ГЛАВА I
Абстрактная теорема Пикара

ЛЕКЦИЯ 1
Абстрактные функции

§ 1. Абстрактные функции. Непрерывность, предел

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Для простоты будем считать это пространство вещественным. В качестве простого модельного примера на первых порах можно иметь в виду $B = \mathbb{R}^2$ с обычной евклидовой нормой. Однако следует иметь в виду, что в наиболее интересном для нас случае пространство B будет бесконечномерным, что повлечёт свои характерные черты, не имеющие аналогов в конечномерном и скалярном случаях. (Сказанное, конечно, не противоречит применимости всех изложенных результатов к случаю $B = \mathbb{R}$.)

Определение 1. *Абстрактной функцией* будем называть функцию $x(t)$ числового аргумента t со значениями в банаховом пространстве B.

Как правило, в дальнейшем областью определения функции будет числовой промежуток $\mathcal{T}$, так что мы будем рассматривать функции

$$x : \mathcal{T} \to B. \tag{1}$$

Можно проверить (задача 1), что для каждого фиксированного $\mathcal{T}$ множество функций (1) образует линейное пространство (вещественное, если пространство B вещественное), если положить

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t),$$
$$(\lambda x)(t) = \lambda x(t).$$

На абстрактные функции переносятся многие понятия теории обычных вещественных функций. Дадим соответствующие определения.

Определение 2. Функция $x(t)$ называется *ограниченной на множестве* $\mathcal{T}$, если

$$\exists M > 0 \;\; \forall t \in \mathcal{T} \;\; \|x(t)\| < M.$$

Определение 3. Функция $x(t)$, определённая на промежутке $\mathcal{T}$, называется *непрерывной в точке* $t_0 \in \mathcal{T}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T} \;\; \|x(t) - x(t_0)\| < \varepsilon.$$

Замечание 1. В граничных точках промежутка $\mathcal{T}$, принадлежащих ему (если таковые имеются), понятие непрерывности автоматически переходит в понятие односторонней непрерывности.

Определение 4. Функция $x(t)$ называется *непрерывной на промежутке* $\mathcal{T}$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Определение 5. Говорят, что функция $x(t)$, определённая на промежутке $\mathcal{T}$, имеет предел $x_0 \in B$ в точке $t_0 \in \overline{\mathcal{T}}$[1], если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall t \in \big((t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)\big) \cap \mathcal{T} \;\; \|x(t) - x_0\| < \varepsilon.$$

Замечание 2. Как и в случае числовых функций, может оказаться так, что $x(t)$ не имеет предела в точке t_0, однако имеет в ней один или оба односторонних предела. (Соответствующие определения рекомендуется сформулировать самостоятельно.) Кроме того, понятия обычного и одностороннего пределов сливаются в одно, если функция $x(t)$ определена лишь в одной проколотой полуокрестности точки t_0.

На случай абстрактных функций обобщаются утверждения о пределе и непрерывности суммы и разности функций, о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке t_0 или имеющей в ней конечный предел[2], а также известные свойства функций, непрерывных на отрезке: их ограниченность, достижение точных граней[3] и равномерная непрерывность. (Доказательство соответствующих утверждений входит в задачи.) Что касается умножения, то здесь ситуация несколько сложнее. Дело в том, что в произвольном банаховом пространстве умножение элементов не определено. Однако определено умножение на число и «умножение» линейного оператора на элемент. Кроме того, само рассматриваемое пространство может оказаться банаховой алгеброй, в которой умножение элементов определено. Чтобы описать все эти ситуации, рассмотрим некоторые банаховы пространства B_i, $i = 1, 2, 3$, и предположим, что на $B_1 \times B_2$ определена операция

$$(x, y) \mapsto xy \equiv x \cdot y \in B_3 \quad (x \in B_1,\, y \in B_2),$$

причём $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, x_1, x_2 \in B_1$, $\forall y, y_1, y_2 \in B_2$

1) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$;

2) $(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y$;

3) $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$;

4) $\|xy\|_{B_3} \leqslant \|x\|_{B_1} \|y\|_{B_2}$.

