ЛЕКЦИЯ 2
Простейший случай теоремы Пикара

§ 5. Простейший случай теоремы Пикара: автономное уравнение с глобально липшицевой правой частью

Теорема 1. Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Пусть функция $\Phi : B \to B$ определена на всём пространстве B и липшиц-непрерывна, т. е. существует такое число $L > 0$, что при всех $x_1, x_2 \in B$ верно неравенство

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|.$$[1]

Тогда задача Коши (при любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in B$)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \geqslant t_0; \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

глобально и однозначно разрешима, т. е.
1) её решение $x(t) \in C^1([t_0, +\infty); B)$ существует;
2) каково бы ни было другое решение $\tilde{x}(t)$ задачи Коши (1) на промежутке $\mathcal{T} = [t_0, T]$ ($t_0 < T < +\infty$) или $\mathcal{T} = [t_0, T)$ ($t_0 < T \leqslant +\infty$), оно совпадает с $x(t)$ на $\mathcal{T} \cap [t_0, +\infty)$. (Здесь и далее в очевидных случаях подразумеваются односторонние производные.)

Доказательству теоремы предпошлём две леммы.

Лемма 1. Зафиксируем некоторое $h \leqslant \frac{1}{2L}$. Каковы бы ни были $t_1 \geqslant t_0$ и $x_1 \in B$, существует и единственно решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \in [t_1, t_1 + h]; \\ x(t_1) = x_1. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Запишем абстрактное интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [t_1, t_1 + h]. \tag{3}$$

Докажем прежде, что утверждения

(А) «$x(t) \in C^1([t_1, t_1 + h]; B)$ и $x(t)$ является решением задачи Коши (2)»

и

(Б) «$x(t) \in C([t_1, t_1 + h]; B)$ и $x(t)$ является решением интегрального уравнения (3)»

[1] Очевидно, липшиц-непрерывная функция является непрерывной — это нам вскоре понадобится.

равносильны.

(А) $\Longrightarrow$ (Б). Заметим, что если производная функции $x(t)$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_1+h]$, то (в силу уравнения (2)) непрерывна на нём и правая часть уравнения — сложная функция $t \mapsto \Phi(x(t))$. Следовательно, обе части уравнения (2) можно проинтегрировать по t в пределах от t_1 до произвольной точки на отрезке $[t_1, t_1+h]$:

$$\int_{t_1}^{t} x'(\tau)\,d\tau = \int_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\,d\tau, \quad t \in [t_1, t_1+h].$$

Применяя далее к левой части формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\,d\tau, \quad t \in [t_1, t_1+h],$$

что с учётом равенства $x(t_1) = x_1$ из (2) совпадает с (3).

(Б) $\Longrightarrow$ (А). Поскольку функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_1+h]$, то и функция $t \mapsto \Phi(x(t))$ — как композиция непрерывных функций $x(t)$ и $\Phi(x)$ — тоже непрерывна на нём. Следовательно, к правой части интегрального уравнения (3) можно применить теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом. Получаем равенство

$$x'(t) = \Phi(x(t)), \quad t \in [t_0, t_0+h], \tag{4}$$

а при подстановке в интегральное уравнение значения $t = t_1$ получаем начальное условие. При этом в силу равенства (4) производная $x'(t)$ тоже непрерывна на отрезке $[t_1, t_1+h]$.

Следовательно, для доказательства существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши (2) достаточно доказать существование и единственность непрерывного решения интегрального уравнения (3)[2].

Для доказательства существования и единственности решения интегрального уравнения (3) введём банахово пространство (см. задачу 1)

$$\mathbb{B} = C([t_1, t_1+h]; B)$$

с нормой

$$\|x\|_{\mathbb{B}} = \sup_{t \in [t_1, t_1+h]} \|x(t)\|$$

и оператор (вообще говоря, нелинейный) $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, действующий по правилу

$$(Ax)(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))d\tau,$$

с помощью которого уравнение (3) переписывается в виде

$$x = Ax. \tag{5}$$

[2]Подчеркнём, что из существования и единственности решения одного уравнения следует не только существование, но и единственность решения другого!

