. В качестве γ можно взять любое число из интервала (α, β).

Замечание 3. Теорема, о которой идёт речь в замечании 1, также остаётся в силе, если $\beta = +\infty$. Сформулируйте эту теорему для случая $\beta = +\infty$.

Теорема 12 (об интегрировании по частям). *Пусть:*
1) функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на полусегменте $(a, b]$ непрерывные производные $f'(x)$ и $g'(x)$;
2) существует $\lim_{x\to a+0} f(x)g(x)$.

Тогда: если оба интеграла

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \quad \textit{и} \quad \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

являются несобственными, то они сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости имеет место равенство (формула интегрирования по частям)

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx;$$

если же один из интегралов является собственным, то второй (несобственный) интеграл обязательно сходится, и формула интегрирования по частям остаётся в силе.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, что называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$: по полусегменту $(a, b]$; по полусегменту $[a, b)$; по интервалу (a, b).

2. Приведите пример сходящегося несобственного интеграла второго рода: по полусегменту $(a, b]$; по полусегменту $[a, b)$; по интервалу (a, b).

3. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода: по полусегменту $(a, b]$; по полусегменту $[a, b)$; по интервалу (a, b).

4. Сформулируйте теорему о признаке сравнения для несобственных интегралов второго рода (теорема 9). Докажите, что если неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$ выполнены не на всём полусегменте $(a, b]$, а только в некоторой правой полуокрестности точки a, то утверждение теоремы остаётся в силе.

5. Сформулируйте теорему о признаке сравнения в предельной форме для несобственных интегралов второго рода (теорема 10). Докажите эту теорему, опираясь на теорему 9.

6. Сформулируйте теорему 11 о замене переменной в несобственном интеграле второго рода и аналогичную теорему, о которой идёт речь в замечании 2 после теоремы 11.

7. В интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}$$

сделайте замену переменной $\cos x = t$. Укажите промежуток изменения t и обоснуйте сходимость интеграла, полученного в результате этой замены переменной.

8. Сформулируйте теорему о замене переменной в несобственном интеграле второго рода, в результате которой интеграл переходит в несобственный интеграл по полупрямой (см. замечание 2 после теоремы 11).

9. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для несобственных интегралов второго рода.

Примеры решения задач

1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (b > a, \alpha > 0)$$

в зависимости от числа α.

$\triangle$ Особой точкой подынтегральной функции на сегменте $[a, b]$ является точка $x = a$. По определению

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\delta\to+0} \int_{a+\delta}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\delta\to+0} \begin{cases} \left.\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_{a+\delta}^b, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \ln(x-a)\Big|_{a+\delta}^b, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha}\right], & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \ln\frac{b-a}{\delta}, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{если } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

Таким образом, предел $\lim_{\delta\to+0} \int_{a+\delta}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ равен $\frac{(b-a)^\alpha}{1-\alpha}$, если $0 < \alpha < 1$, и не существует, если $\alpha \geq 1$. Следовательно, несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$. $\blacktriangle$

Замечание 4. Аналогично доказывается, что несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (b > a, \alpha > 0)$$

сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Замечание 5. Интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (b > a, \alpha > 0)$$

являются *эталонными* несобственными интегралами при применении признаков сравнения (теоремы 9 и 10) ко многим несобственным интегралам вида $\int_a^b f(x)dx$ в случае, когда точка a или точка b является (единственной) особой точкой функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Из теорем 9 и 10 и примера 1 следует, что если a - особая точка функции $f(x)$, и в некоторой правой полуокрестности точки a выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq cg(x),$$

либо существует

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{5}$$

где $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$, c - положительное число и $0 < \alpha < 1$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, и притом абсолютно; если же в правой полуокрестности точки a выполнено неравенство

$$f(x) \geq cg(x),$$

либо существует не равный нулю предел (5), где $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$, $c > 0$ и $\alpha \geq 1$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

В частности, если

$$f(x) \sim g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha} \quad \text{при} \quad x \to a+0$$

(знак $\sim$ означает эквивалентность функций, т.е. $\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$), то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Аналогичные утверждения имеют место в случае, когда точка b - единственная особая точка функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Сформулируйте эти утверждения.