Легко видеть, что для перечисленных ранее «умножений» свойства 1)—4) выполняются. Всюду далее под умножением мы будем понимать операцию с описанными свойствами.

Теорема 1. Пусть функции $x(t)$ со значениями в B_1 и $y(t)$ со значениями в B_2 определены в некоторой окрестности (проколотой окрестности) точки t_0, а умножение между пространствами B_1 и B_2 обладает свойствами 1)—4). Тогда если эти функции непрерывны в точке t_0, то и

[1] Имеется в виду замыкание промежутка $\mathcal{T}$.

[2] О бесконечном пределе естественно говорить, если $\lim_{t \to t_0} \|y(t)\| = +\infty$.

[3] Разумеется, речь идёт о точных гранях *числовой* функции $\|x(t)\|$.

их произведение непрерывно (если $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_1$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_1$, то $\lim_{t\to t_0} x(t)y(t) = x_1 y_1$). (Аналогичное утверждение верно для полуокрестностей.)

Нам будет важен случай, когда первый сомножитель — операторный или числовой.

§ 2. Дифференцирование абстрактных функций

Определение 6. Пусть функция $x(t)$ определена на промежутке $\mathcal{T}$, $t_0 \in \mathcal{T}$. Если существует предел

$$x_1 = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}(x(t) - x(t_0)),$$

он называется *производной* функции $x(t)$ в точке t_0. (В случае одностороннего предела говорят о соответствующей *односторонней* производной.)

Замечание 3. Как и в случае числовых функций, $x(t)$ может не иметь производной в точке t_0, но иметь одну или обе односторонние производные.

Пользуясь свойствами пределов, нетрудно доказать свойства дифференцирования:
1) $(x+y)' = x' + y'$;
2) $(xy)' = x'y + xy'$.
Частными случаями второго свойства является правило вынесения постоянного числового или постоянного операторного множителя за знак дифференцирования, при этом оператор может быть линейным функционалом:

$$(\lambda \cdot x(t))' = \lambda \cdot x'(t), \quad (A \cdot x(t))' = A \cdot x'(t), \quad (\langle f, x(t)\rangle)' = \langle f, x'(t)\rangle .$$

§ 3. Интегрирование (по Риману)

Для построения римановского интеграла по отрезку $[a,b]$ от абстрактных функций действуем стандартным образом. Вводим *разбиение с отмеченными точками* $T = (\{t_i \mid i = \overline{0,N}, a = t_0 < \ldots < t_N = b\}, \{\tau_i \mid i = \overline{1,N}, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]\})$, *диаметр разбиения* $\Delta(T) = \max_{i=\overline{1,N}}(t_i - t_{i-1})$ и *интегральные суммы*

$$S(T,x) = \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) x(\tau_i).$$

Любое разбиение T диаметра δ будем для краткости называть δ-разбиением.

Определение 7. Элемент $I \in B$ называется пределом интегральных сумм $S(T,x)$ функции $x(t)$ при диаметрах разбиения $\Delta(T)$, стремящихся к 0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения T с отмеченными точками при условии $\Delta(T) < \delta$ выполнено неравенство

$$\|S(T,x) - I\| < \varepsilon.$$

Если такой элемент I существует, то он называется *интегралом Римана* от функции $x(t)$ по отрезку $[a,b]$.

На практике нередко удобнее использовать определение «по Гейне».

Определение 8. Элемент $I \in B$ называется пределом интегральных сумм $S(T,x)$ функции $x(t)$ при диаметрах разбиения $\Delta(T)$, стремящихся к 0, если для любой последовательности разбиений $\{T_n\}$ с отмеченными точками при условии $\Delta(T_n) \to 0$ верно $S(T_n,x) \to I$. Если такой элемент I существует, то он называется *интегралом Римана* от функции $x(t)$ по отрезку $[a,b]$.

Эти определения эквивалентны (см. задачу 11).

Докажем важную для нас теорему.

Теорема 2. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция интегрируема по Риману на этом отрезке.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, отметим, что мы не можем ввести аналоги сумм Дарбу, поскольку в банаховом пространстве нет упорядочения. Однако можно рассуждать непосредственно. Мы отдельно сформулируем и докажем две леммы.