Заметим, что этот оператор (определённый на всём банаховом пространстве B) является сжимающим. В самом деле, для любых непрерывных функций $\tilde{x}(t)$, $\tilde{\tilde{x}}(t)$ в любой точке $t \in [t_1, t_1+h]$ имеем[3]

$$\big\|(A\tilde{x})(t) - (A\tilde{\tilde{x}})(t)\big\| = \left\| x_1 + \int_{t_1}^{t} \Phi(\tilde{x}(\tau))\, d\tau - x_1 - \int_{t_1}^{t} \Phi(\tilde{\tilde{x}}(\tau))\, d\tau \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t} \big(\Phi(\tilde{x}(\tau)) - \Phi(\tilde{\tilde{x}}(\tau))\big)\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{t_1}^{t} \big\|\Phi(\tilde{x}(\tau)) - \Phi(\tilde{\tilde{x}}(\tau))\big\|\, d\tau \right| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t} L\|\tilde{x}(\tau) - \tilde{\tilde{x}}(\tau)\|\, d\tau \right| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t} L \sup_{t\in[t_1,t_1+h]} \|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|\, d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_{t_1}^{t} L\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|_{\mathbb{B}}\, d\tau \right| \leqslant |t - t_1| L \|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|_{\mathbb{B}} \leqslant Lh\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|_{\mathbb{B}}.$$

Беря точную верхнюю грань по всем $t \in [t_1, t_1 + h]$, получаем

$$\big\|A\tilde{x} - A\tilde{\tilde{x}}\big\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|_{\mathbb{B}}, \tag{6}$$

т. е. оператор A является сжимающим оператором, действующим на всём пространстве $\mathbb{B}$. Следовательно, к нему примени́м принцип сжимающих отображений (теорема о неподвижной точке), что и доказывает существование и единственность решения интегрального уравнения (3) и — в силу вышесказанного — аналогичный результат для задачи Коши (2). ▲

Лемма 2. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — соответственно решения задачи Коши (1) на некоторых промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ с началом в точке t_0 ($t_0 \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$), то эти функции совпадают на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

Доказательство. Для сокращения записи введём обозначение $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}_4 = \{t \in \mathcal{T}_3 \mid x_1(t) \neq x_2(t)\}.$$

Если оно пусто, то утверждение леммы верно. Предположим теперь, что $\mathcal{T}_4$ непусто. Заметим, что это множество открыто в метрическом пространстве $\mathcal{T}_3$ как прообраз открытого множества $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $g(t) := \|x_1(t) - x_2(t)\|$. Положим

$$T = \inf \mathcal{T}_4. \tag{7}$$

Докажем, что $T \notin \mathcal{T}_4$, т. е. $x_1(T) = x_2(T)$. В самом деле, если $T = t_0$, то это следует из определения решений (точнее, из начального условия задачи Коши (1)). Если же $T > t_0$, то предположение о том, что $T \in \mathcal{T}_4$, приводит к противоречию. В самом деле, в любой левой полуокрестности точки T есть точки, не принадлежащие $\mathcal{T}_4$, поэтому при $T \in \mathcal{T}_4$ точка T является граничной для $\mathcal{T}_4$ и, следовательно, не принадлежит этому открытому множеству.

Из только что установленного факта $T \notin \mathcal{T}_4$ и предположении о непустоте $\mathcal{T}_4$ следует, в частности, что $\mathcal{T}_3$ «не может заканчиваться» точкой T и содержит некоторый промежуток $[T, T+h_1]$.

[3]Знаки модуля можно снять, если учесть, что всюду $t \geqslant t_1$. Но аналогичное утверждение может быть доказано и для «решения влево». Имея эту возможность в виду, мы и поставили знаки модуля.

