Программа курса «Методы математической физики»

Часть I. Специальные функции математической физики.

1. Задача на собственные значения в основных областях. Уравнение специальных функций и свойства его решений.
2. Цилиндрические функции. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя. Функции Ханкеля. Функция Неймана. Общее решение уравнения Бесселя. Метод перевала. Асимптотическое поведение цилиндрических функций. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента.
3. Пространства Лебега и Соболева. Замкнутые и полные системы функций
4. Классические ортогональные полиномы. Дифференциальное уравнение. Формула Родрига. Производящая функция. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Полиномы Лагерра. Полиномы Эрмита.
5. Сферические и шаровые функции.
6. Простейшие задачи для уравнения Шредингера.

Часть II. Методы математической физики.

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.
2. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям второго порядка. Начально-краевая задача. Внутренние и внешние задачи. Постановка условий на бесконечности. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса). Общая задача Коши. Задача с подвижной границей (задача Стефана). Классическое решение. Обобщенное решение.
3. Метод разделения переменных (метод Фурье). Общая схема метода.
4. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формулы Грина. Основные свойства гармонических функций (теорема Гаусса, теорема о среднем, бесконечная дифференцируемость, принцип максимума). Теоремы единственности для внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа. Понятие обобщенного решения. Функция Грина для оператора Лапласа. Методы ее построения. Гармонические потенциалы: объемный потенциал, поверхностные и логарифмические потенциалы. Свойства потенциалов простого и двойного слоя. Метод интегральных уравнений для решения краевых задач. Существование решений основных краевых задач для уравнения Лапласа.
5. Уравнение параболического типа. Внутренние начально-краевые задачи. Принцип максимума. Теоремы единственности. Теорема существования для одномерного случая. Уравнение теплопроводности

на бесконечной прямой и в неограниченном пространстве. Теорема единственности. Теорема существования. Фундаментальное решение. Уравнение теплопроводности на полубесконечной прямой. Метод продолжения. Функция Грина. Обобщенные решения. Неоднородные граничные условия.

6. Уравнение гиперболического типа. Внутренние начально-краевые задачи. Теоремы единственности. Теорема существования в одномерном случае. Уравнение колебаний на бесконечной прямой. Метод распространяющихся волн. Функция источника. Обобщенное решение. Формула Даламбера. Уравнение переноса. Уравнение колебаний на полубесконечной прямой. Метод продолжения. Метод интегральных преобразований Фурье. Задача Коши для уравнения колебаний в пространстве. Формула Пуассона. Метод спуска.
7. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа. Свойства собственных значений и собственных функций. Собственные функции оператора Лапласа для простейших канонических областей. Фундаментальные решения для уравнения Гельмгольца. Теоремы единственности для уравнения Гельмгольца в ограниченной области. Задачи во внешней области. Постановка условий на бесконечности.

Замечание. Выделенные синим цветом темы программы курса «Методы математической физики» перенесены в курс «Основы математического моделирования», который читается в шестом семестре.