Лемма 1. Если $\widetilde{T}$ есть измельчение δ-разбиения T, то при любом выборе отмеченных точек в каждом из этих разбиений

$$\left\|S(\widetilde{T},x) - S(T,x)\right\| \leqslant \omega_x(\delta)(b-a),$$

где

$$\omega_x(\delta) = \sup_{|t_1-t_2|\leqslant\delta,\ t_1,t_2\in[a,b]} \|x(t_1) - x(t_2)\|. \tag{2}$$

Доказательство. Чтобы не смешивать старое и новое разбиение, обозначим точки нового разбиения через s_k, $k=\overline{0,M}$, а соответствующие отмеченные точки — через σ_k, $k=\overline{1,M}$. Рассмотрим один из отрезков $[t_{i-1},t_i]$ старого разбиения T. Предположим, на нём появились новые точки. Для наглядности рассмотрим случай добавления одной точки, т. е. при некоторых i,k

$$s_{k-1} = t_{i-1}, \quad s_k \in (t_{i-1},t_i), \quad s_{k+1} = t_i.$$

Тогда для любого выбора отмеченных точек старого разбиения $\tau_i \in [t_i-1,t_i]$ и нового разбиения $\sigma_k \in [s_{k-1},s_k]$, $\sigma_{k+1} \in [s_k,s_{k+1}]$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|(t_i - t_{i-1})x(\tau_i) - (s_k - s_{k-1})x(\sigma_k) - (s_{k+1}-s_k)x(\sigma_{k+1})\| = \\
&\qquad= \|(s_{k+1} - s_{k-1})x(\tau_i) - (s_k - s_{k-1})x(\sigma_k) - (s_{k+1}-s_k)x(\sigma_{k+1})\| \leqslant \\
&\qquad\leqslant \|(s_{k+1}-s_k)(x(\tau_i) - x(\sigma_{k+1}))\| + \|(s_k - s_{k-1})(x(\tau_i) - x(\sigma_k))\| \leqslant \\
&\qquad\leqslant |s_{k+1}-s_k|\|x(\tau_i) - x(\sigma_{k+1})\| + |s_k - s_{k-1}|\|x(\tau_i) - x(\sigma_k))\| \leqslant \\
&\qquad\leqslant |s_{k+1}-s_k|\omega_x(\delta) + |s_k - s_{k-1}|\omega_x(\delta) = (s_{k+1}-s_{k-1})\omega_x(\delta) = (t_i - t_{i-1})\omega_x(\delta).
\end{aligned}$$

Эту цепочку следует очевидным образом модифицировать, если добавилось больше одной точки разбиения или не добавилось ни одной точки, но поменялась отмеченная точка. Складывая (для этого нам снова нужно неравенство треугольника) подобные неравенства по всем отрезкам исходного разбиения, получаем

$$\left\|S(\widetilde{T},x) - S(T,x)\right\| \leqslant \omega_x(\delta)(t_N - t_0) = \omega_x(\delta)(b-a),$$

что и требовалось. ▲

Лемма 2. Пусть T_1, T_2 — произвольные разбиения диаметров δ и ε соответственно, и пусть на них произвольным образом выбраны отмеченные точки. Тогда

$$\|S(T_1, x) - S(T_2, x)\| \leqslant (\omega_x(\delta) + \omega_x(\varepsilon))(b - a). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$ с произвольным выбором отмеченных точек. Тогда разбиение T_3 есть измельчение каждого из разбиений T_1 и T_2. Следовательно, согласно предыдущей лемме имеем

$$\|S(T_3, x) - S(T_1, x)\| \leqslant \omega_x(\delta)(b - a),$$
$$\|S(T_3, x) - S(T_2, x)\| \leqslant \omega_x(\varepsilon)(b - a),$$