Тогда можно выбрать достаточно малый отрезок $[T, T+h]$ (где $h \leqslant \min(h_1, \frac{1}{2L})$) и поставить на нём задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \in [T, T+h]; \\ x(T) = x_1(T). \end{cases} \tag{8}$$

Ограничения каждой из функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, очевидно, были бы её решениями, но не совпадали бы тождественно на отрезке $[T, T+h]$ (поскольку T есть *точная* нижняя грань $\mathcal{T}_4$). Последнее противоречит лемме 1. ▲

Доказательство теоремы. Теперь утверждение теоремы следует из доказанных выше двух лемм. В силу леммы 1 можно, двигаясь по шагам длины h, «составить» решение задачи Коши (1) из решений задач типа (2). При этом в силу равенства $x'(t) = \Phi(x(t))$, верного и в граничных точках отрезков для соответствующих односторонних производных, и непрерывности функции $x(t)$ (а следовательно, и сложной функции $\Phi(x(t))$), мы получаем, что производная в точках «сшивки» тоже существует и непрерывна. Из леммы 2 мы получаем утверждение о единственности решения. ▲

§ 6. Пример применения теоремы

Рассмотрим обобщённое уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^2 u) + k\varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) = 0$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \Omega;\ u(x, t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T).$$

Пусть оператор $\mathbb{D}$ действует на трижды дифференцируемую функцию u по правилу

$$\mathbb{D}(u) = (\varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^2 u)_t + \varepsilon^2 k \Delta u - f(u, x), \tag{9}$$

где непрерывная функция $f(u, x)$ удовлетворяет условию

$$f(0, x) = 0 \tag{10}$$

для всех $x \in \Omega$ и условию Липшица

$$|f(u_1, x) - f(u_2, x)| \leqslant C|u_1 - u_2| \tag{11}$$

для любых $x \in \Omega$, $u_{1,2} \in \mathbb{R}^1$, где $C > 0$ – постоянная величина[4].

[4]Согласно задаче 5, для непрерывности по совокупности переменных достаточно дополнительно к условию Липшица потребовать непрерывность по x в каждой точке $(u, x) \in \mathbb{R}^1 \times \Omega$.

В качестве примера мы рассмотрим функцию f такую, что

$$f(u,x) = \begin{cases} \gamma u(u^2 - U^2(x)), \quad |u| \leqslant U_0, \quad x \in \Omega, \\ (3\gamma U_0^2 - \gamma U^2(x))u - 2\gamma U_0^3 \operatorname{sgn} u, \quad |u| \geqslant U_0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{12}$$

где $U_0 > \max_\Omega |U(x)|$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщённого уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (ОКПП)

$$\begin{cases} \mathbb{D}(u) = 0, \quad x \in \Omega, t \geqslant 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{13}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in C^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Скалярное произведение и норму в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $(u,v)_2$ и $\|u\|_2$, а скалярное произведение и норму в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — соответствующими символами без индексов.

Чтобы сформулировать обобщённую постановку задачи (13), удобно будет сразу ввести некоторые операторы.

Определим оператор $\mathbb{J} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ действующим по правилу

$$\langle \mathbb{J}v, w\rangle = \int_\Omega vw\,dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Очевидно, это линейный оператор. Оценим его норму. Имеем

$$|\langle \mathbb{J}v, w\rangle| = \left|\int_\Omega vw\,dx\right| \leqslant \|v\|_2\|w\|_2 \leqslant C_F^2\|v\|\|w\|, \tag{14}$$

где C_F — константа в неравенстве Фридрихса

$$\|w\|_2 \leqslant C_F\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

для области Ω. Из (14) имеем

$$\|\mathbb{J}\| \leqslant C_F^2. \tag{15}$$

Далее, введём оператор $\Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ по правилу

$$\langle \Delta v, w\rangle = -\int_\Omega (\nabla v, \nabla w)\,dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

В силу оценки

$$\left|\int_\Omega (\nabla v, \nabla w)\,dx\right| \equiv |(\nabla v, \nabla w)| \leqslant \|v\|\|w\|$$

имеем

$$\|\Delta\| \leqslant 1 \tag{16}$$

(на самом деле эта норма равна 1, как показывает выбор $w = v$, но для нас это не принципиально).

