Домашнее задание от 11 марта 2026 г.

Теоретические задачи

1. Докажите равенство $\left|\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right| = k^4 + k^2\varkappa^2 + \left(\frac{dk}{ds}\right)^2$, где k и $\varkappa$ — соответственно кривизна и кручение кривой, s — натуральный параметр.

2. Докажите равенство $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right) = -k^2$.

3. Докажите равенство $\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right) = k\frac{dk}{ds}$.

4. Пусть θ и φ — углы, образованные касательной и бинормалью кривой с некоторым постоянным направлением. Докажите равенство $\frac{\sin\theta d\theta}{\sin\varphi d\varphi} = -\frac{k}{\varkappa}$.

5. Кривая лежит на сфере радиуса R. Докажите, что $R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(dk/ds)^2}{(\varkappa k)^2}\right)$.

6. Докажите, что формулы Френе можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}], \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}], \quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{b}],$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — некоторый вектор, называемый вектором Дарбу. Найдите выражение для $\boldsymbol{\omega}$.

Формулы для вычисления кривизны плоской кривой:

(а) кривая, заданная параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: $k(t) = \frac{\dot\varphi\ddot\psi - \ddot\varphi\dot\psi}{(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2)^{3/2}}$;

(б) кривая, заданная как график функции $y = f(x)$: $k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2)^{3/2}}$.

6. Докажите следующие формулы для кривизны плоской кривой:

(а) для кривой, заданной уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах: $k(\varphi) = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$ (указание: используйте параметризацию $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$);

(б) для кривой, заданной неявным уравнением $F(x, y) = 0$ в точке (x, y): $k(x, y) = \frac{F_y^2F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$.

Вычислительные задачи

1. Найдите кривизну следующих кривых, отметьте точки, в которых кривизна принимает экстремальные значения. Сделайте чертеж.

(а) синусоида $y = \sin x$;

(б) цепная линия $y = a\cosh\frac{x}{a}$; ($\cosh$ — гиперболический косинус); найдите также базис Френе, выразив его векторы через y;

(в) парабола $y^2 = 2px$;

(г) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (используйте неявное уравнение и параметризацию $x = a\cos t$, $y = b\sin t$);

(д) гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (используйте неявное уравнение и параметризацию $x = a\cosh t$, $y = b\sinh t$);

(е) кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$ ($a > 0$) — уравнение в полярных координатах;

(ж) спираль Архимеда $r = a\varphi$ ($a > 0$) — уравнение в полярных координатах; рассмотрите поведение кривизны при $\varphi \to \infty$;

(и) астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (используйте неявное уравнение и параметризацию $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$).

Ответы:

(а) $k = -\sin x \cdot (1+\cos^2 x)^{-3/2}$;

(б) $k = \frac{1}{a}\cosh^{-2}\frac{x}{a} = a/y^2$; $\tau = \left(a/y; \sqrt{y^2-a^2}/y\right)^T$; $n = \left(-\sqrt{y^2-a^2}/y; a/y\right)^T$;

(в) $k = -p^2(y^2+p^2)^{-3/2} = -\sqrt{p}\,(p+2x)^{-3/2}$;

(г) $k = a^4b^4(a^4y^2+b^4x^2)^{-3/2} = ab(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-3/2}$;

(д) $k = -a^4b^4(a^4y^2+b^4x^2)^{-3/2} = -ab(a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t)^{-3/2}$;

(е) $k = \frac{3}{4a}/\cos\frac{\varphi}{2}$;

(ж) $k = \frac{1}{a}(2+\varphi^2)(1+\varphi^2)^{-3/2}$;

(и) $k = -\frac{2}{3a}/|\sin 2t|$.

2. Составьте натуральное уравнение кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$. [Указание: найдите кривизну $k(\varphi)$ и длину дуги $s(\varphi)$ как функции параметра φ и затем исключите параметр.]

Ответ: $s^2 + 9/k^2 = 16a^2$.

3. Составьте натуральное уравнение полукубической параболы $y^2 = x^3$.

Ответ: $k(x) = 6x^{-1/2}(9x+4)^{3/2}$; $s(x) = \frac{1}{27}((9x+4)^{3/2} - 8)$; $(27s+8)((27s+8)^{2/3}-4)^{1/2}k(s) = 18$.

4. Составьте уравнение эволюты логарифмической спирали $r = ce^{\varphi}$ и докажите, что она является логарифмической спиралью, полученной из данной поворотом вокруг полюса на некоторый угол.

5. Найдите эволюту кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$ и докажите, что она тоже

является кардиоидой.

Ответ: $x(\varphi) = \frac{a}{3}(\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2)$, $y(\varphi) = \frac{a}{3}(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi)$.

6. Найдите эволюту трактрисы, т.е. кривой, заданной уравнениями $x = a\ln\tan\frac{t}{2} + a\cos t$, $y = a\sin t$.

Ответ: Цепная линия.

7. Кривая Вивиани является пересечением сферы радиуса $2R$ и кругового цилиндра радиуса R, проходящего через центр сферы. Составьте переметрическое уравнение кривой [указание: введите декартовы координаты с началом в центре сферы, направьте ось Oz параллельно оси цилиндра, в плоскости Oxy введите полярные координаты]. Найдите выражения для кривизны и кручения кривой, найдите на ней точки распрямления (т.е. точки, в которых кривизна обращается в нуль) и точки уплощения (т.е. точки, в которых кручение. обращается в нуль)