откуда с помощью неравенства треугольника получаем (3). ▲

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\delta_n \to 0$. Построим для каждого δ_n некоторое разбиение T_n с диаметром $\Delta(T_n) \leqslant \delta_n$ и произвольным выбором отмеченных точек. Поскольку $\omega_x(\delta_n) \to 0$ (см. задачу 7), с помощью леммы 2 нетрудно установить, что последовательность соответствующих интегральных сумм фундаментальна. Следовательно, она сходится к некоторому пределу I (пространство B банахово, а значит, полно):

$$\lim_{n\to\infty} S(T_n, x) = I. \tag{4}$$

Таким образом, для совершенно произвольной последовательности разбиений с диаметрами, стремящимися к 0, мы можем установить существование предела интегральных сумм. Чтобы установить, что для двух различных последовательностей разбиений, эти пределы совпадают, «перемешаем» последовательности. В полученной последовательности диаметры разбиений также стремятся к 0; следовательно, предел интегральных сумм обязан существовать. С другой стороны, если бы пределы интегральных сумм для двух исходных последовательностей были различны, то предела для «перемешанной» последовательности уже не было бы.

▲

Перечислим основные свойства интеграла. Для простоты будем рассматривать лишь интегралы от непрерывных функций, поэтому вопрос о существовании интегралов, входящих в тождества, проблемы не представляет.

1. $\int_a^b (x(t) + y(t))dt = \int_a^b x(t)dt + \int_a^b y(t)dt.$
2. $\int_a^b \lambda x(t)dt = \lambda \int_a^b x(t)dt$, $\lambda = \mathrm{const}$.
3. $\int_a^b x(t)dt = \int_a^c x(t)dt + \int_c^b x(t)dt$, $a \leqslant c \leqslant b$.

Для доказательства этих тождеств достаточно рассмотреть некоторые последовательности интегральных сумм с диаметрами, стремящимися к нулю. При этом для левой части тождества 3 следует брать только разбиения, содержащие точку c.

4. $\left\|\int_a^b x(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\|dt$.

Для доказательства этого свойства снова достаточно рассмотреть последовательность разбиений с диаметрами, стремящимися к нулю. Для каждой интегральной суммы аналогичное неравенство следует из неравенства треугольника. Переходя к пределу в числовом неравенстве, получаем требуемое.

5. Для умножения, свойства которого оговорены выше, верны тождества

$$\int_a^b x(t)y\,dt = \int_a^b x(t)dt\,y, \quad \int_a^b xy(t)dt = x\int_a^b y(t)dt.$$

В частности,

$$\int_a^b Ax(t)dt = A\int_a^b x(t)dt, \quad \int_a^b \langle f, x(t)\rangle dt = \left\langle f, \int_a^b x(t)dt \right\rangle.$$

Подчеркнём, что интегралы в левой и правой частях понимаются каждый в «своём» пространстве!

Это свойство предлагается доказать самостоятельно (задача 10).

6 (формула Ньютона—Лейбница). Пусть $x(t) \in C^1([a,b];B)$. Тогда

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b) - x(a). \tag{5}$$

Доказательство. Для любого линейного функционала $f \in B^*$ в силу ранее доказанных свойств дифференцирования и интегрирования имеем

$$\left\langle f, \int_a^b x'(t)dt \right\rangle = \int_a^b \langle f, x'(t)\rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\langle f, x(t)\rangle\,dt = \langle f, x(b)\rangle - \langle f, x(a)\rangle,$$

где последнее равенство следует из формулы Ньютона—Лейбница для числовых функций. Поскольку, таким образом, равенство

$$\left\langle f, \int_a^b x'(t)dt \right\rangle = \langle f, x(b) - x(a)\rangle$$

справедливо для всех $f \in B^*$, то, в силу следствия из теоремы Хана—Банаха, верно и равенство (5).

Следствие. («Ослабленная теорема конечных приращений».) В силу свойств 6 и 4 для всякой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции $x(t)$ имеем

$$\|x(b) - x(a)\| \leqslant \int_a^b \|x'(t)\|dt \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]}\|x'(t)\|.$$

В частности, если производная абстрактной функции существует и равна нулевому элементу всюду на некотором промежутке, то такая функция принимает на этом промежутке постоянное значение.

Замечание 4. Теорема Лагранжа (и Ролля) не переносятся на случай абстрактных функций непосредственно. Рекомендуется самостоятельно привести контример (задача 12).