Наконец, введём нелинейный оператор $\mathbb{F}$ по правилу $\mathbb{F}(v) = f(v(x), x)$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. Оператор $\mathbb{F}(v)$ является липшиц-непрерывным оператором, действующим в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (при любом $p > 1$), с константой Липшица, равной C из формулы (11).

Доказательство. Из (10) и (11) следует оценка

$$|f(v, x)| \leqslant C|v|,$$

откуда в силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого следует, что оператор $v \mapsto \mathbb{F}(v)$ переводит функцию, принадлежащую $\mathbb{L}^p(\Omega)$, в функцию, принадлежащую $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Далее, имеем оценку

$$\|\mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2)\|_p = \left(\int_\Omega |f(v_1, x) - f(v_2, x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \{(11)\} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega C^p |v_1 - v_2|^p dx\right)^{1/p} = C\|v_1 - v_2\|_p,$$

что и доказывает лемму. ▲

Мы зафиксируем $p = 2$ и будем считать, что $\mathbb{F} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Введём также операторы вложения $\mathbb{J}_1 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ (действующий естественным образом) и $\mathbb{J}_2 : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, действующий по правилу

$$\langle \mathbb{J}_2 v, w\rangle = \int_\Omega vw\, dx \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \forall v \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Оценим их нормы. Очевидно, $\|\mathbb{J}_1\| = C_F$ по самому определению константы Фридрихса. Далее,

$$|\langle \mathbb{J}_2 v, w\rangle| = |(v, w)_2| \leqslant \|v\|_2 \|w\|_2 \leqslant C_F \|v\|_2 \|w\|,$$

откуда сразу следует, что $\|\mathbb{J}_2\| \leqslant C_F$.

Замечание 1. Очевидно, что $\mathbb{J} = \mathbb{J}_2 \mathbb{J}_1$.

Теперь мы можем определить оператор $\mathbb{D}$ в смысле обобщённого решения. Именно, для всякого $v(t) \equiv v(x, t) \in C^1([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ или $v(t) \equiv v(x, t) \in C^1([0, T); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ (где $T > 0$ произвольно и во втором случае может быть равно $+\infty$) положим

$$\mathbb{D}(v) = \frac{d}{dt}(\varepsilon^4 \Delta v - \varepsilon^2 \mathbb{J} v) + \varepsilon^2 k \Delta v - \mathbb{J}_2 \mathbb{F}(\mathbb{J}_1 v), \tag{17}$$

где $\frac{d}{dt}$ обозначает дифференцирование в смысле предела по норме $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\frac{d}{dt} v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(v(t + \Delta t) - v(t)).$$

Очевидно,

$$\mathbb{D} : C^1([0,T];\mathbb{H}^1_0(\Omega)) \to C([0,T];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Теперь мы можем дать определение обобщённого решения задачи (13).

Определение 1. Обобщённым решением задачи (13) будем называть функцию $u(x,t) \equiv u(x)(t)$ из класса $C^1([0,T];\mathbb{H}^1_0(\Omega))$, где $0 < T < +\infty$ (или из класса $C^1([0,T);\mathbb{H}^1_0(\Omega))$, где $0 < T \leqslant +\infty$), удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} \mathbb{D}(u) = 0, \quad t \in [0,T] \quad (\text{соответственно } t \in [0,T)), \\ u(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{18}$$

Как показывает «интегрирование по частям», классическое решение задачи (13), если оно существует, удовлетворяет нашему определению обобщённого решения.

