

ЛЕКЦИЯ 5

Пример глобальной разрешимости

§ 9. Применение теоремы Пикара в сочетании с методом априорных оценок: доказательство глобальной разрешимости одной начально-краевой задачи

1. Классическая постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u - u^3 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Мы сразу перейдём к формулировке и исследованию обобщённой постановки этой задачи.

2. Обобщённая постановка и локальная разрешимость. Подобно тому, как это было сделано в лекции 2, введём линейный оператор

$$Au = \Delta u - Iu, \quad A : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Здесь линейные операторы Δ и I действуют из пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ соответственно по правилам

$$\langle \Delta v, w \rangle = - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla w) dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (2)$$

$$\langle Iv, w \rangle = \int_{\Omega} vw dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (3)$$

(Тот факт, что определённый согласно (2) оператор Δ является ограниченным, проверяется с помощью неравенства Коши—Буняковского. В случае оператора I приходится привлечь ещё и неравенство Фридрикса.) Аналогично случаю лекции 2 с помощью теоремы Браудера—Минти устанавливаем, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор

$$A^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Попытаемся искать обобщённое решение задачи (1) как функцию

$$u(t) \in C^1([0, T], \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad 0 < T \leq +\infty.$$

Тогда уравнение из (1) можно, пока формально, переписать в виде

$$\frac{d}{dt} Au + \Delta u - u^3 = 0$$

или, с учётом тождества $\frac{d}{dt} Au = Au'$ (см. лекцию 1) и обратимости оператора A , в виде

$$\frac{d}{dt} u = A^{-1}(u^3 - \Delta u).$$

Почему формально? Потому что мы пока не знаем, принадлежит ли u^3 области определения $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ оператора A^{-1} . Однако сейчас мы установим нужный нам факт. Именно, из теорем вложения соболевских пространств известно, что для ограниченной области Ω имеет место непрерывное вложение

$$J_1 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow L^4(\Omega). \quad (4)$$

В силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого можно утверждать, что отображение $F_3 : u \mapsto u^3$ преобразует функцию из пространства $L^4(\Omega)$ в функцию из пространства $L^{4/3}(\Omega)$. (Впрочем, в данном случае это очевидно из более простых соображений: $|u^3|^{4/3} = |u|^4$, поэтому если $u \in L^4(\Omega)$, то $u^3 \in L^{4/3}(\Omega)$.) С другой стороны, $L^{4/3}(\Omega) = (L^4(\Omega))^*$, а поэтому в силу известной теоремы о вложении банаховых пространств и их сопряжённых¹ из (4) получаем непрерывное вложение

$$J_2 : L^{4/3}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

понимаемое в естественном смысле:

$$\langle J_2 v, w \rangle = \int_{\Omega} vw \, dx \quad \forall v \in L^{4/3}(\Omega), \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (5)$$

Итак, имеется цепочка отображений

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \xrightarrow{J_1} L^4(\Omega) \xrightarrow{F_3} L^{4/3}(\Omega) \xrightarrow{J_2} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (6)$$

Следовательно, имеется отображение $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$. Чтобы доказать его ограниченную липшиц-непрерывность, достаточно доказать таковую для отображения $F_3 : L^4(\Omega) \rightarrow L^{4/3}(\Omega)$, поскольку остальные отображения являются ограниченными линейными операторами (см. задачу 1). Итак, если мы докажем, что отображение F_3 является ограничено липшиц-непрерывным, то сможем свести исследование исходной задачи к исследованию абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u = A^{-1}(J_2 F_3(J_1 u) - \Delta u), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (7)$$

и применить к ней теорему из лекции 3.

Продемонстрируем на этом примере стандартную технику использования неравенств Гёль-

¹Если X, Y суть рефлексивные бесконечномерные банаховы пространства, то условие « X плотно и непрерывно вложено в Y » равносильно условию « Y^* плотно и непрерывно вложено в X^* ».

дера и Юнга. Имеем

$$\begin{aligned}
\|u_1^3 - u_2^3\|_{4/3} &= \left(\int_{\Omega} |u_1^3 - u_2^3|^{\frac{4}{3}} dx \right)^{\frac{3}{4}} = \\
&= \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^{\frac{4}{3}} \cdot |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^{\frac{4}{3}} dx \right)^{\frac{3}{4}} = \{\text{неравенство Гёльдера}\} = \\
&= \left(\left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^{\frac{4}{3} \cdot 3} dx \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} = \\
&= \left(\left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^4 dx \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^2 dx \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} = \\
&= \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_1 - u_2\|_4 \cdot \left(\int_{\Omega} |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Для оценки второго множителя заметим, что

$$|u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^2 = u_1^4 + u_2^4 + 3u_1^2 u_2^2 + 2(u_1^3 u_2 + u_1 u_2^3) \leq C(u_1^4 + u_2^4),$$

где последний переход произведён с помощью неравенства Юнга, применённого в виде

$$u_1^2 u_2^2 \leq \frac{u_1^4 + u_2^4}{2}, \quad |u_1| |u_2|^3 \leq \frac{u_1^4}{4} + \frac{u_2^4}{4/3} \quad \text{и} \quad |u_1|^3 |u_2| \leq \frac{u_1^4}{4/3} + \frac{u_2^4}{4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C_1 \left(\int_{\Omega} (u_1^4 + u_2^4) dx \right)^{\frac{1}{2}} = C_1 \left(\int_{\Omega} u_1^4 dx + \int_{\Omega} u_2^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= C_1 (\|u_1\|_4^4 + \|u_2\|_4^4)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 (2 \max(\|u_1\|_4, \|u_2\|_4))^2. \quad (8)
\end{aligned}$$

Итак, в силу всего вышесказанного ограниченная липшиц-непрерывность отображения $A^{-1} \circ \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$ доказана. Следовательно, применяя теорему лекции 3 к задаче Коши (7), получаем утверждение о существовании непродолжаемого решения рассматриваемой задачи.