Интегрируемость непрерывной функции позволяет для любой функции $x(t) \in C([a,b];B)$ рассмотреть *интеграл с переменным верхним пределом*

$$y(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau.$$

7. Пусть $x(t) \in C([a,b];B)$. Тогда

$$y(t) \equiv \int_a^t x(\tau)d\tau \in C^1([a,b];B), \quad \frac{d}{dt}y(t) = x(t),\ t \in [a,b]$$

(как и везде, в очевидных случаях подразумеваются односторонние производные).

Доказательство. Рассмотрим для наглядности лишь правую производную, т. е. $\Delta t > 0$. Имеем

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \int_a^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau - \int_a^t x(\tau)d\tau = \int_t^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) - x(t) = \frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) - \frac{\Delta t}{\Delta t}x(t) = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(x(\tau) - x(t))d\tau.$$

Поскольку функция $x(t)$ непрерывна на $[a,b]$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau \in [t, t+\delta)\ \ \|x(\tau) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Но тогда при всех $0 < \Delta t < \delta$ имеем

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) - x(t)\right\| \leqslant \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\|x(\tau) - x(t)\|d\tau \leqslant \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon d\tau = \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{\Delta t \to +0}\frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) = x(t) \quad \text{или} \quad y'_r(t) = x(t),$$

где индекс r обозначает правую производную. Проведя аналогичные рассуждения для левой производной, получаем в итоге $y'(t) = x(t)$ всюду на $[a,b]$. ▲

Замечание 5. В граничных точках отрезка подразумеваются соответствующие односторонние производные.

Замечание 6. На случай банаховозначных функций теорема о среднем значении для интеграла непосредственным образом не обобщается. Рекомендуется привести контрпример.

§ 4. Лемма о продолжении в точку

Лемма 3. Пусть функция $x(t)$ определена и непрерывно дифференцируема в левой проколотой полуокрестности точки t_0, т. е.

$$x(t) \in C^1((t_0 - \gamma, t_0);B), \tag{6}$$

и пусть существует предел

$$x_1 = \lim_{t \to t_0 - 0} x'(t). \tag{7}$$

Тогда:

1) $x(t)$ непрерывно продолжима до функции $\tilde{x}(t) \in C((t_0 - \gamma, t_0]; B)$;

2) $\tilde{x}'_l(t_0) = x_1$ (где индекс l означает левую производную).

Доказательство. Из существования левого предела производной следует, что эта производная ограничена в некоторой проколотой полуокрестности точки t_0:

$$\exists \zeta \in (0, \gamma], \ \ \exists L > 0 \ \ \forall t \in (t_0 - \zeta, t_0) \ \ \|x'(t)\| \leqslant L. \tag{8}$$

В силу ослабленной формулы конечных приращений отсюда вытекает липшиц-непрерывность функции $x(t)$ на $(t_0 - \zeta, t_0)$ с константой Липшица L. Следовательно, для функции $x(t)$ выполнено условие Коши существования левого предела в точке t_0 и

$$\exists x_0 = \lim_{t \to t_0 - 0} x(t). \tag{9}$$

Положим

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (t_0 - \gamma, t_0); \\ x_0, & t = t_0. \end{cases}$$

Очевидно, построенная функция непрерывна на $(t_0 - \gamma, t_0]$. Осталось доказать, что $\tilde{x}'_l(t_0) = x_1$, т. е. что

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \frac{1}{t - t_0}(x(t) - x_0) = x_1,$$

или

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}(x_0 - x(t_0 - \Delta t)) = x_1.$$

Чтобы воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница в той формулировке, которую мы ранее доказали, введём функцию

$$z(t) = \begin{cases} x'(t), & t \in (t_0 - \zeta, t_0); \\ x_1, & t = t_0. \end{cases}$$

В силу (6) и (7) функция $z(t)$ непрерывна на $(t_0 - \zeta, t_0]$. (Мы пока не можем утверждать, что $\tilde{x}'(t_0) = z(t_0)$; наша цель — доказать это.)