2. Доказать, что несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6}$$

сходится, и найти его значение.

$\triangle$ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет на сегменте $[0;1]$ единственную особую точку $x = 1$. Для доказательства сходимости интеграла применим признак сравнения в предельной форме (см. замечание 5 перед данным примером), взяв в качестве функции сравнения функцию $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ (здесь $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Так как существует предел

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2},$$

то интеграл (6) сходится.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет на полусегменте $[0,1)$ первообразную

$$F(x) = \arcsin x.$$

По формуле Ньютона - Лейбница получаем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \ \blacktriangle$$

3. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}. \tag{7}$$

$\triangle$ Точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции, поэтому представим данный интеграл в виде суммы интегралов

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} =: I_1 + I_2,$$

первый из которых является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $(0,1]$, а второй - несобственным интегралом первого рода по полупрямой $[1,+\infty)$.

Так как

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \ \text{ при } \ x \to 0,$$

то интеграл I_1 сходится (см. замечание 5 после примера 1), а так как

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \ \text{ при } \ x \to +\infty,$$

то интеграл I_2 также сходится (см. замечание 1 после примера 1 в §1).

Следовательно, интеграл (7) сходится. ▲

4. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

в зависимости от числа α.

△ Так как $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то подынтегральная функция $\frac{\sin x}{x^\alpha}$ имеет особую точку $x = 0$, если $\alpha > 1$. Поэтому представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx =: I_1 + I_2.$$

Интеграл I_2 является несобственным интегралом первого рода. Он сходится абсолютно, если $\alpha > 1$, сходится условно, если $0 < \alpha \le 1$, и расходится, если $\alpha \le 0$ (см. пример 6 в §1).

Интеграл I_1 является определённым (собственным) интегралом, если $\alpha \le 1$, и несобственным интегралом второго рода, если $\alpha > 1$, а поскольку подынтегральная функция $\frac{\sin x}{x^\alpha} > 0$ на полусегменте $(0, 1]$, то сходимость интеграла I_1 гарантирует его абсолютную сходимость. Для исследования на сходимость интеграла I_1 воспользуемся признаком сравнения в предельной форме (см. замечание 5 после примера 1).

Так как

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}} \ \text{ при } \ x \to +0,$$

и так как интеграл $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$ сходится при $0 < \alpha - 1 < 1$, т.е. при $1 < \alpha < 2$, и расходится при $\alpha \ge 2$, то и интеграл I_1 сходится (абсолютно) при $1 < \alpha < 2$ и расходится при $\alpha \ge 2$.

Объединяя результаты, полученные для интегралов I_1 и I_2, приходим к выводу: интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится абсолютно, если $1 < \alpha < 2$, сходится условно, если $0 < \alpha \le 1$, и расходится, если $\alpha \le 0$ или $\alpha \ge 2$. ▲

5. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-x}}} dx. \tag{8}$$

△ Проведём исследование двумя способами.

1-й способ. Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}$$

имеет единственную особую точку $x = 0$ на сегменте $[0, \ln 2]$. Заметим, что

$$\sqrt{1-e^{-x}} = \sqrt{1-(1-x+o(x))} = \sqrt{x+o(x)} \sim \sqrt{x} \;\text{ при }\; x \to +0,$$

а поскольку $e^{-x} \sim 1$ при$x \to +0$, то естественно воспользоваться признаком сравнения, взяв в качестве функции сравнения функцию $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (см. замечание 5 после примера 1). Так как

$$f(x) \sim g(x) \;\text{ при }\; x \to +0,$$

и интеграл $\int_0^{\ln 2} g(x)dx = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то интеграл (8) также сходится.

2-й способ. Сделаем в интеграле (8) замену переменной, положив $1 - e^{-x} = t$, т.е.

$$x = -\ln(1-t), \;\; 0 \le t \le \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Эта замена переменной правомерна, поскольку все условия теоремы 11 (о замене переменной) выполнены: функция $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}$ непрерывна на полусегменте $0 < x \le \ln 2$, функция $\varphi(t) = -\ln(1-t)$ имеет на сегменте $[0 \le t \le \frac{1}{2}]$ непрерывную положительную производную $\varphi'(t) = \frac{1}{1-t}$, и выполнены равенства $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = \ln 2$.