3. Глобальная разрешимость. Применим метод априорных оценок.

Итак, решение задачи есть функция $u(t) \in C^1([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Следовательно (в силу всего вышесказанного) левая часть есть элемент пространства $C([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Поэтому при каждом $t \geq 0$ можно подействовать левой частью уравнения на $u(t)$. Получим

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au) + \Delta u - J_2 F_3(J_1 u), u(t) \right\rangle = 0, \quad t \in [0, T].$$

Пользуясь перестановочностью дифференцирования и применения линейного оператора (см. лекцию 1), приводим предыдущее тождество к виду

$$\left\langle A \frac{d}{dt} u + \Delta u - J_2 F_3(J_1 u), u(t) \right\rangle = 0, \quad t \in [0, T],$$

или

$$\left\langle A \frac{d}{dt} u, u \right\rangle + \langle \Delta u, u \rangle - \langle J_2 F_3(J_1 u), u \rangle = 0, \quad t \in [0, T].$$

Распишем в явном виде оператор A и скобки двойственности (см. (2) и (3)):

$$- \int_{\Omega} (\nabla(u'), \nabla u) dx - \int_{\Omega} u' u dx - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx - \int_{\Omega} u^3 \cdot u dx = 0,$$

где последний член получается с учётом (5), или²

$$-(\nabla(u'), \nabla u)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (u', u)_{L^2(\Omega)} - (\nabla u, \nabla u)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_{\Omega} u^4 dx = 0. \quad (9)$$

Поскольку (см. задачу 3) в вещественном гильбертовом пространстве H для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t) \in C^1(\mathcal{T}, H)$ верно

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2(v', v)_{L^2(\Omega)},$$

равенство (9) можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 \right) - (\nabla u, \nabla u)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_{\Omega} u^4 dx = 0, \quad (10)$$

или, обозначив $E(t) := \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2$,

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = - \left(\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} u^4 dx \right),$$

откуда

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \leq 0.$$

Учтя, что $E(0) = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 < +\infty$, получаем, что на всём промежутке существования решения выполнено неравенство

$$E(t) \leq E(0). \quad (11)$$

Теперь вспомним, что абстрактная задача Коши, к которой мы свели исходную задачу, ставилась в пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Следовательно, норма именно в этом пространстве будет фигурировать в теореме лекции 3 при применении этой теоремы к нашей задаче. Но из (11) получаем

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq E(t) \leq E(0)$$

и, в частности, для любого конечного $T_1 < +\infty$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow T_1} \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} < +\infty. \quad (12)$$

²Здесь $\mathbf{L}^2(\Omega)$ — пространство вектор-функций на Ω , у которых каждая компонента принадлежит пространству $L^2(\Omega)$.

Но из теоремы лекции 3 вытекает, что если бы решение существовало лишь на конечном промежутке, его норма стремилась бы к бесконечности на конце этого промежутка. Следовательно, решение существует на всей полупрямой $[0, +\infty)$.

Замечание 1. Как видно, здесь важна не сама по себе оценка (11), а более слабое утверждение: ограниченность нормы решения на каждом *ограниченном промежутке*.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь оценкой (8), получить в явном виде функцию $\mu(t, s)$ из теоремы лекции 3 для отображения $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$.

2. Доказать ограниченную липшиц-непрерывность следующих операторов:

1) $u \mapsto u^5, L^6(\Omega) \rightarrow L^{6/5}(\Omega)$;

2*) $u \mapsto |u|^q, L^{q+1}(\Omega) \rightarrow L^{(q+1)/q}(\Omega), q > 1$.

3. Доказать формулу дифференцирования скалярного квадрата дифференцируемой функции со значениями в вещественном гильбертовом пространстве:

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = 2(u', u).$$

(Рекомендуется сослаться на подходящее утверждение из лекции 1, проверив условия его применимости.)

4. Сформулировать соответствующие обобщённые постановки и доказать глобальную разрешимость аналогичной задачи, в правой части уравнения которой вместо 0 стоит:

1) $f(x) \in L^2(\Omega)$;

2) $f(x) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$;

3) $f(x, t) \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$;

4) $f(x, t) \in C([0, +\infty); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$;

5*) $f(x, u)$;

6*) $f(x, |\nabla u|)$,

где в последних двух случаях функция $f(x, s)$ является каратеодориевой и равномерно по $x \in \Omega$ удовлетворяет оценке

$$|f(x, s)| \leq |s|^\gamma, \quad \gamma \in (0, 1).$$