Замечание 2. Здесь 0 есть нулевой элемент пространства $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, т. е. задачу (18) можно переписать так:

$$\begin{cases} \forall w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \quad \langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0, \quad t \in [0,T] \quad (\text{соответственно } t \in [0,T)), \\ u(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Оказывается, задача (18) может быть переформулирована в виде абстрактной задачи Коши. Для этого нам понадобится некоторая подготовительная работа.

Прежде всего введём линейный оператор

$$\mathbb{A} \equiv \mathbb{J} - \varepsilon^2\Delta : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

В силу доказанной ранее ограниченности операторов $\mathbb{J}$ и Δ и оценок их норм сразу получаем: $\|\mathbb{A}\| \leqslant C_F^2 + \varepsilon^2$. Итак, доказана

Лемма 4. Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является ограниченным линейным оператором с нормой $\|A\| \leqslant C_F^2 + \varepsilon^2$.

Напомним некоторые определения.

Определение 2. Пусть X – вещественное банахово пространство, X^* – его сопряженное. Оператор $\mathbb{A} : X \to X^*$ называется радиально непрерывным, если для любых фиксированных $v_1, v_2 \in X$ вещественнозначная функция $S(s)$, заданная равенством $S(s) = \langle \mathbb{A}(v_1 + sv_2), v_2\rangle$, непрерывна на отрезке $[0,1]$.

Следствие из леммы 4. Оператор $\mathbb{A}$ является радиально непрерывным. Действительно, $|S(s_1) - S(s_2)| \leqslant \|A\|\|v_2\|^2|s_1 - s_2|$.

Напомним определение сильно монотонного оператора.

Определение 3. Оператор $\mathbb{A} : X \to X^*$ называется сильно монотонным (с константой $m > 0$), если существует такое $m > 0$, что для любых $v_1, v_2 \in X$

$$\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2\rangle \geqslant m\|v_1 - v_2\|^2.$$

Напомним определение коэрцитивного оператора.

Определение 4. Оператор $\mathbb{A} : X \to X^*$ называется коэрцитивным, если существует вещественнозначная функция $\gamma(s) > 0$, заданная на множестве $s \in [0, +\infty)$, такая, что

$$\langle \mathbb{A}v, v\rangle \geqslant \|v\|\gamma(\|v\|) \quad \forall v \in X,$$

где $\lim_{s\to+\infty} \gamma(s) = +\infty$.

Лемма 5. Оператор $\mathbb{A}$ является сильно монотонным и коэрцитивным.

Доказательство. Имеем

$$\langle \mathbb{A}v, v\rangle = \|v\|_2^2 + \varepsilon^2\|\nabla v\|_2^2 \geqslant \varepsilon^2\|\nabla v\|_2^2 = \varepsilon^2\|v\|^2. \tag{19}$$

Следовательно, оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным с $\gamma(s) = \varepsilon^2 s$. Далее, учитывая линейность оператора $\mathbb{A}$, имеем

$$\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2\rangle = \langle \mathbb{A}(v_1 - v_2), v_1 - v_2\rangle \geqslant \{(19)\} \geqslant \varepsilon^2\|v_1 - v_2\|^2. \tag{20}$$

▲

Замечание 3. Подчеркнём, что сильная монотонность и коэрцитивность происходят здесь из общей оценки благодаря линейности оператора $\mathbb{A}$, тогда как указанный аппарат используется и в гораздо более нетривиальном — нелинейном — случае.

Итак, оператор $\mathbb{A}$ является радиально непрерывным, сильно монотонным, коэрцитивным.

Лемма 6. Оператор $\mathbb{A}$ имеет обратный оператор

$$\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Доказательство. Так как оператор $\mathbb{A}$ является радиально непрерывным, сильно монотонным, коэрцитивным, то утверждение леммы вытекает из теоремы Браудера. ▲

Лемма 7. Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной $1/\varepsilon^2$.

