

## Вопросы к экзамену по ММФ (2-ой поток)

Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения спецфункций  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$ ,  $x \in (a,b)$ , где  $k(x) = (x-a)\phi(x)$ ,  $\phi(a) \neq 0$ , в особых точках.

Напишите уравнение Бесселя и его фундаментальную систему решений. Дайте определение функций, входящих в эту систему решений и приведите их графики.

Дайте определение цилиндрической функции. Приведите примеры цилиндрических функций и их графики.

Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Ее график.

Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуполого порядка можно выразить через элементарные функции?

Интегральное представление для цилиндрических функций.

Дайте определение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Как они связаны между собой.

Напишите формулу, связывающую функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов. Каким методом она доказывается?

Рекуррентные формулы для цилиндрических функций. Каким методом можно их получить?

Напишите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля первого и второго рода.

Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.

Уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Напишите фундаментальную систему решений этого уравнения. Приведите графики функций, входящих в фундаментальную систему.

Поставьте задачу на собственные значения для функций Бесселя. Сформулируйте теорему Стеклова для собственных функций этой задачи.

Общая формула для квадрата нормы собственной функции задачи на собственные значения для цилиндрических функций. Способ ее получения.

Дайте определение функции Инфельда. Ее график. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Инфельда. Откуда она следует?

Дайте определение функции Макдональда. Ее график. Напишите асимптотическую формулу для функции Макдональда. Откуда она следует?

Дайте определение классических ортогональных полиномов. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.

Напишите формулу для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для классических ортогональных полиномов.

Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?

Напишите уравнение для классических ортогональных полиномов. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках.

Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (формулу Родрига).

Дайте определение полиномов Эрмита. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.

Дайте определение полиномов Лагерра. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.

Дайте определение полиномов Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений.

Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной? Обоснуйте соответствующие утверждения.

Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.

Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра.

Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра. Каким методом можно их получить?

Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Напишите выражение квадрата нормы этих функций. Решениями какой задачи они являются?

Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Укажите собственные значения этой задачи и нормы присоединенных функций Лежандра.

Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.

Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае линейных граничных условий различного типа. Напишите собственные функции шара для граничных условий Дирихле и Неймана.

Дайте определение шаровых функций. Являются ли шаровые функции собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля. Обоснуйте ответ.

Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.

Напишите условие ортогональности для сферических функций. Откуда оно возникает. Напишите выражение квадрата нормы для сферических функций.

Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий различного типа.

Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте и объясните соответствующие утверждения.

Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных?

Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных и напишите для них канонические формы.

Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае многих переменных и напишите для них каноническую форму.

Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух и трех переменных. Достаточные условия, обеспечивающие регулярность гармонической функции на бесконечности.

В чем состоит различие в постановках и свойствах решений внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях?

Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?

Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

Напишите третью формулу Грина для двумерного и трехмерного случая. Каким методом можно ее получить?

Метод функций Грина решения краевых задач для уравнения Лапласа.

Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.

Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.

Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.

Дайте определение функции Грина внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина

Дайте определение объемного потенциала. Сведение уравнения Пуассона к однородному уравнению с его помощью.

Дайте определения потенциалов простого и двойного слоя в двумерном и трехмерном случаях

Дайте определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности потенциала простого слоя. Каким методом она доказывается?

Дайте определение поверхности Ляпунова. Сформулируйте теорему о существовании потенциала двойного слоя.

Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого и двойного слоя? Если да, то какова величина разрыва. Обоснуйте ответ.

Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей поверхности? Напишите формулу скачка потенциала двойного слоя при переходе через несущую поверхность.

Метод сведения краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к союзным интегральным уравнениям Фредгольма

Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Укажите метод ее доказательства.

Напишите необходимое и достаточное условия разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Откуда они следуют?

Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Укажите метод ее доказательства.

Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Укажите метод ее доказательства.

Что такое потенциал Робена? При решении какой задачи он используется?

В чем отличие принципа максимума для уравнения Лапласа и Гельмгольца?

Напишите фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в двумерном и трехмерном случаях.

В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.

Дайте определение поверхностных потенциалов простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца

Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для уравнения параболического типа.

Сформулируйте теорему единственности и теорему устойчивости решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа. Назовите метод их доказательства.

Напишите функцию влияния точечного источника для уравнения теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чем ее физический смысл?

Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой, его свойства и физический смысл?

Что такое «парадокс бесконечной теплопроводности»? Чем его можно объяснить?

Сформулируйте теорему единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Каким методом она доказывается?

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Напишите общий вид решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородных граничных условий Неймана.

Постановка и решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой в случае однородных граничных условий Дирихле.

Напишите функцию влияния точечного источника для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Дирихле и Неймана.

Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Неймана. Как оно строится?

Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле. Сформулируйте принцип Дюамеля.

Поставьте и напишите решение начальной задачи для уравнения теплопроводности в пространстве.

Сформулируйте теорему единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Каким методом она доказывается?

Приведите решение начально-краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний в ограниченной области при однородных граничных условиях. Напишите общую формулу, использующую функцию влияния точечного импульса.

Поставьте начальную задачу для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой. Напишите формулу Даламбера. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения.

Напишите общую формулу решения начальной задачи для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Дайте определение функции влияния точечного импульса для уравнения колебаний. Приведите выражение этой функции на отрезке и на бесконечной прямой.

Что такое «характеристический треугольник» на фазовой плоскости?

Напишите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полупрямой в случае неоднородного начального условия и неоднородного граничного условия Дирихле и Неймана. Каким методом можно его получить?

Напишите формулу Кирхгофа для уравнения колебаний в пространстве.

Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в трехмерном пространстве. Напишите формулу Пуассона, выражающую ее решение.

В чем состоит «метод спуска» Адамара при решении задач с уравнением колебаний?

Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в двумерном пространстве.

***Вопросы, при ответе на которые необходимо  
привести полное доказательство утверждений.***

Постройте интегральное представление функции Бесселя.

Получите определители Вронского функций Бесселя и Ханкеля.

Получите асимптотику функции Инфельда для больших значений аргумента.

Получите асимптотику функции Макдональда при большом значении аргумента.

Сформулируйте и докажите теорему о нулях классических ортогональных полиномов.

Получите общую формулу Родрига для классических ортогональных полиномов.

Получите производящую функцию для полиномов Лагерра.

Получите производящую функцию для полиномов Лежандра

Докажите, что система полиномов Лежандра исчерпывает все собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

Постройте функцию Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Постройте функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре методом электростатических изображений.

Постройте функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве методом электростатического отображения.

Постройте функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости методом конформного отображения.

Дайте определение потенциала двойного слоя. Сформулируйте и докажите его основные свойства.

Выведите формулу для разрыва нормальной производной потенциала простого слоя.

Сформулируйте и докажите теоремы существования решений внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Сформулируйте и докажите принцип максимума для уравнения параболического типа.

Для уравнением теплопроводности постройте функции влияния точечных источников для задачи Коши на бесконечной прямой и для начально-краевой задачи на отрезке.

Для уравнения колебаний постройте функции влияния точечных импульсов для задачи Коши на бесконечной прямой и для начально-краевой задачи на отрезке.

Постановка и решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Выведите формулу Кирхгофа.

Выведите формулу Пуассона, описывающую процесс распространения колебаний в трехмерном пространстве. Приведите выражение для функции точечного источника.