В результате замены переменной (9) интеграл (8) переходит в интеграл (учитываем, что $e^{-x}dx = dt$)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

который сходится, и его можно вычислить по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, согласно теореме 11, интеграл (8) также сходитс и равен $\sqrt{2}$.$\blacktriangle$

6. Исследовать на сходимость интеграл
$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}}dx. \tag{10}$$
△ Очевидная оценка для подынтегральной функции
$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \le \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad 0 < x \le 1$$
не даёт ответа на вопос о сходимости интеграла (10), поскольку интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ расходится.

Сделаем в интеграле (10) замену переменной $x = \frac{1}{t}$, $1 \le t < \infty$ (убедитесь в правомерности этой замены переменной, см. замечание 3 после теоремы 11). При этой замене переменной интеграл (10) переходит в интеграл (учитываем, что $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sin\frac{1}{x} = \sin t$, $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = t^{\frac{3}{2}}$):
$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$
Полученный интеграл сходится условно. Следовательно и интеграл (10) сходится условно.▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

10. Найдите особые точки подынтегральной функции, а затем, используя определения сходящегося и расходящегося несобственных интегралов второго рода, исследуйте на сходимость интегралы (для сходящегося интеграла найдите его значение):

$$\text{а)}\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}};\ \ \text{б)}\ \int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3};\ \ \text{в)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx;$$

$$\text{г)}\ \int_0^1 \ln x dx;\ \ \text{д)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x};\ \ \text{е)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx.$$

11. Исследуйте на сходимость интегралы:

$$\text{а)}\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}};\ \ \text{б)}\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}};\ \ \text{в)}\ \int_0^2 \frac{dx}{1-x^2};$$

г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$; д) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}$; е) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}dx$;

ж) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; з) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$; и) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+\sin x}}$.

12. Установите, для каких значений α интеграл является несобственным, и исследуйте его на сходимость в зависимости от α:

а) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$; в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x dx$;

г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}dx$; д) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha x \cdot \cos^\alpha x}$; е) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\alpha dx$;

13. Исследуйте интеграл на сходимость (абсолютную или условную) в зависимости от α, если $\alpha > 0$:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^\alpha}dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}dx$;

в) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x dx}{x^\alpha+\sin x}$; г) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{(x^\alpha+\sin x)^2}$.

14. Докажите, что интеграл

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$$

сходится для любого натурального n и вычислите I_n.

§3. Кратные несобственные интегралы

Основные понятия и эталонные интегралы

Как и в случае одномерных интегралов несобственный кратный интеграл - это либо интеграл от неограниченной функции, либо интеграл по неограниченной области, либо одновременно и то, и другое.

1. Интеграл от неограниченной функции. Начнём с понятия двойного несобственного интеграла от неограниченной функции.

Пусть G - квадрируемая область на плоскости (x, y), и пусть в области G (за исключением, быть может, точки $M_0(x_0, y_0)$) определена функция $f(x, y)$, неограниченная в любой окрестности точки M_0. Точка M_0 называется в этом случае *особой точкой* функции $f(x, y)$. Обозначим через ω_δ произвольную квадрируемую окрестность точки M_0, диаметр которой равен δ. Пусть для любой окрестности ω_δ функция $f(x, y)$ интегрируема в области $G - \omega_\delta$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x, y)dxdy$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x, y)dxdy. \tag{1}$$

Можно сказать, что предел (1) - это предел при условии, что окрестность ω_δ стягивается к точке M_0. Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае будем называть его *двойным несобственным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G* и обозначать так же, как обычный двойной интеграл:

$$\iint\limits_{G} f(x, y)dxdy. \tag{2}$$

Если предел (1) существует и не зависит от способа стягивания окрестности ω_δ к точке M_0, то есть если для любой последовательности окрестностей $\{\omega_{\delta_n}\}$, у которой $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, соответствующая числовая последовательность $\{I_n\}$, где $I_n = \iint\limits_{G-\omega_{\delta_n}} f(x, y)dxdy$, имеет один и тот же предел, равный I, то говорят, что *несобственный интеграл (2) сходится и равен*