Доказательство. Ранее было получено неравенство (19). Дополним его следующим образом:

$$\|\mathbb{A}v\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)} \cdot \|v\| \geqslant \langle \mathbb{A}v, v\rangle \geqslant \varepsilon^2\|v\|^2, \tag{21}$$

где мы использовали, что в силу определения нормы на сопряжённом пространстве X^* верно неравенство

$$\|f\|_{X^*} \geqslant \frac{|\langle f, g\rangle|}{\|g\|_X}.$$

Теперь, пользуясь обратимостью оператора $\mathbb{A}$, представим произвольное $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в виде $v = \mathbb{A}^{-1}w$, где $w = \mathbb{A}v \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, и получим:

$$\|w\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}\|\mathbb{A}^{-1}w\| \geqslant \varepsilon^2\|\mathbb{A}^{-1}w\|^2,$$

откуда либо $\|\mathbb{A}^{-1}w\| = 0$, либо $\|\mathbb{A}^{-1}w\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\|w\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}$. Таким образом, в любом случае

$$\|\mathbb{A}^{-1}w\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\|w\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)},$$

а следовательно, $\|\mathbb{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$. Наконец, очевидно, что линейный ограниченный оператор является липшиц-непрерывным оператором с константой Липшица, равной его норме.

▲

Теперь обобщённая постановка, данная в определении 1, может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d}{dt}(\mathbb{A}u) = \varepsilon^2 k\Delta u - \mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{22}$$

В силу свойств гладкости решения по t операторы $\frac{d}{dt}$ и $\mathbb{A}$ коммутируют, и мы можем записать (после деления на ε^2)

$$\begin{cases} \mathbb{A}\dfrac{d}{dt}(u) = k\Delta u - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{23}$$

Наконец, пользуясь ранее доказанной непрерывной обратимостью оператора $\mathbb{A}$, мы можем преобразовать задачу к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u) = \mathbb{A}^{-1}\left(k\Delta u - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u)\right), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{24}$$

Обозначим оператор, стоящий в правой части, через $\Phi(u)$. Таким образом, $\Phi : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — это оператор, действующий по правилу

$$\Phi(v) = \mathbb{A}^{-1}\left(k\Delta v - \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 v)\right). \tag{25}$$

Очевидно, этот (нелинейный) оператор является липшиц-непрерывным. В самом деле, оператор $\mathbb{A}^{-1}\Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ является ограниченным линейным оператором в силу вышедоказанного; оператор $\mathbb{A}^{-1} \circ \mathbb{J}_2 \circ \mathbb{F} \circ \mathbb{J}_1$ липшиц-непрерывен как композиция непрерывных линейных операторов $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{J}_i$, $i = 1, 2$, и липшиц-непрерывного оператора $\mathbb{F}$.

Итак, исходная задача (в обобщённой постановке) приведена к виду абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = \Phi(u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{26}$$

с липшиц-непрерывной правой частью.

В силу теоремы предыдущего параграфа абстрактная задача Коши (26) глобально разрешима, т. е. существует единственное решение $u(t) \in C^1([0, +\infty); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а любое другое решение (на конечном промежутке $\mathcal{T}$) является его ограничением с промежутка $[0, +\infty)$ на промежуток $\mathcal{T}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что линейное пространство $C([a, b]; B)$ действительно является банаховым.

2. Конкретизировать рассуждение о «сшивке» решений, полученных на отрезках, которым мы пользовались в конце доказательства теоремы.

3*. Сформулировать и доказать теорему о глобальной разрешимости системы однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Верно ли аналогичное утверждение для неоднородной системы?

4. Проверить, что функция $f(u, x)$, заданная формулой (12), непрерывно дифференцируема и липшиц-непрерывна по u.

5. Доказать, что если функция $f(u, x)$ 1) непрерывна по u равномерно относительно x (что это значит?) и 2) в каждой точке (u, x) непрерывна по x, то она непрерывна по совокупности переменных.