

Вопросы к экзамену/зачету

1. Дать определение локальной группы Ли. Привести примеры.
2. Дать определение локальной группы преобразований. Привести примеры однопараметрических групп.
3. Дать определение инфинитезимального генератора однопараметрической группы.
4. Доказать, что инфинитезимальные генераторы однопараметрических подгрупп локальной группы Ли образуют алгебру Ли относительно коммутатора.
5. Доказать, что заменой группового параметра групповой закон однопараметрической группы преобразований можно привести к закону группы трансляций.
6. Сформулировать и доказать критерий инвариантности функции на линейном пространстве относительно группового действия.
7. Дать определение локальной группы точечных преобразований, допускаемых дифференциальным уравнением (системой дифференциальных уравнений). Получить формулы продолжения генераторов группы на первые производные.
8. Описать алгоритмы интегрирования ОДУ первого порядка $y'(x) = f(x, y)$, допускающего известный нетривиальный оператор точечных преобразований.
9. Получить уравнение, определяющее генераторы локальной группы точечных преобразований, допускаемых ОДУ второго порядка $y''(x) = f(x, y, y')$. Доказать, что алгебра Ли операторов точечных преобразований, допускаемых этим уравнением, не более чем восьмимерна.
10. Найти операторы точечных преобразований, допускаемые уравнением $y''(x) = 0$ и получить соответствующую таблицу коммутаторов.
11. Сформулировать и доказать теорему о классификации двумерных алгебр Ли локальных точечных преобразований плоскости.
12. Описать алгоритм интегрирования ОДУ второго порядка $y''(x) = f(x, y, y')$, допускающего двумерную алгебру Ли локальных точечных преобразований.
13. Доказать, что ОДУ второго порядка $(y' - (x + x^2)e^y)' = 0$ не допускает нетривиальной алгебры Ли локальных точечных преобразований, но интегрируется в квадратурах.
14. Дать определение флага алгебры Ли и разрешимой алгебры Ли. Доказать, что алгебра Ли тогда и только тогда разрешима, когда в ней существует флаг подалгебр в котором каждая подалгебра является идеалом предыдущей.
15. Сформулировать и доказать теорему о приведении представления разрешимой алгебры Ли к верхнетреугольному виду.
16. Дать определение нильпотентной алгебры Ли. Привести пример разрешимой алгебры Ли, не являющейся нильпотентной. Сформулировать и доказать теорему о приведении коммутационных соотношений в нильпотентной алгебре Ли к строго верхнетреугольному виду.
17. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании в квадратурах системы ОДУ первого порядка.
18. Дать определение контактных преобразований. Сформулировать и доказать теорему о сводимости контактных преобразований к точечным.
19. Найти операторы контактных преобразований, допускаемые уравнением $y'''(x) = 0$.

20. Дать определение оператора Ли-Бэклунда. Доказать, что операторы вида $a^i D_i$ образуют идеал в алгебре Ли операторов Ли-Бэклунда. Дать определение канонического оператора Ли-Бэклунда.
21. Доказать, что алгебре Ли операторов Ли-Бэклунда, допускаемых уравнением теплопроводности $u_t = u_{xx}$ бесконечномерна.
22. Доказать тождество Нетер.
23. Дать определение закона сохранения дифференциального уравнения и доказать теорему Нетер о законе сохранения уравнения Эйлера-Лагранжа.