I; в противном случае говорят, что интеграл (2) *расходится.* По аналогии с одномерными несобственными интегралами интеграл (2) можно назвать *двойным несобственным интегралом второго рода.*

Теорема 13 (необходимое и достаточное условие сходимости интеграла (2) от неотрицательной функции). *Если $f(x, y) \geq 0$ в области G, то для сходимости интеграла (2) необходимо и достаточно, чтобы предел (1) существовал для какого - нибудь одного способа стягивания окрестности ω_δ к точке M_0, т.е. чтобы существовала последовательность окрестностей $\{\omega_{\delta_n}\}$, у которой $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, и соответствующая числовая последовательность $\{I_n\}$ сходится.*

2. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\iint\limits_G \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}} dxdy, \tag{3}$$

где $M_0(x_0, y_0)$ - некоторая внутренняя точка квадрируемой области G, $M(x, y)$ - произвольная точка этой области, $r_{M_0M} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ - расстояние между точками M и M_0, $\alpha > 0$ - фиксированное число.

Так как $\frac{1}{r^\alpha_{M_0M}} \to \infty$ при $M \to M_0$, то M_0 - особая точка подынтегральной функции.

Нетрудно доказать, опираясь на теорему 13, что интеграл (3) сходится, если $0 < \alpha < 2$, и расходится, если $\alpha \geq 2$.

Замечание 1. Аналогично двойному определяются тройной и, вообще, n - кратный несобственный интеграл от неограниченной функции. Как и для двойного интеграла (3) можно доказать, что n - кратный несобственный интеграл

$$\int \underset{G}{\cdots} \int \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}} dx_1 \ldots dx_n \tag{3$'$}$$

(здесь $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ - некоторая внутренняя точка кубируемой области G, $M(x_1, \ldots, x_n)$ - произвольная точка этой области, $r_{M_0M} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots (x_n - x_n^0)^2}$) сходится, если $0 < \alpha < n$, и расходится, если $\alpha \geq n$.

3. Интеграл по неограниченной области. Пусть теперь функция $f(x, y)$ определена в неограниченной области G и интегрируема в любой ограниченной квадрируемой области, содержащейся в области G.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность областей $\{G_n\}$ *монотонно исчерпывает область* G, если все G_n - ограниченные открытые квадрируемые области, причём $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$ $\forall n$ и $U_{n=1}^{\infty} G_n = G$ (через $\overline{G}_n$ здесь обозначено замыкание области G, т.е. объединение области G и её границы).

Введём обозначение

$$I_n = \iint\limits_{G_n} f(x, y) dx dy$$

и рассмотрим числовую последовательность $\{I_n\}$. Если $\lim_{n\to\infty} I_n$ существует и имеет одно и то же значение I для любой последовательности областей $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающей область G, то говорят, что несобственный интеграл от функции $f(x, y)$ по области G *сходится и равен* I; в противном случае говорят, что этот интеграл расходится.

Обозначается несобственный интеграл по неограниченной области G обычным образом:

$$\iint\limits_{G} f(x, y) dx dy. \tag{4}$$

По аналогии с одномерными несобственными интегралами интеграл (4) можно назвать *двойным несобственным интегралом первого рода.*

Теорема 14 (необходимое и достаточное условие сходимости интеграла (4) от неотрицательной функции). *Если $f(x, y) \geq 0$ в неограниченной области G, то для сходимости интеграла (4) необходимо и достаточно, чтобы предел $\lim_{n\to\infty} I_n$ существовал для какой-нибудь одной последовательности областей $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающей область G.*

4. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2 - \omega_a} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0 M}} dx dy, \tag{5}$$

где $\mathbb{R}^2$ - плоскость (x, y), ω_a - круг радиуса a с центром в фиксированной точке $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ - произвольная точка области $\mathbb{R}^2 - \omega_a$, $r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-Y_0)^2}$ - расстояние между точками M и M_0, $\alpha > 0$ - фиксированное число.

Нетрудно доказать, опираясь на теорему 14, что интеграл (5) сходится, если $\alpha > 2$, и расходится, если $0 < \alpha \leq 2$.