При каждом $\delta \in (0, \zeta)$ можем записать формулу Ньютона—Лейбница

$$\int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 - \delta} z(t) dt = x(t_0 - \delta) - x(t_0 - \Delta t). \tag{10}$$

Устремим δ к нулю. Тогда, с одной стороны, $x(t_0 - \delta) \to x_0$ (см. (9)). С другой стороны,

$$\int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 - \delta} z(t) dt \to \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0} z(t) dt,$$

поскольку

$$\left\|\int_{t_0-\Delta t}^{t_0} z(t)dt - \int_{t_0-\Delta t}^{t_0-\delta} z(t)dt\right\| = \left\|\int_{t_0-\delta}^{t_0} z(t)dt\right\| \leqslant \int_{t_0-\delta}^{t_0} \|z(t)\|dt \leqslant \delta L \to 0.$$

Здесь использованы непрерывность функции $z(t)$, оценка (8) и вытекающая из соотношения (7) вместе с (8) оценка $\|z(t_0)\| \leqslant L$.

Итак, переходя к пределу в обеих частях равенства (10), получаем

$$\int_{t_0-\Delta t}^{t_0} z(t)dt = x_0 - x(t_0 - \Delta t). \tag{11}$$

Тогда из соотношений (10), (11) имеем

$$\int_{t_0-\Delta t}^{t} z(\tau)d\tau = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_0 - \Delta t)$$

при всех $t \in [t_0 - \Delta t, t_0]$, причём подынтегральная функция непрерывна. Применяя теперь в точке $t = t_0$ утверждение о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (свойство 7 интеграла), получаем

$$\tilde{x}_l'(t_0) = z(t_0) = x_1,$$

что и требовалось. ▲

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, что множество абстрактных функций $x : \mathcal{T} \to B$ (при фиксированных $\mathcal{T}$ и B) образует линейное пространство.

2. Сформулировать и доказать критерий Коши существования предела абстрактной функции в точке.

3. Доказать, что функция, имеющая предел в данной точке, ограничена в некоторой её окрестности.

4. Доказать теоремы о непрерывности и пределе суммы абстрактных функций.

5. Сформулировать и доказать теоремы о связи одностороннего и обычного предела, односторонней и обычной непрерывности, односторонней и обычной дифференцируемости.

6. Доказать, что функция, непрерывная на отрезке, ограничена, а её норма достигает своих точных граней. *Указание.* Это можно сделать либо непосредственно, либо сославшись на подходящую теорему лекции о компактности.

7. 1) Доказать, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна. *Указание.* Это можно сделать либо непосредственно, либо сославшись на подходящую теорему лекции о

компактности. 2) Доказать, что *модуль непрерывности* функции x — функция $\omega_x(\delta)$ (см. (2)) — монотонно стремится к 0 при $\delta \to +0$, если $x \in C([a,b];B)$.

8. Доказать теорему 1.

9. 1) Доказать, что абстрактная функция, дифференцируемая в данной точке, непрерывна в ней. 2) Доказать свойства 1, 2 операции дифференцирования.

10. Доказать свойство 5 интеграла.

11. Доказать эквивалентность двух определений интеграла, данных в лекции.

12. Привести контрпримеры, показывающие, что теорема Лагранжа о конечных приращениях и теорема о среднем для интеграла непосредственно не переносятся на случай абстрактных функций.

13. Пусть $C_b(\mathbb{R})$ — пространство ограниченных непрерывных функций одной переменной со стандартной нормой

$$\|y\|_{C_b(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |y(x)|.$$

1) Доказать, что полученное пространство является банаховым.
2) Доказать, что абстрактная функция $f : \mathbb{R}_+ \to C_b(\mathbb{R})$, заданная формулой

$$f(t)(x) := \frac{x^2 t}{1 + x^2 t},$$

разрывна при $t = 0$ и непрерывна при всех $t > 0$.

Замечание 7. Обратите внимание, что функция двух переменных $\tilde{f}(t,x) = \frac{x^2 t}{1+x^2 t}$ непрерывна по совокупности переменных на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

14. Рассмотрим функцию $y : \mathbb{R} \to C[0,1]$, заданную следующим образом:

$$y : t \mapsto g_t(x) \equiv \begin{cases} x \sin \frac{t}{x^2}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Существует ли производная $y'(t)$? Если да, то при каком (каких) t? 2) Непрерывна ли функция $y(t)$ хотя бы в некоторых точках $t \in \mathbb{R}$?