Замечание 2. Аналогично двойному определяется n - кратный ($n = 3, 4, \ldots$) несобственный интеграл по неограниченной n - мерной области. Как и для двойного интеграла (5) можно доказать, что n - кратный несобственный интеграл

$$\int \underset{\mathbb{R}^n - \omega_a}{\cdots} \int \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}} dx_1 \ldots dx_n \qquad (5')$$

(здесь $\mathbb{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство, ω_a - n-мерный шар радиуса a с центром в фиксированной точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $M(x_1, \ldots x_n)$ - произвольная точка области $\mathbb{R}^n - \omega_a$) сходится, если $\alpha > n$, и расходится, если $0 < \alpha \leq n$.

Замечание 3. При исследовании на сходимость кратных несобственных интегралов часто применяют признак сравнения, используя интегралы (3), (3') и (5), (5') в качестве *эталонных интегралов*, т.е. сравнивают подынтегральную функцию с функцией $\frac{c}{r^{\alpha}_{M_0M}}$ (c и α - подходящие положительные числа).

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, что называется двойным несобственным интегралом от неограниченной функции по квадрируемой области. В каком случае этот интеграл называется сходящимся и в каком - расходящимся?

2. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии сходимости двойного несобственного интеграла от неограниченной неотрицательной функции.

3. Докажите, опираясь на теорему 13, что интеграл (3) сходится, если $0 < \alpha < 2$, и расходится, если $\alpha \geq 2$.

4. Сформулируйте признак сравнения для двойных несобственных интегралов второго рода, основанный на сравнении с эталонным интегралом (3).

5. Объясните, что называется двойным несобственным интегралом по неограниченной области. В каком случае этот интеграл называется сходящимся и в каком - расходящимся?

6. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии сходимости двойного несобственного интеграла от неотрицательной функции по неограниченной области.

7. Докажите, опираясь на теорему 2, что интеграл (5) сходится, если $\alpha > 2$, и расходится, если $0 < \alpha \leq 2$.

8. Сформулируйте признак сравнения для двойных несобственных интегралов первого рода, основанный на сравнении с эталонным интегралом (5).

Примеры решения задач

1. Пусть $\{G_n, \ \ n = 1, 2, \ldots\}$ и $\{\tilde{G}_k, \ \ k = 1, 2, \ldots\}$ - две последовательности областей, монотонно исчерпывающих неограниченную область G. Доказать, что для любой области G_n найдётся k_n, такое, что

$$G_n \subset \tilde{G}_k \ \ \forall\, k \geq k_n.$$

$\triangle$ Согласно определению 1 все области G_n и $\tilde{G}_k$ являются ограниченными открытыми квадрируемыми областями, причём

$$\overline{G}_n \subset G_{n+1} \ \ \forall n, \ \ U_{n=1}^{\infty} G_n = G,$$

$$\tilde{G}_k \subset \tilde{G}_{k+1} \ \ \forall k, \ \ U_{k=1}^{\infty} \tilde{G}_k = G.$$

Из этих соотношений следует, что $\overline{G}_n \subset G = U_{k=1}^{\infty} \tilde{G}_k$, т.е. замкнутая ограниченная область $\overline{G}_n$ содержится в области G, являющейся объединением бесконечного числа открытых областей $\tilde{G}_k$. В таком случае говорят, что множество областей $\{G_k, \ \ k = 1, 2, \ldots\}$ образует покрытие области $\overline{G}_n$. Воспользуемся утверждением, которое называется *леммой Гейне - Бореля*:
Из любого покрытия ограниченной замкнутой области открытыми областями можно выделить конечное подпокрытие.

В силу этой леммы можно указать конечное число областей $\tilde{G}_k$, таких, что замкнутая область $\overline{G}_n$, а, значит, и открытая область G_n, содержится в объединении указанных областей. Обозначим наибольший номер этих областей $\tilde{G}_k$ через k_n. Так как

$\tilde{G}_k \subset \tilde{G}_{k+1}\ \ \forall k$, то объединение указанных областей совпадает с $\tilde{G}_{k_n}$. Итак, $G_n \subset \tilde{G}_{k_n}$ и, следовательно,

$$G_n \subset \tilde{G}_k\ \ \forall k \geq k_n.\blacktriangle$$

2. Доказать теорему 14.

$\triangle$ Пусть $f(x,y) \geq 0$ в неограниченной области G и пусть для последовательности областей $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающей область G, существует

$$\lim_{n\to\infty} I_n = I, \tag{6}$$

где $I_n = \iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy$. Требуется доказать, что для любой другой последовательности областей $\{\tilde{G}_k\}$, монотонно исчерпывающей область G, справедливо такое же равенство

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{I}_k = I, \tag{7}$$

где $\tilde{I}_k = \iint\limits_{\tilde{G}_k} f(x,y)dxdy$. Так как $G_n \subset G_{n+1}\ \ \forall n$, $\tilde{G}_k \subset \tilde{G}_{k+1}\ \ \forall k$ (согласно определению 1) и $f(x,y) \geq 0$ в области G (по условию теоремы), то $I_n \leq I_{n+1}\ \ \forall n$ и $\tilde{I}_k \leq \tilde{I}_{k+1}\ \ \forall k$, т.е. последовательности $\{I_n\}$ и $\{\tilde{I}_k\}$ - неубывающие. Кроме того, в силу (6) $I_n \leq I\ \ \forall n$ и в силу утверждения, доказанного в примере 1, $\forall k\ \ \exists n_k$, такое, что $\tilde{G}_k \subset G_{n_k}$, и поэтому $\tilde{I}_k \leq I_{n_k} \leq I\ \ \forall k$. Таким образом, последовательность $\{\tilde{I}_k\}$ неубывающая и ограниченная. Следовательно, существует $\lim_{k\to\infty} \tilde{I}_k = \tilde{I}$, причём $\tilde{I}_k \leq \tilde{I} \leq I$.

С другой стороны, так как $\forall n\ \ \exists k_n$, такое, что $G_n \subset \tilde{G}_{n_k}$ (согласно утверждению из примера 1), то $I_n \leq \tilde{I}_{k_n} \leq \tilde{I}\ \ \forall n$, и, следовательно, $I \leq \tilde{I}$.

Из неравенств $\tilde{I} \leq I$ и $I \leq \tilde{I}$ следует, что $\tilde{I} = I$, и, значит, справедливо равенство (7), что и требовалось доказать.$\blacktriangle$

3. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в квадрируемой области G за исключением внутренней точки $M_0(x_0, y_0)$ этой области, которая является особой точкой функции $f(x,y)$, и пусть несобственный интеграл $\iint\limits_G |f(x,y)|dxdy$ сходится (в таком случае говорят, что интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ *сходится абсолютно*. Доказать, что интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ также сходится.

$\triangle$ Обозначим через ω_δ произвольную окрестность точки M_0, диаметр которой равен δ, а через Ω_δ - круг радиуса δ с центром в точке M_0. Требуется доказать, что предел

$$\lim_{\delta\to 0}\iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x,y)dxdy \tag{8}$$

существует и не зависит от способа стягивания окрестности ω_δ к точке M_0.

Введём функцию

$$F(\delta)=\iint\limits_{G-\Omega_\delta} f(x,y)dxdy$$

и докажем сначала, что существует $\lim_{\delta\to 0} F(\delta)$. Функция $F(\delta)$ определена в правой полуокрестности точки $\delta = 0$. Докажем, что в этой точке она удовлетворяет условию Коши, т.е. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_0 > 0$, такое, что $\forall\delta_1$ и δ_2 из интервала $(0,\delta_0)$ выполняется неравенство

$$|F(\delta_1) - F(\delta_2)| < \varepsilon.$$

Отсюда последует существование предела $F(\delta)$ при $\delta \to 0$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмём такое δ_0, для которого выполнено неравенство

$$\iint\limits_{\Omega_{\delta_0}} |f(x,y)|dxdy < \varepsilon.$$

Существование такого δ_0 следует из сходимости интеграла $\iint\limits_{G} |f(x,y)|dxdy$.

Если $0 < \delta_1 < \delta_0$ и $0 < \delta_2 < \delta_0$, то справедливы соотношения (через K обозначаем кольцо, ограниченное окружностями радиусов δ_1 и δ_2):

$$|F(\delta_1) - F(\delta_2)| = \Big|\iint\limits_{G-\Omega_{\delta_1}} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{G-\Omega_{\delta_2}} f(x,y)dxdy\Big| =$$

$$= \Big|\iint\limits_{K} f(x,y)dxdy\Big| \le \iint\limits_{\Omega_{\delta_0}} |f(x,y)|dxdy < \varepsilon,$$

т.е. функция $F(\delta)$ удовлетворяет в точке $\delta = 0$ условию Коши, и, следовательно, существует

$$\lim_{\delta\to 0} F(\delta) = I. \tag{9}$$

Докажем теперь, что предел (8) также равен I при любом способе стягивания окрестности ω_δ к точке M_0. Так как $\omega_\delta \subset \Omega_\delta$, то

$$\iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G-\Omega_\delta} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega_\delta-\omega_\delta} f(x,y)dxdy. \tag{10}$$

Согласно (9) предел первого слагаемого в правой части (10) при $\delta \to 0$ равен $\lim_{\delta\to 0} F(\delta) = I$, а для второго слагаемого справедлива оценка

$$|\iint\limits_{\Omega_\delta-\omega_\delta} f(x,y)dxdy| \le \iint\limits_{\Omega_\delta} |f(x,y)|dxdy. \tag{11}$$

Так как правая часть в (11) стремится к нулю при $\delta \to 0$ (в силу сходимости интеграла $\iint\limits_G |f(x,y)|dxdy$), то и левая часть, а, значит, второе слагаемое в правой части (10) также стремится к нулю при $\delta \to 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в равенстве (10), получаем, что предел (8) равен I, чпо и требовалось доказать.▲

4. Доказать утверждение (*признак сравнения*): если в неограниченной области G функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$0 \le f(x,y) \le g(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{12}$$

то из сходимости интеграла

$$\iint\limits_G g(x,y)dxdy \tag{13}$$

следует сходимость интеграла

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy, \tag{14}$$

а из расходимости интеграла (14) следует расходимость интеграла (13).

$\triangle$ Пусть интеграл (13) сходится и равен I. Рассмотрим какую-нибудь последовательность областей $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающую область G. Согласно определению сходящегося интеграла числовая последовательность $\{I_n\}$, где $I_n = \iint\limits_{G_n} g(x,y)dxdy$, сходится к числу I, а так как $g(x,y) \geq 0$ в области G, то последовательность $\{I_n\}$ - неубывающая, и $I_n \leq I \ \ \forall n$.

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{I}_n\}$, где $\tilde{I}_n = \iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy$. В силу неравенств (12) эта последовательность также неубывающая и ограниченная, поскольку $\tilde{I}_n \leq I_n \leq I \ \ \forall n$. Следовательно, последовательность $\{\tilde{I}_n\}$ сходится. Отсюда по теореме 14 следует, что интеграл (14) сходится.

Если интеграл (14) расходится, то неубывающая последовательность $\{\tilde{I}_n\}$ расходится ($\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_n = +\infty$), а так как $I_n \geq \tilde{I}_n \ \ \forall n$, то последовательность $\{I_n\}$ также расходится, и, значит, расходится интеграл (13).$\blacktriangle$

5. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint\limits_{G} \frac{g(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy \tag{15}$$

в зависимости от числа $\alpha > 0$, если

$$G = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\},$$

а $g(x,y)$ - непрерывная в области G функция, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < m \leq g(x,y) \leq M, \ \ (x,y) \in G. \tag{16}$$

$\triangle$ Введём обозначения

$$f(x,y) = \frac{g(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}; \ \ r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

В силу (16) справедливы неравенства

$$\frac{m}{r^{2\alpha}} \leq f(x,y) \leq \frac{M}{r^{2\alpha}}, \ \ (x,y) \in G.$$

Эталонный интеграл $\iint\limits_G \frac{dxdy}{r^{2\alpha}}$ сходится, если $2\alpha > 2$, т.е. $\alpha > 1$, и расходится, если $0 < 2\alpha < 2$, т.е. $0 < \alpha < 1$ (см. (5)). Следовательно, по признаку сравнения (см. пример 4) интеграл (15) сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $0 < \alpha \leq 1$. ▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

15. Докажите теорему 13.

16. Докажите, что если двойной несобственный интеграл по неограниченной области G сходится абсолютно (т.е. сходится интеграл $\iint\limits_G |f(x,y)|dxdy$), то интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ также сходится.

17. Докажите утверждение *(признак сравнения)*: если в квадрируемой области G функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны, за исключением точки $M_0(x_0, y_0)$, которая является особой точкой этих функций, и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq f(x,y) \leq g(x,y), \quad (x,y) \in G, \quad (x,y) \neq (x_0, y_0),$$

то из сходимости интеграла

$$\iint\limits_G g(x,y)dxdy \tag{17}$$

следует сходимость интеграла

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy, \tag{18}$$

а из расходимости интеграла (18) следует расходимость интеграла (17).

18. Исследуйте на сходимость интеграл

$$\iint\limits_G \frac{g(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy$$

в зависимости от числа $\alpha > 0$, если

$$G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

а функция $g(x,y)$ непрерывна в области G и удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \le g(x,y) \le M, \quad (x,y) \in G.$$

19. Докажите сходимость следующих интегралов и вычислите их ($\mathbb{R}^2$ - плоскость (x,y)):

а) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$; б) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$;

в) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$;

г) $\iint\limits_{G} e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}dxdy, \ \ G = \{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \ge 1\}$;

д) $\iint\limits_{G} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \ \ G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$;

е) $\iint\limits_{G} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+y^2}}dxdy, \ \ G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le x\}$;

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. а) Расходится; б) сходится и равен 2; в) расходится; г) сходится и равен $\ln\sqrt{3}$; д) сходится и равен $\frac{1}{2}$; е) сходится и равен $\frac{1}{2}$; ж) сходится и равен π; з) расходится.

3. а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) сходится; ж) сходится; з) сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \le 1$; и) сходится при $\alpha < -2$, расходится при $\alpha \ge -2$; к) сходится $\forall\alpha \in (-\infty; +\infty)$; л) расходится.

4. а) сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \le 1$, расходится при $\alpha \le 0$; б) сходится условно; в) сходится условно; г) расходится; д) сходится абсолютно при $\alpha < -1$, сходится условно при $-1 \le \alpha < 2$, расходится при $\alpha \ge 2$.

9. Например, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n-1}, & 2n-1 \le x < 2n, \ \ n = 1,2,\ldots, \\ -\frac{1}{2n-1}, & 2n-1 \le x < 2n+1, \ \ n = 1,2,\ldots. \end{cases}$

10. а) Особая точка $x = 1$, интеграл сходится и равен 2; б) особая точка $x = 1$, интеграл расходится; в) особая точка $x = 0$, интеграл сходится и равен 2; г) особая точка $x = 0$, интеграл сходится и равен -1; д) особая точка $x = \frac{\pi}{2}$, интеграл расходится; е) особая точка $x = 0$, интеграл расходится.

11. а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится; д) сходится; е) сходится; ж) сходится; з) сходится; и) сходится.

12. а) $-\infty < \alpha < +\infty$; сходится при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \leq -1$; б) $\alpha > 1$; сходится при $1 < \alpha < 2$, расходится при $\alpha \geq 2$; в) $\alpha < 1$; сходится при $0 < \alpha < 1$, расходится при $\alpha \leq 0$; г) $\alpha > 1$; сходится при $1 < \alpha < 2$; расходится при $\alpha \geq 2$; д) $\alpha > 0$; сходится при $0 < \alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$; е) $\alpha < 0$; сходится при $-1 < \alpha < 0$, расходится при $\alpha \leq -1$.

13. а) сходится абсолютно при $0 < \alpha < 1$, сходится условно при $1 \leq \alpha < 2$, расходится при $\alpha \geq 2$; указание: сделать замену переменной $x = \frac{1}{t}$; б) сходится абсолютно при $0 < \alpha < 1$, сходится условно при $1 \leq \alpha < 2$, расходится при $\alpha \geq 2$; указание: сделать замену переменной $x = \frac{1}{t}$; в) сходится условно при $0 < \alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$; г) сходится абсолютно при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, сходится условно при $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, расходится при $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ и при $\alpha \geq 1$.

14. $I_n = (-1)^n \cdot n!$.

18. Сходится при $0 < \alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$.

19. а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{6\pi}{e}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) π.

Подписано к печати . . . 2016 г.
Тираж 100 экз. Заказ № . . ..
Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета