

А. В. ОВЧИННИКОВ

СЕМИНАРЫ ПО АЛГЕБРЕ

Часть 1

МОСКВА

2026

Оглавление

Глава 1.	Математическая символика.	
	Метод математической индукции	5
1.	Основные понятия и факты	5
2.	Примеры решения задач	12
3.	Задачи для самостоятельного решения	16
Глава 2.	Комбинаторика	18
1.	Основные понятия и факты	18
2.	Примеры решения задач	25
3.	Задачи для самостоятельного решения	28
Глава 3.	Комплексные числа	29
1.	Основные понятия и факты	29
2.	Примеры решения задач	36
3.	Задачи для самостоятельного решения	44
Глава 4.	Векторная алгебра.	
	I. Линейные операции	46
1.	Основные понятия и факты	46
2.	Примеры решения задач	64
3.	Задачи для самостоятельного решения	66
Глава 5.	Матрицы.	
	I. Основные понятия	68
1.	Основные понятия и факты	68
2.	Примеры решения задач	81
3.	Задачи для самостоятельного решения	84
Глава 6.	Определители второго и третьего порядков	87
1.	Основные понятия и факты	87
2.	Примеры решения задач	109
3.	Задачи для самостоятельного решения	114
Глава 7.	Векторная алгебра.	
	II. Скалярное, векторное и смешанное произведения	117

1. Основные понятия и факты	117
2. Примеры решения задач	137
3. Задачи для самостоятельного решения	142
Глава 8. Системы линейных уравнений	145
1. Основные понятия и факты	145
2. Примеры решения задач	163
3. Задачи для самостоятельного решения	174

ГЛАВА 1

Математическая символика. Метод математической индукции

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ содержание математических концепций и теорий теснейшим образом связано с *формой* их представления. Хорошо продуманные обозначения позволяют не только отражать свойства изучаемых объектов, но также помогают избежать ошибок и перенести часть исследования на технический уровень, а в некоторых случаях даже подсказывают путь решения задачи. На раннем этапе развития науки математические утверждения формулировались словесно; это часто приводило к неоднозначным трактовкам и громоздким рассуждениям. Позднее в математический обиход вошли буквенные обозначения и специальные символы, привычные сегодня, и математика обрела собственный язык с чётко определённым смыслом выражений и строгой «грамматикой».

1. Основные понятия и факты

А. Математический алфавит.

1.1. Для записи математических выражений используются, прежде всего, арабские цифры

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

и буквы русского, латинского и греческого алфавитов в различных шрифтовых начертаниях: прямом, наклонном (курсивном), готическом, каллиграфическом, ажурном. Эти символы приведены в таблицах 1 и 2.

1.2. Часто буквы снабжают верхними и/или нижними индексами и различными диакритическими знаками:

$A_i, B_{jk}, C_{\beta}^{\alpha}, \dot{a}, \tilde{A}, \hat{B}, \overrightarrow{AB}.$

Кроме того, широко используются многочисленные специальные знаки и скобки:

$= + - \times > < \geq \leq \subset \cap \cup \int \oint () [] \{ \} \langle \rangle.$

Таблица 1. Латинский алфавит: обычное начертание (столбец 1), курсивное начертание (столбец 2), жирный шрифт (столбец 3), жирный курсив (столбец 4), готический шрифт (столбец 5), каллиграфический шрифт (столбец 6), рукописный шрифт (столбец 7), ажурный шрифт (столбец 8).

1	2	3	4	5	6	7	8	Название
A a	<i>A a</i>	A a	<i>A a</i>	Ⓐ ⓐ	Ⓐ ⓐ	Ⓐ ⓐ	Ⓐ ⓐ	а
B b	<i>B b</i>	B b	<i>B b</i>	Ⓑ ⓑ	Ⓑ ⓑ	Ⓑ ⓑ	Ⓑ ⓑ	бэ
C c	<i>C c</i>	C c	<i>C c</i>	Ⓒ ⓐ	Ⓒ ⓐ	Ⓒ ⓐ	Ⓒ ⓐ	цэ
D d	<i>D d</i>	D d	<i>D d</i>	Ⓓ ⓓ	Ⓓ ⓓ	Ⓓ ⓓ	Ⓓ ⓓ	дэ
E e	<i>E e</i>	E e	<i>E e</i>	Ⓔ ⓔ	Ⓔ ⓔ	Ⓔ ⓔ	Ⓔ ⓔ	е, э
F f	<i>F f</i>	F f	<i>F f</i>	Ⓕ ⓕ	Ⓕ ⓕ	Ⓕ ⓕ	Ⓕ ⓕ	эф
G g	<i>G g</i>	G g	<i>G g</i>	Ⓖ ⓖ	Ⓖ ⓖ	Ⓖ ⓖ	Ⓖ ⓖ	же, гэ
H h	<i>H h</i>	H h	<i>H h</i>	Ⓗ ⓗ	Ⓗ ⓗ	Ⓗ ⓗ	Ⓗ ⓗ	аш, ха
I i	<i>I i</i>	I i	<i>I i</i>	Ⓘ ⓢ	Ⓘ ⓢ	Ⓘ ⓢ	Ⓘ ⓢ	и
J j	<i>J j</i>	J j	<i>J j</i>	⓫ ⓣ	⓫ ⓣ	⓫ ⓣ	⓫ ⓣ	жи, йот
K k	<i>K k</i>	K k	<i>K k</i>	⓬ ⓤ	⓬ ⓤ	⓬ ⓤ	⓬ ⓤ	ка
L l	<i>L l</i>	L l	<i>L l</i>	⓭ ⓥ	⓭ ⓥ	⓭ ⓥ	⓭ ⓥ	эль
M m	<i>M m</i>	M m	<i>M m</i>	⓮ ⓦ	⓮ ⓦ	⓮ ⓦ	⓮ ⓦ	эм
N n	<i>N n</i>	N n	<i>N n</i>	⓯ ⓧ	⓯ ⓧ	⓯ ⓧ	⓯ ⓧ	эн
O o	<i>O o</i>	O o	<i>O o</i>	⓰ ⓨ	⓰ ⓨ	⓰ ⓨ	⓰ ⓨ	о
P p	<i>P p</i>	P p	<i>P p</i>	⓱ ⓩ	⓱ ⓩ	⓱ ⓩ	⓱ ⓩ	пэ
Q q	<i>Q q</i>	Q q	<i>Q q</i>	⓲ ⓴	⓲ ⓴	⓲ ⓴	⓲ ⓴	ку
R r	<i>R r</i>	R r	<i>R r</i>	⓳ ⓶	⓳ ⓶	⓳ ⓶	⓳ ⓶	эр
S s	<i>S s</i>	S s	<i>S s</i>	⓴ ⓷	⓴ ⓷	⓴ ⓷	⓴ ⓷	эс
T t	<i>T t</i>	T t	<i>T t</i>	⓵ ⓸	⓵ ⓸	⓵ ⓸	⓵ ⓸	тэ
U u	<i>U u</i>	U u	<i>U u</i>	⓶ ⓹	⓶ ⓹	⓶ ⓹	⓶ ⓹	у
V v	<i>V v</i>	V v	<i>V v</i>	⓷ ⓺	⓷ ⓺	⓷ ⓺	⓷ ⓺	вэ
W w	<i>W w</i>	W w	<i>W w</i>	⓸ ⓻	⓸ ⓻	⓸ ⓻	⓸ ⓻	дубль-вэ
X x	<i>X x</i>	X x	<i>X x</i>	⓹ ⓼	⓹ ⓼	⓹ ⓼	⓹ ⓼	икс
Y y	<i>Y y</i>	Y y	<i>Y y</i>	⓺ ⓽	⓺ ⓽	⓺ ⓽	⓺ ⓽	игрек
Z z	<i>Z z</i>	Z z	<i>Z z</i>	⓻ ⓿	⓻ ⓿	⓻ ⓿	⓻ ⓿	зэт

Таблица 2. Греческий алфавит

Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ ϱ	ро
Β β	бета	Κ κ ϰ	каппа	Σ σ ς	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	мю (ми)	Υ υ	ипсилон
Ε ε ϵ	эпсилон	Ν ν	ню (ни)	Φ φ ϕ	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ ϑ	тэта	Π π ϖ	пи	Ω ω	омега

1.3. Многие символы раз и навсегда зарезервированы для часто встречающихся объектов; например, буквы ажурного шрифта $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ традиционно используются для обозначения множеств натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел соответственно.

Б. Переменные.

1.4. Под *переменной* в математике понимается символ (обычно буква или буква с индексами), служащий для обозначения произвольного объекта из некоторой фиксированной совокупности объектов, называемой *областью возможных значений* рассматриваемой переменной. Часто область возможных значений переменной явно не указывается, но из контекста ясно, какова эта область.

1.5. Если переменная употребляется таким образом, что допускается подстановка вместо неё любых объектов из области её возможных значений, то переменная называется *свободной*.

1.6. Однако в математике встречается и другое употребление переменных, при котором не предполагается и не допускается подстановка конкретных объектов вместо переменной. Например, в выражении

$$\int_0^1 x^3 dx,$$

где x — вещественная числовая переменная, нельзя подставлять вместо x какие-либо конкретные числа: например, запись

$$\int_0^1 5^3 d5$$

бессмысленна. В таких случаях, т.е. когда по смыслу выражения, содержащего переменную, подстановка конкретных объектов вместо переменной недопустима, эта переменная называется *связанной*. В сущности, связанная переменная не является переменной; её было естественно считать переменной на некотором (раннем) этапе образования рассматриваемого выражения из более простых выражений.

1.7. Связанную переменную можно произвольным образом переименовать (т.е. обозначить другой буквой), при этом смысл выражения не изменится; так,

$$\int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 y^3 dy = \int_0^1 \xi^3 d\xi = \frac{1}{4}.$$

1.8. В одном выражении могут встречаться одновременно и свободные, и связанные переменные; например, в выражении

$$\int_0^1 (xy)^3 dx$$

переменная x является связанной, а y — свободной. Различение свободных и связанных вхождений переменной в выражение важно для правильного понимания смысла выражения.

В. Знак равенства. Символ $=$ используется в математике в разных смыслах.

1.9. Чаще всего символ $=$ употребляется в смысле, описываемом словами «два имени одного и того же объекта». Например, выражение $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ означает, что $2 \cdot 6$ и $3 \cdot 4$ — два имени одного и того же числа (одно и то же число). Этот смысл символа $=$ будем считать его главным смыслом.

1.10. В другом смысле символ $=$ используется в уравнениях; например, когда рассматривается уравнение $x + 2 = 4$, то вовсе не утверждается, что $x + 2$ и 4 — два имени одного и того же, но требуется найти такие x , что значения выражений $x + 2$ и 4 совпадают.

1.11. Для указания тождественного равенства двух выражений (т.е. их совпадения для всех значений переменных из области возможных значений) вместо символа $=$ часто используется символ $\equiv$; например, $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ для всех вещественных чисел x

и $y; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \equiv x + 1$ для всех вещественных $x \neq 1$ (здесь требуется указание о том, для каких значений переменной имеет место тождественное равенство).

1.12. В *определениях* символ $=$ имеет смысл знака присваивания имени вновь определяемому понятию, например, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ при $n \geq 1$: здесь слева от знака $=$ стоит имя $n!$, которым обозначается произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно (*факториал* натурального числа n). В случаях, когда символ $=$ используется в указанном смысле, часто употребляются символы $\stackrel{\text{def}}{=}$ и $:=$ («равенство по определению»); так, в рассмотренном примере лучше записать $n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ или $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

1.13. Упомянем ещё одно широко распространённое обозначение. Тот факт, что целочисленная переменная j принимает значения в множестве $\{m, m+1, \dots, m+n\}$, состоящем из последовательных целых чисел, записывается тремя равносильными способами:

$$j \in \{m, m+1, \dots, m+n\}; \quad j = m, m+1, \dots, m+n; \quad j = \overline{m, m+n}.$$

Г. Факториал.

1.14. *Факториалом* $n!$ натурального числа n называется произведение $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. По определению полагают $0! = 1$. Итак,

$$0! = 1, \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

1.15. Значения факториала быстро растут при увеличении n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

В курсе анализа доказывается *формула Стирлинга*, дающая приближённое значение $n!$ при больших значениях n :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (1.1)$$

где $\pi \approx 3,14159\dots$ — число π (отношение длины окружности к её диаметру), $e \approx 2,71828\dots$ — число e (основание натуральных логарифмов). Символ $\sim$ означает, что отношение левой и правой частей в формуле Стирлинга стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. Хотя разность правой и левой частей в формуле Стирлинга неограниченно

возрастает, относительная ошибка быстро убывает. Например, при $n = 10$ относительная ошибка составляет менее одного процента:

$$b = \sqrt{2\pi \cdot 10} \cdot \left(\frac{10}{e}\right)^{10} \approx 3\,598\,696, \quad \frac{10! - b}{10!} \approx 0,0083.$$

1.16. В дальнейшем также используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n), \\ (2n+1)!! &= 1 \cdot 3 \dots (2n-1)(2n+1). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$n! = (n-1)!! \cdot n!!.$$

1.17. Рассмотрим множество, состоящее из n элементов, и расположим его элементы «в очередь» различными способами. Нетрудно убедиться, что число различных «очередей» равно $n!$ (подробнее см. п. 2.6).

Д. Символ суммирования. Типичный пример использования связанной переменной — *символ суммирования* $\sum$.

1.18. Пусть $A(k)$ — выражение, содержащее целочисленную переменную k и принимающее числовые значения, и пусть a, b — целые числа. Введём следующее обозначение:

$$\sum_{k=a}^b A(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A(a), & \text{если } b = a, \\ A(a) + A(a+1) + \dots + A(b), & \text{если } b > a, \\ 0, & \text{если } b < a. \end{cases}$$

Значение выражения $\sum_{k=a}^b A(k)$ является числом, которое зависит от значений a и b , а буква k является связанной переменной; в данном контексте её называют *индексом суммирования*. Как и любую связанную переменную, индекс суммирования можно произвольным образом переобозначить:

$$\sum_{k=a}^b A(k) = \sum_{n=a}^b A(n) = \sum_{\mu=a}^b A(\mu).$$

1.19. Подобно символу суммирования $\sum$ определяется и символ перемножения:

$$\prod_{k=a}^b A(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A(a), & \text{если } b = a, \\ A(a) \cdot A(a+1) \cdot \dots \cdot A(b), & \text{если } b > a, \\ 1, & \text{если } b < a; \end{cases}$$

разумеется, индекс k является связанной переменной и допускает произвольное переобозначение.

1.20. Из школьного курса математики читателю хорошо известны следующие свойства операций сложения и умножения чисел:

- (i) переместительное свойство, или *коммутативность*: для любых чисел a и b

$$a + b = b + a, \quad ab = ba;$$

- (ii) сочетательное свойство, или *ассоциативность*: для любых чисел a , b и c

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc);$$

- (iii) распределительное свойство, или *дистрибутивность*: для любых чисел a , b и c

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Суммы и произведения, состоящие из большего числа слагаемых (сомножителей), также обладают подобными свойствами:

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b c \cdot A(k) &= c \cdot \sum_{k=a}^b A(k), \\ \sum_{k=a}^b A(k) + \sum_{k=a}^b B(k) &= \sum_{k=a}^b (A(k) + B(k)), \\ \sum_{k=a}^b \left[\sum_{l=c}^d A(k, l) \right] &= \sum_{l=c}^d \left[\sum_{k=a}^b A(k, l) \right], \\ \sum_{k=a}^b \left[\sum_{l=c}^d B(k) \cdot A(k, l) \right] &= \sum_{k=a}^b \left[B(k) \cdot \sum_{l=c}^d A(k, l) \right], \\ \prod_{k=a}^b A(k) \cdot \prod_{k=a}^b B(k) &= \prod_{k=a}^b (A(k) \cdot B(k)), \\ \prod_{k=a}^b \left[\prod_{l=c}^d A(k, l) \right] &= \prod_{l=c}^d \left[\prod_{k=a}^b A(k, l) \right]. \end{aligned}$$

1.21. При преобразовании сумм и произведений, записанных при помощи символов $\sum$ и $\prod$, часто выполняют замену индекса. Например, в сумме $\sum_{j=0}^n a_j$ индекс суммирования j изменяется от 0 до n (т.е. принимает $n + 1$ значений, так что и сумма содержит $n + 1$

слагаемых). Если положить $k = j + 1$, то индекс k будет изменяться от 1 до $n + 1$, а сумму можно записать в виде $\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{j=0}^n a_j.$$

Е. Метод математической индукции. Метод математической индукции представляет собой метод доказательства общих утверждений, зависящих от натурального параметра n . В основе этого метода лежит следующая аксиома, называемая принципом математической индукции.

1.22. Аксиома (принцип математической индукции). Пусть $P(n)$ — некоторое утверждение, зависящее от натурального параметра n . Если утверждение $P(1)$ истинно (база индукции) и доказано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ из истинности утверждения $P(n)$ вытекает истинность утверждения $P(n + 1)$ (шаг индукции), то утверждение P является тождественно истинным.

1.23. Доказательство, основанное на принципе математической индукции, состоит всегда из двух частей:

- (i) доказательство *базы индукции*, истинности утверждения $P(1)$;
- (ii) проведение *индукционного шага*, т.е. доказательство истинности утверждения $P(n + 1)$ в предположении истинности утверждения $P(n)$ (*индукционная гипотеза*).

В ряде случаев бывает полезным следующий вариант принципа математической индукции.

1.24. Аксиома (принцип полной математической индукции). Пусть имеется последовательность утверждений $P(1), P(2), \dots, P(n), \dots$, зависящих от натурального параметра n . Если для любого натурального $n > 1$ из истинности всех $P(1), \dots, P(n)$ вытекает истинность $P(n + 1)$, то утверждения $P(n)$ истинны для всех натуральных n .

2. Примеры решения задач

Пример 1.1. Докажите тождество

$$\sum_{k=1}^n k(k + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2). \quad (1.2)$$

Решение. База индукции состоит в проверке соотношения (1.2) при $n = 1$, т.е.

$$\sum_{k=1}^1 k(k+1) \equiv 1 \cdot (1+1) \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2);$$

оно, очевидно, является верным.

Индукционная гипотеза: предположим, что соотношение (1.2) верно при некотором n :

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Индукционный шаг: требуется доказать, что будет верным аналог соотношения (1.2), полученный заменой n на $n+1$, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &\equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) = \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \equiv \left[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) \right] + (n+1) \cdot (n+2) =$$

заменим выражение в квадратных скобках на правую часть (1.2)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1) \cdot (n+2) = \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Пример 1.2. Докажите, что если $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ и для любого натурального k имеет место соотношение $x_{k+1} = 3x_k - 2x_{k-1}$, то $x_n = 2^n + 1$.

Решение. База индукции состоит в проверке утверждения при $n = 0$ и $n = 1$:

$$x_0 = 2 \stackrel{?}{=} 2^0 + 1 = 2, \quad x_1 = 3 \stackrel{?}{=} 2^1 + 1 = 3.$$

Предположим, что

$$x_{n-1} = 2^{n-1} + 1, \quad x_n = 2^n + 1;$$

проведём индукционный шаг:

$$x_{n+1} = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 2^{n+1} + 1.$$

Пример 1.3. Докажите, что для любого $x > -1$ и любого натурального n выполняется следующее неравенство, называемое *неравенством Бернулли*:

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad (1.3)$$

При каком условии неравенство является строгим?

Решение. База индукции ($n=1$): $(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$; соотношение выполняется в виде равенства.

Предположив, что $(1+x)^n \geq 1+nx$ при некотором натуральном $n \geq 1$ (индукционная гипотеза), докажем, что

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

Поскольку $1+x > 0$, имеем

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

Последнее неравенство в этой цепочке будет строгим, если $nx^2 \neq 0$, т.е. $x \neq 0$; поэтому неравенство (1.3) также будет строгим при $n > 1$ и $-1 < x \neq 0$.

Пример 1.4. Докажите, что при $n \geq 3$ выполняется неравенство

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Решение. Базой индукции является утверждение при $n=3$: $3^4 > 4^3 \iff 81 > 64$. Разделив обе части доказываемого неравенства на n^n , перепишем его в виде

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Используя последнее неравенство как индукционную гипотезу, проведём индукционный шаг, т.е. установим справедливость неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < n+1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}_{<1+\frac{1}{n}} \left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \\ < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) < n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = n + \frac{n}{n+1} < n+1. \end{aligned}$$

Пример 1.5. Докажите, что для любых n положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих условию $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, справедливо неравенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n. \quad (1.4)$$

Решение. База индукции ($n = 1$): $x_1 = 1$, так что неравенство (1.4) выполнено в виде равенства. Проведём индукционный шаг, т.е. докажем, что для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, произведение которых равно 1, выполняется неравенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1. \quad (1.5)$$

Если все эти числа равны 1, то их сумма равна $n + 1$, т.е. (1.5) выполняется в виде равенства. Если же среди рассматриваемых чисел хотя бы одно < 1 , то обязательно найдется число > 1 ; не ограничивая общности, будем считать, что $x_n < 1$, $x_{n+1} > 1$. Рассмотрим n чисел $x_1, \dots, x_{n-1}, (x_n x_{n+1})$; их произведение равно 1, так что согласно индукционной гипотезе

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) \geq n.$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства x_n и x_{n+1} , получаем

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) + x_n + x_{n+1} &\geq n + x_n + x_{n+1} \iff \\ \iff x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} &\geq n + x_n + x_{n+1} - (x_n x_{n+1}) = \\ = n + 1 + x_n + x_{n+1} - (x_n x_{n+1}) - 1 &= n + 1 + \underbrace{(1 - x_n)}_{>0} \underbrace{(x_{n+1} - 1)}_{>0} > n + 1. \end{aligned}$$

Пример 1.6. Найдите ошибку в следующем рассуждении. Докажем следующее утверждение $P(n)$: «в любом наборе из n натуральных чисел все числа равны».

База индукции: утверждение $P(1)$ означает, что «каждое число равно самому себе», что, очевидно, верно.

Проведём индукционный переход. Предположим, что утверждение $P(n)$ справедливо (индукционная гипотеза). Рассмотрим набор $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$, состоящий из $n + 1$ чисел. Применим утверждение $P(n)$ к наборам $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$, каждый из которых состоит из n чисел. Из этого утверждения следует, что и в одном, и в другом наборе все числа равны:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n, \quad a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1}. \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$, т.е. утверждение $P(n)$ верно.

Решение. Ошибка состоит в том, что база индукции сформулирована неверно. Для $n = 1$ цепочки равенств (1.6) вырождаются: первая имеет вид $a_1 = a_1$, а вторая — $a_2 = a_2$. Из этих равенств не следует, что $a_1 = a_2$. При $n > 1$ ситуация иная: в первой цепочке есть

равенство $a_1 = a_2$, а во второй — равенство $a_2 = a_{n+1}$, откуда уже следует, что $a_1 = a_{n+1}$. Итак, в качестве базы индукции требуется взять утверждение $P(2)$: «в любом наборе из двух натуральных чисел все числа равны», которое верным не является.

3. Задачи для самостоятельного решения

1.1 (р). Запишите без использования символа суммирования следующие суммы, перечислив слагаемые в явном виде, и вычислите значение суммы:

$$(a) \sum_{k=1}^n k; \quad (б) \sum_{p=0}^m a^p \ (a \neq 0); \quad (в) \sum_{j=1}^N \frac{1}{j(j+1)}.$$

1.2. Докажите методом математической индукции следующие тождества:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3); \\ (б) \quad & \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1); \quad (в) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2; \\ (г) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}; \quad (д) \quad \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

1.3. Докажите, что если

$$x_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, \quad x_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

и для любого натурального $k > 2$ имеет место соотношение

$$x_k = (\alpha + \beta)x_{k-1} - \alpha\beta x_{k-2},$$

то

$$x_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

1.4. Докажите, что

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ знаков корня}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

1.5. Докажите следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 \text{(а)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} &> \sqrt{n}, \quad n > 1; & \text{(б)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &< 2; \\
 \text{(в)} \quad \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}; & \text{(г)} \quad \frac{(2n)!}{(n!)^2} &> \frac{4^n}{n+1}.
 \end{aligned}$$

1.6. Докажите обобщённое неравенство Бернулли: если все числа $x_1, \dots, x_n$ одного знака, отличны от 0 и больше -1 , то

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) > 1 + \sum_{k=1}^n x_k.$$

1.7 (у). Докажите следующее неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}, \quad (1.7)$$

где все числа $x_1, \dots, x_n$ неотрицательны.

1.8 (у). Число x таково, что число $x + 1/x$ целое. Докажите, что для любого натурального n число $x^n + 1/x^n$ также является целым.

1.9 (у). Последовательностью Фибоначчи называется последовательность натуральных чисел F_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, заданная рекуррентно соотношениями

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}.$$

Докажите, что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (1 - \varphi)^n \right),$$

где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ — положительный корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ (так называемое «золотое сечение»).

1.10. Докажите следующие соотношения для чисел Фибоначчи (см. задачу 1.9):

$$\begin{aligned}
 \text{(а)} \quad \sum_{k=0}^n F_k &= F_{n+2} - 1; & \text{(б)} \quad \sum_{k=0}^n F_{2k+1} &= F_{2n+2}; \\
 \text{(в)} \quad \sum_{k=0}^n F_{2k} &= F_{2n+1} - 1; & \text{(г)} \quad \sum_{k=0}^n F_k^2 &= F_n F_{n+1}; \\
 \text{(д)} \quad F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n; & \text{(е)} \quad F_n^2 + F_{n+1}^2 &= F_{2n+1}.
 \end{aligned}$$

ГЛАВА 2

Комбинаторика

1. Основные понятия и факты

А. Предмет комбинаторики. Комбинаторика — это раздел математики, в котором изучаются конечные множества и различные комбинации их элементов (комбинаторные конфигурации). Основными типами комбинаторных конфигураций являются *размещения, перестановки и сочетания*.

2.1. *Мощностью* конечного множества A называется натуральное число, равное количеству элементов этого множества, и обозначаемое $|A|$, $\text{card } A$, $\#A$ (мы используем первое из этих обозначений). Конечное множество A мощности n для краткости будем называть *n -множеством*. Мощность пустого множества равна нулю: $|\emptyset| = 0$.

При решении комбинаторных задач используются следующие интуитивно очевидные правила.

2.2. *Правило произведения:* если объект α можно выбрать a способами, а после каждого выбора объекта α объект β можно выбрать b способами, то упорядоченную пару элементов (α, β) можно выбрать ab способами.

2.3. *Правило суммы:* если объект α можно выбрать a способами, а объект β — b способами, то выбор объекта α *или* β можно осуществить $a + b$ способами.

Б. Размещения.

2.4. *Размещением* объёма k из элементов данного n -множества A (k -размещением, размещением из n по k) называется произвольная упорядоченная последовательность $(a_1, \dots, a_k)$, состоящая из k элементов множества A (также говорят, что k -размещение — это упорядоченная выборка объёма k из множества A). Если все элементы последовательности $(a_1, \dots, a_k)$ различны, говорят о *бесповторной* упорядоченной выборке (размещении без повторений), в противном случае упорядоченная выборка называется *повторной* (размещение с повторениями).

2.5. Теорема. 1. Число $\overline{A}_n^k$ повторных упорядоченных выборок объёма k из n -множества, т.е. число размещений с повторениями из n по k , равно

$$\overline{A}_n^k = n^k. \quad (2.1)$$

2. Число A_n^k бесповторных упорядоченных выборок объёма k ($k \leq n$) из n -множества, т.е. число размещений без повторений из n по k , равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. При формировании выборки с повторениями $(a_1, \dots, a_k)$ в качестве первого элемента a_1 может быть взят любой элемент исходного n -множества, т.е. имеется n способов выбора; это же относится к выбору каждого последующего элемента. Согласно правилу произведения получаем требуемый результат. Отметим, что объём k повторной выборки может быть больше, чем мощность n множества: после каждого акта выбора очередного элемента в состав выборки этот элемент возвращается в исходное множество (может быть выбран повторно).

2. При образовании бесповторной выборки $(a_1, \dots, a_k)$ в качестве первого элемента a_1 может быть взят любой элемент исходного n -множества, т.е. имеется n способов выбора; в качестве второго элемента a_2 может быть взят любой элемент исходного n -множества, кроме a_1 , т.е. имеется $n - 1$ способов выбора. При выборе каждого последующего элемента число способов выбора уменьшается на 1, и для выбора элемента a_k имеется $n - k + 1$ возможностей. Ясно, что объём k бесповторной выборки не может превышать мощность n множества: после каждого акта выбора очередного элемента в состав выборки этот элемент из исходного множества удаляется. Согласно правилу произведения имеем

$$\begin{aligned} A_n^k &= \underbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}} = \\ &= n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot \overbrace{\frac{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}}^{\text{дробь равна } 1} = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

□

В. Перестановки и подстановки.

2.6. Размещения без повторений объёма n , составленные из элементов n -множества A , называются *перестановками* элементов множества A . Используя формулу (2.2) при $k = n$, находим число P_n перестановок элементов n -множества:

$$P_n = n!. \quad (2.3)$$

Множество всех перестановок n -множества обозначается S_n ; более подробно оно рассматривается в п. ?? (см. с. ??).

2.7. Наряду с понятием *перестановки* часто используется близкое по содержанию понятие *подстановки*. Рассмотрим произвольное взаимно однозначное отображение (функцию) σ n -элементного множества $A = \{1; 2; \dots; n\}$ на себя; каждую такую функцию можно представить таблицей, в первой строке которой указаны значения аргумента $j \in A$, а во второй строке — соответствующие значения $\sigma(j)$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Такую функцию (и соответствующую ей таблицу) будем называть *подстановкой* из n элементов. Вторая строка $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ таблицы при этом, очевидно, является *перестановкой* элементов множества A .

2.8. Если в записи подстановки (2.4) произвольным образом переставить столбцы соответствующей таблицы, то сама подстановка (рассматриваемая как отображение $j \mapsto \sigma(j)$) не изменится:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \sigma(k_1) & \sigma(k_2) & \dots & \sigma(k_n) \end{bmatrix}.$$

Г. Сочетания и биномиальные коэффициенты. *Сочетанием* объёма k из элементов данного n -множества A (k -сочетанием, сочетанием из n по k) называется произвольное k -подмножество множества A . Сочетания называют также *неупорядоченными бесповторными выборками*.

2.9. Теорема. Число C_n^k неупорядоченных бесповторных выборов объёма k из n -множества, т.е. количество k -подмножеств n -множества (число сочетаний из n по k) равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.5)$$

Числа C_k^n называются *биномиальными коэффициентами*; причина такого названия вскоре выяснится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое k -сочетание из элементов данного n -множества можно превратить в бесповторное k -размещение, упорядочивая его элементы различными способами; количество таких способов равно, очевидно, $k!$. Таким образом, каждому сочетанию отвечает $k!$ бесповторных размещений, поэтому

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \square$$

2.10. Теорема. *Биномиальные коэффициенты C_n^k обладают следующими свойствами:*

$$1. \quad C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n; \quad (2.6)$$

$$2. \quad C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ сомножителей}}}{\underbrace{k(k-1) \cdots 1}_{k \text{ сомножителей}}}; \quad (2.7)$$

$$3. \quad C_n^{n-k} = C_n^k; \quad (2.8)$$

$$4. \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (2.6), (2.7) вытекают непосредственно из формулы (2.5). Докажем (2.8):

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

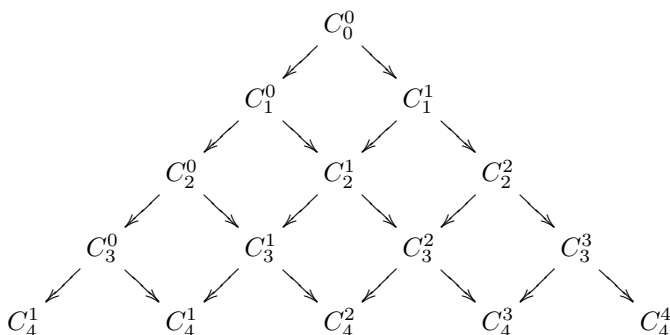
Отметим, что соотношение (2.8) имеет простой комбинаторный смысл: каждая выборка (извлечение) k элементов из n -множества означает одновременно выборку $n-k$ элементов (оставшихся после извлечения).

Докажем (2.9) прямым вычислением:

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

Можно доказать это равенство и с помощью комбинаторных рассуждений. Предположим, что из урны, содержащей 1 чёрный и n белых шаров, требуется извлечь $k + 1$ шаров; это можно сделать C_{n+1}^{k+1} способами. Если в состав выборки входит чёрный шар, то оставшиеся шары (белые) могут быть выбраны C_n^k способами; если же в состав выборки чёрный шар не входит, то выборка может быть сформирована C_n^{k+1} способами. По правилу сложения $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. $\square$

На свойстве (2.9) основан простой способ вычисления чисел C_n^k , который можно проиллюстрировать следующей диаграммой:



Как указывает формула (2.9), каждое число C_{n+1}^{k+1} равно сумме чисел C_n^k и C_n^{k+1} , расположенных в диаграмме над C_{n+1}^{k+1} . Приведённая диаграмма носит название треугольника Паскаля. Отметим, что нумеровать строки треугольника принято сверху вниз, *начиная с нуля* (т.е. номер строки равен соответствующему значению n), а нумеровать числа C_n^k , стоящие в n -й строке, принято слева направо, также *начиная с нуля* (т.е. номер числа в строке равен соответствующему значению k). В соответствии с этим соглашением C_n^k — это k -е число в n -й строке треугольника Паскаля. Первые восемь строк (с нулевой по седьмую включительно) треугольника Паскаля приведены на рис. 2.1

2.11. Если в треугольнике Паскаля все места, занимаемые нечётными числами, окрасить в чёрный цвет, а чётными — в белый, то образуется орнамент, напоминающий один из известных *фракталов* — *треугольник Серпинского*¹, причём при увеличении числа строк треугольника Паскаля сходство становится все более отчетливым. В пределе, когда число строк треугольника Паскаля

¹Вацлав Серпинский (Wacław Sierpiński; 1882–1969) — польский математик.

$n = 0$										1														
$n = 1$										1		1												
$n = 2$										1		2		1										
$n = 3$										1		3		3		1								
$n = 4$										1		4		6		4		1						
$n = 5$										1		5		10		10		5		1				
$n = 6$										1		6		15		20		15		6		1		
$n = 7$										1		7		21		35		35		21		7		1

Рис. 2.1. Треугольник Паскаля

неограниченно возрастает, но периметр остается постоянным, и получается треугольник Серпинского.

2.12. Неформально говоря, фрактал — это сложная геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, т.е. составленная из частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. Для фрактала увеличение масштаба («рассматривание фигуры под микроскопом») не ведет к упрощению структуры: на всех шкалах мы увидим одинаково сложную картину.

2.13. Треугольник Серпинского строится следующим образом. Разделим правильный треугольник T_0 на четыре равных правильных треугольника прямыми, параллельными его сторонам. Удалив центральный треугольник, получим множество T_1 , состоящее из трёх оставшихся треугольников; назовем их треугольниками «первого ранга». Поступая точно так же с каждым из треугольников первого ранга, получим множество T_2 , состоящее из девяти равных правильных треугольников второго ранга. Продолжая процесс, получим бесконечную последовательность треугольников $T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_n \supset \dots$; пересечение её членов и называется треугольником Серпинского.

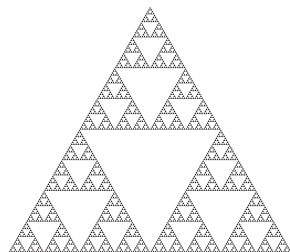


Рис. 2.2. Треугольник Серпинского

Д. Бином Ньютона. Известные из школьного курса формулы сокращённого умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

допускают обобщение на случай произвольного натурального показателя. Обратим внимание, что числовые коэффициенты в последовательных слагаемых правых частей приведённых формул равны числам, стоящим во второй и третьей строках треугольника Паскаля. Это наблюдение подтверждается следующей теоремой.

2.14. Теорема. *Для любых чисел a и b и любого натурального n справедлива следующая формула, называемая формулой бинома Ньютона:*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \\ &= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \\ &\quad + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \quad (2.10)\end{aligned}$$

Появление чисел C_n^k в формуле бинома Ньютона объясняет их наименование «биномиальные коэффициенты».

Приведём два доказательства формулы.

ИНДУКТИВНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу Ньютона *методом математической индукции*. Установим сначала базу индукции, т.е. справедливость формулы (2.10) при $n = 1$:

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b$$

(впрочем, формула (2.10) при $n = 2$ и $n = 3$ также хорошо известна).

Предположение индукции состоит в том, что формула (2.10) верна при некотором значении n . Наша задача — пользуясь формулой (2.10), вывести её справедливость для показателя степени $n+1$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \right) = \\ &= a \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \right) + b \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^{p+1} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^{n-k+1} b^k + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} C_n^p a^{n-p} b^{p+1}}_{\substack{\text{Замена } k = p+1, p = k-1, \\ p=0, \dots, n-1, k=1, \dots, n.}} + b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^n C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^k}_{\text{подобные слагаемые}} + b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{(C_n^k + C_n^{k-1})}_{=C_n^k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \\
&= C_{n+1}^0 a^{n+1} + \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{(n+1)-k} b^k.
\end{aligned}$$

КОМБИНАТОРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскрывая скобки в произведении

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)}_{n \text{ сомножителей}},$$

получим сумму 2^n слагаемых, каждое из которых имеет вид $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$, где каждый множитель d_i равен либо a , либо b . Разобьём все слагаемые на несколько подмножеств, относя к подмножеству B_k те слагаемые, в которых b встречается k раз, а a — $n-k$ раз; здесь, очевидно, k может принимать значения от 0 до n . Ясно, что $|B_k| = C_n^k$. Поскольку каждое слагаемое из B_k равно $a^{n-k}b^k$, получаем

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n |B_k| a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \quad \square$$

2. Примеры решения задач

Пример 2.1. Докажите следующие соотношения:

$$(a) \quad C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m \leq r; \quad (2.11)$$

$$(б) \quad C_{m+n}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0, \quad 0 \leq k \leq \min(m, n); \quad (2.12)$$

$$(в) \quad C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2; \quad (2.13)$$

$$(г) \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}. \quad (2.14)$$

Решение. (а) Формулу можно проверить прямым вычислением, упростив левую и правую часть:

$$C_r^m C_m^k = \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{r!}{(r-m)!k!(m-k)!},$$

$$C_r^k C_{r-k}^{m-k} = \frac{r!}{k!(r-k)!} \cdot \frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-m)!} = \frac{r!}{k!(m-k)!(r-m)!}.$$

(б) В равенстве $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ одночлен $C_{m+n}^k x^k$ в левой части получается как сумма одночленов

$$C_n^0 \cdot C_m^k x^k, \quad C_n^1 x \cdot C_m^{k-1} x^{k-1}, \quad C_n^2 x^2 \cdot C_m^{k-2} x^{k-2}, \quad \dots, \quad C_n^k x^k \cdot C_m^0.$$

(в) Достаточно положить $k = m = n$ в формуле (2.12).

(г) Запишем формулу (2.9) в виде $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. Применяя её последовательно, получим

$$\begin{aligned} C_n^k &= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k = \\ &= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k = \dots \end{aligned}$$

На последнем шаге воспользуемся равенством $C_k^k = C_{k-1}^{k-1}$.

Пример 2.2. Докажите следующую связь чисел Фибоначчи (см. задачу 1.9) и биномиальных коэффициентов:

$$F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots \quad (2.15)$$

Это соотношение означает, что если строки треугольника Паскаля выровнять по левому краю, то суммы чисел, расположенных вдоль наклонных линий («диагоналей»), идущих слева направо и снизу вверх (см. рис. 2.3), равны числам Фибоначчи.

Решение. Положим $S_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$ и проверим, что суммы S_n удовлетворяют рекуррентному определению чисел Фибоначчи:

$$\begin{aligned} S_0 &= C_0^0 = 1, \quad S_1 = C_1^0 = 1, \quad S_2 = C_2^0 + C_1^1 = 2, \\ S_n &= C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots = \\ &= C_{n-1}^0 + (C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1) + (C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2) + \dots = \\ &= (C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots) + (C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2 + \dots) = \\ &= S_{n-1} + S_{n-2}. \end{aligned}$$

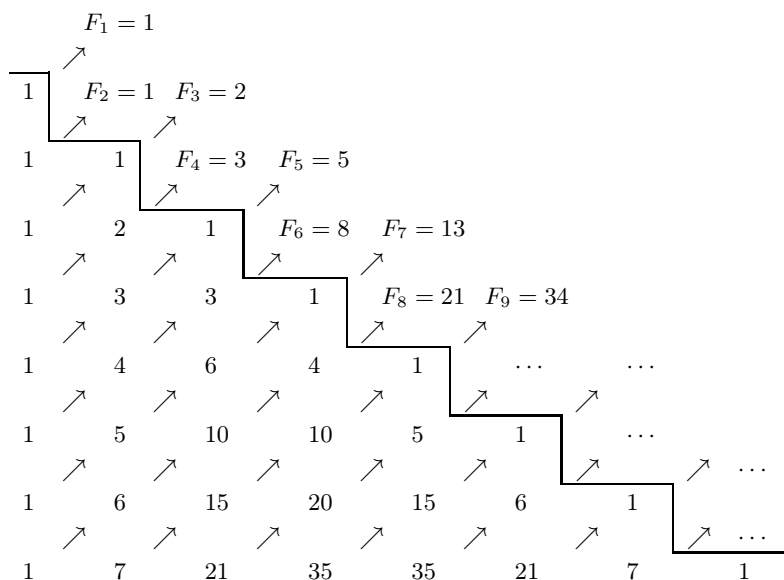


Рис. 2.3. Числа Фибоначчи и треугольник Паскаля.

Пример 2.3. Вычислите сумму $\sum_{k=1}^n k C_n^k$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

Дифференцируя, находим:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right)' = \sum_{k=1}^n C_n^k k x^{k-1}.$$

Подставляя в эту формулу $x = 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = f'(1) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Пример 2.4. Докажите, что для любого натурального числа n имеет место формула

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \frac{C_n^2}{x+2} - \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n}.$$

Решение. Многократно применяя равенство

$$\frac{1}{(x+k)(x+l)} = \frac{1}{l-k} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+l} \right),$$

запишем левую часть в виде

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{x+k},$$

где A_k — некоторые коэффициенты. Умножим обе части полученного равенства на $x(x+1)\dots(x+n)$ и подставим $x = -k$. Все слагаемые в правой части обратятся в нуль, кроме одного

$$A_k \cdot (-k)(-k+1)\dots(-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-k) = A_k \cdot (-1)^k k! (n-k)!,$$

откуда $A_k = (-1)^k C_n^k$.

3. Задачи для самостоятельного решения

2.1 (р). Для формул из примера 2.1 придумайте комбинаторные доказательства.

2.2 (у). Докажите формулы

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!, \quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}.$$

2.3 (у). Докажите формулы

$$(a) \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n, \quad (b) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0, \quad (c) \sum_{k=0}^n 2^k C_n^k = 3^n.$$

2.4 (у). Вычислите сумму $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$.

ГЛАВА 3

Комплексные числа

1. Основные понятия и факты

А. Понятие числового поля.

3.1. Числовое поле $\mathbb{K}$ — это множество чисел, в котором корректно выполняются четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число. (Приведённая формулировка не является точным определением (оно будет приведено в лекционном курсе, см. главу ??), но для первого знакомства с предметом она вполне достаточна.) Примерами числовых полей могут служить множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и целых чисел $\mathbb{Z}$ не являются числовыми полями, поскольку в них не выполняется операция деления (а в $\mathbb{N}$ ещё и вычитание).

3.2. Числовое поле $\mathbb{K}'$ называется *расширением* числового поля $\mathbb{K}$, если $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$; при этом поле $\mathbb{K}$ называется *подполем* поля $\mathbb{K}'$. Например, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, т.е. поле $\mathbb{Q}$ является подполем поля $\mathbb{R}$, а поле $\mathbb{R}$ является расширением поля $\mathbb{Q}$.

Б. Многочлены.

3.3. Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое числовое поле. *Многочлен* степени n (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — это функция вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_k \in \mathbb{K}$, $k = 0, \dots, n$, $a_0 \neq 0$. Если $a_0 = 1$, то многочлен называется *нормированным*. Множество всех многочленов от переменной x над полем $\mathbb{K}$ обозначается $\mathbb{K}[x]$. Многочлены изучаются более подробно в главе ??.

3.4. *Корнем* многочлена $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ называется такое число $c \in \mathbb{K}$, что $f(c) = 0$.

3.5. Числовое поле $\mathbb{K}$ называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ имеет корень $c \in \mathbb{K}$.

3.6. Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым, так как, например, многочлен $(x^2 - 2) \in \mathbb{Q}[x]$ не имеет рациональных корней. Если же рассматривать этот многочлен не как элемент множества $\mathbb{Q}[x]$, а как элемент множества $\mathbb{R}[x]$, то он имеет два корня $\pm\sqrt{2}$. Таким образом, переход от поля $\mathbb{Q}$ к его расширению $\mathbb{R}$ позволяет расширить класс многочленов, имеющих корни. Фактически построение указанного расширения осуществляется введением иррациональных чисел. Однако поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ всё ещё не является алгебраически замкнутым: многочлен $x^2 + 1$ не имеет вещественных корней.

В. Поле комплексных чисел. Построим расширение поля вещественных чисел, в котором извлечение квадратного корня из отрицательного числа становится возможным. Для этого введём «число» i , называемое *мнимой единицей* и обладающее свойством $i^2 = -1$; тогда, например,

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm i.$$

Рассмотрим далее множество, элементами которого являются объекты вида $x + iy$, где x и y — вещественные числа, а арифметические операции осуществляются так же, как операции над многочленами с учётом соотношения $i^2 = -1$. Такие объекты называются *комплексными числами*. Вещественные числа x и y называются соответственно *вещественной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = x + iy$ и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексные числа с нулевой вещественной частью ($0 + iy$) называются чисто мнимыми.

Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является числовым полем; чтобы убедиться в этом, нужно проверить, что все четыре арифметические операции выполнимы в этом множестве. Действительно, для любых $x + iy \in \mathbb{C}$ и $u + iv \in \mathbb{C}$ имеем

$$(x + iy) \pm (u + iv) = (x \pm u) + i(y \pm v) \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} (x + iy) \cdot (u + iv) &= xu + xiv + iyu + iyiv = \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{x + iy}{u + iv} &= \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(xu + yv) + i(yu - xv)}{u^2 + v^2} = \\ &= \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.7. Теорема (основная теорема алгебры). *Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгебраически замкнутым числовым полем. Иными словами, любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Для доказательства этой теоремы недостаточно одних лишь алгебраических методов, требуются ещё и средства математического анализа. Короткое доказательство будет приведено в курсе теории функции комплексной переменной.

Г. Операции над комплексными числами.

3.8. Теорема (свойства арифметических операций над комплексными числами). *Для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ выполняются следующие соотношения:*

- (i) коммутативность сложения: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- (ii) ассоциативность сложения: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
- (iii) коммутативность умножения: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- (iv) ассоциативность умножения: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;
- (v) дистрибутивность: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Доказательства всех этих утверждений очевидным образом следуют из определения операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел.

Пусть $z = x + iy$. Комплексное число $x - iy$ называется *сопряжённым* к z и обозначается $\bar{z} = x - iy$.

3.9. Теорема. *Операция сопряжения обладает следующими свойствами:*

- (i) инволютивность: $\bar{\bar{z}} = z$;
- (ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
- (iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
- (iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Очевидно, выполняются следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Д. Тригонометрическая форма записи. Каждое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой (x, y) координатной плоскости Oxy либо радиус-вектором этой точки. Координатная плоскость называется при такой интерпретации *плоскостью комплексных чисел*, ось Ox — *вещественной осью*, ось Oy — *мнимой осью*. Комплексное число $\bar{z}$, сопряжённое к z , геометрически изображается точкой, симметричной точке z относительно вещественной оси (см. рис. 3.1).

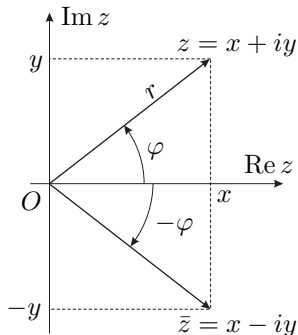


Рис. 3.1.

Точка $z = (x, y)$ на плоскости может быть задана не только декартовыми, но и *полярными координатами* (r, φ) , где r — расстояние от начала координат до точки, φ — ориентированный угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки. Очевидно, связь декартовых и полярных координат задаётся формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ 0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Число r называется *модулем* числа z , φ — его *аргументом*:

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z \stackrel{\text{def}}{=} \varphi.$$

Аргумент определён с точностью до слагаемого $2\pi n$, поэтому различают

- (i) *главное значение аргумента* — число $\arg z \in [0, 2\pi)$ (в некоторых задачах удобнее полагать $\arg z \in (-\pi, \pi]$);
- (ii) (*многозначный*) *аргумент* — множество

$$\text{Arg } z = \{\arg z + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\};$$

используются также записи

$$\text{Arg } z \equiv \arg z \pmod{2\pi}, \quad \text{Arg } z = \varphi \pmod{2\pi},$$

имеющие вполне очевидный смысл.

Комплексное число можно представить в *тригонометрической форме*:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Тригонометрическую форму удобно использовать при умножении комплексных чисел:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= r_1 r_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \right) = \\
&= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом¹,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Е. Формула Эйлера.

3.10. Определение. Показательная функция мнимого аргумента определяется следующим образом:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi;$$

эта формула называется *формулой Эйлера*.

Обратите внимание, что формула Эйлера является *определением* функции $e^{i\varphi}$, а потому не нуждается в доказательстве. Математический анализ доставляет множество веских аргументов в пользу целесообразности такого определения; вот один из них: функция $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ обладает свойством

$$f(\varphi_1) \cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1 + \varphi_2),$$

характерным для показательной функции.

Комплексное число можно представить в *показательной форме*:

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \text{Arg } z.$$

Показательная функция комплексного аргумента определяется при помощи формулы Эйлера: если $z = x + iy$, то

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Ж. Возведение комплексных чисел в целую степень. Формула Муавра. Тригонометрическая и показательная формы записи удобны при возведении комплексных чисел в степень:

$$\left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При $r = 1$ получаем отсюда *формулу Муавра*:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad (3.4)$$

которая полезна при преобразованиях тригонометрических выражений.

¹Вторая из этих формул означает, что для любого значения $\varphi \in \text{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ найдутся такие $\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$ и $\varphi_2 \in \text{Arg } z_2$, что $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

3. Извлечение корней. Число w называется *корнем n -й степени из числа z* , если $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{z} \iff w^n = z.$$

Представим числа w, z в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = Re^{i\Phi}.$$

Наша задача — по данным r, φ найти R, Φ . Имеем:

$$\begin{aligned} (Re^{i\Phi})^n = re^{i\varphi} &\iff R^n e^{in\Phi} = re^{i\varphi} \iff \\ \begin{cases} R^n = r, \\ n\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} &\iff \begin{cases} R = r^{1/n}, \\ \Phi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

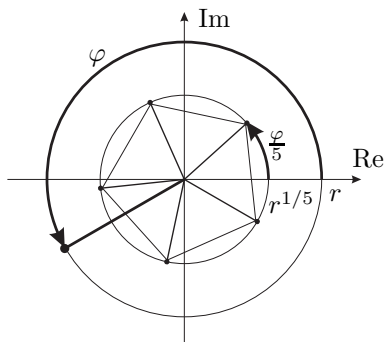


Рис. 3.2.

Таким образом, получается не одно, а несколько значений корня, однако различными будут только те, которые отвечают значениям $k = 0, 1, \dots, n-1$. Геометрически эти корни изображаются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $r^{1/n}$. На рис. 3.2 приведена иллюстрация, поясняющая извлечение корня пятой степени.

И. Извлечение квадратного корня. Извлечение квадратного корня можно осуществить, не обращаясь к показательной форме записи. Пусть $\sqrt{a+ib} = x+iy$, где $b \neq 0$. Тогда

$$a+ib = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Вещественные решения этой системы дают искомые значения квадратного корня.

К. Тригонометрические функции комплексного аргумента. Из формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

получаем, заменяя φ на $-\varphi$ и учитывая, что косинус — чётная функция, а синус — нечётная:

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Складывая или вычитая полученные равенства, находим

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Эти формулы позволяют ввести определения синуса и косинуса комплексного аргумента:

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (3.5)$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

легко проверяется. Все формулы для тригонометрических функций, справедливые для вещественных значений аргумента, остаются верными и для комплексных.

Л. Гиперболические функции. Гиперболические функции определяются равенствами, похожими на (3.5):

$$\operatorname{ch} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \quad (3.6)$$

Эти функции называются соответственно *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*; в зарубежной литературе их принято обозначать $\cosh z$ и $\sinh z$. Определим также *гиперболический тангенс* и *гиперболический котангенс*:

$$\operatorname{th} z \equiv \tanh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z \equiv \coth z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Сравнивая формулы (3.5) и (3.6), находим связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} iz &= \cos z, & \cos iz &= \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{sh} iz &= i \sin z, & \sin iz &= i \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют получить все соотношения для гиперболических функций из соответствующих соотношений для тригонометрических функций. В частности,

$$\begin{aligned} \operatorname{th} iz &= i \operatorname{tg} z, & \operatorname{cth} iz &= -i \operatorname{ctg} z, \\ \operatorname{tg} iz &= i \operatorname{th} z, & \operatorname{ctg} iz &= -i \operatorname{cth} z. \end{aligned}$$

2. Примеры решения задач

Пример 3.1. Докажите, что множество $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, состоящее из всех чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, является числовым полем.

Решение. Требуется проверить, что для любых чисел $(a + b\sqrt{2})$ и $(c + d\sqrt{2})$ их сумма, разность, произведение и частное имеют аналогичную структуру. Имеем:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) &= (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \\ (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].\end{aligned}$$

Для частного проверка несколько сложнее:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Пример 3.2. Вычислите значения выражений: (а) $(3 + 4i)(7 - 2i)$; (б) $\frac{29 + 22i}{7 - 2i}$.

Решение:

$$\begin{aligned}(3 + 4i)(7 - 2i) &= 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2i + 4i \cdot 7 - 4i \cdot 2i = 29 + 22i; \\ \frac{29 + 22i}{7 - 2i} &= \frac{(29 + 22i)(7 + 2i)}{(7 - 2i)(7 + 2i)} = \\ &= \frac{29 \cdot 7 + 29 \cdot 2i + 22i \cdot 7 + 22i \cdot 2i}{7^2 - (2i)^2} = \frac{159 + 212i}{53} = 3 + 4i.\end{aligned}$$

Пример 3.3. Выясните, какие множества точек на плоскости комплексной переменной z определяются условиями

$$(а) \quad \operatorname{Im} z^2 > 2; \quad (б) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Решение. (а) Пусть $z = x + iy$; тогда $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, т.е. $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию $2xy > 2$, т.е. $xy > 1$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах соответственно над и под гиперболой $xy = 1$ (см. рис. 3.3(а)).

(б) Комплексное число $z + 1 - i = z - (-1 + i)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1 + i$, а концом — точка z . Угол между этим вектором и вещественной осью осью меняется в пределах от $-\pi/2$ до $3\pi/4$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между лучами, исходящими из точки $-1 + i$ и составляющими с осью Ox углы $-\pi/2$ и $3\pi/4$ (см. рис. 3.3(б)).

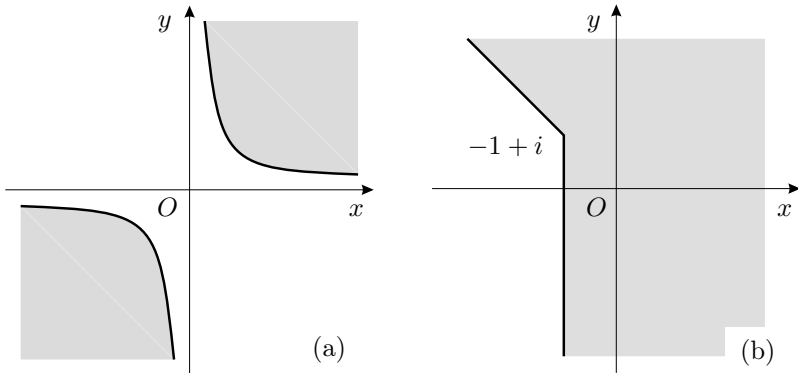


Рис. 3.3. К примеру 3.3.

Пример 3.4. Запишите в тригонометрической и показательной форме следующие числа:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad z_1 &= \cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}; & \text{(б)} \quad z_2 &= -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}; \\ \text{(в)} \quad z_3 &= \sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}; & \text{(г)} \quad z_4 &= -\sin \frac{\pi}{7} - i \cos \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Решение. Для краткости введём обозначения $a = \cos \frac{\pi}{7}$, $b = \sin \frac{\pi}{7}$. Поскольку $a^2 + b^2 = 1$, модули всех чисел z_k , $k = 1, 2, 3, 4$, равны 1; найдём их аргументы (см. рис. 3.4).

(а) Точка, изображающая число $z_1 = a - ib$, расположена в IV квадранте, т.е. $\varphi_1 = \arg z_1 \in (-\pi/2, 0)$, и

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \cos \frac{\pi}{7}, \quad \sin \varphi_1 = -\sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{7}, \\ z_1 &= \cos \left(-\frac{\pi}{7}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{7}\right) = \exp \left(-i\frac{\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

(б) Точка, изображающая число $z_2 = -a + ib$, расположена во II квадранте, т.е. $\varphi_2 = \arg z_2 \in (\pi/2, \pi)$, и

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 &= -\cos \frac{\pi}{7}, \quad \sin \varphi_2 = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow \varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}, \\ z_2 &= \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} = \exp \left(i\frac{6\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

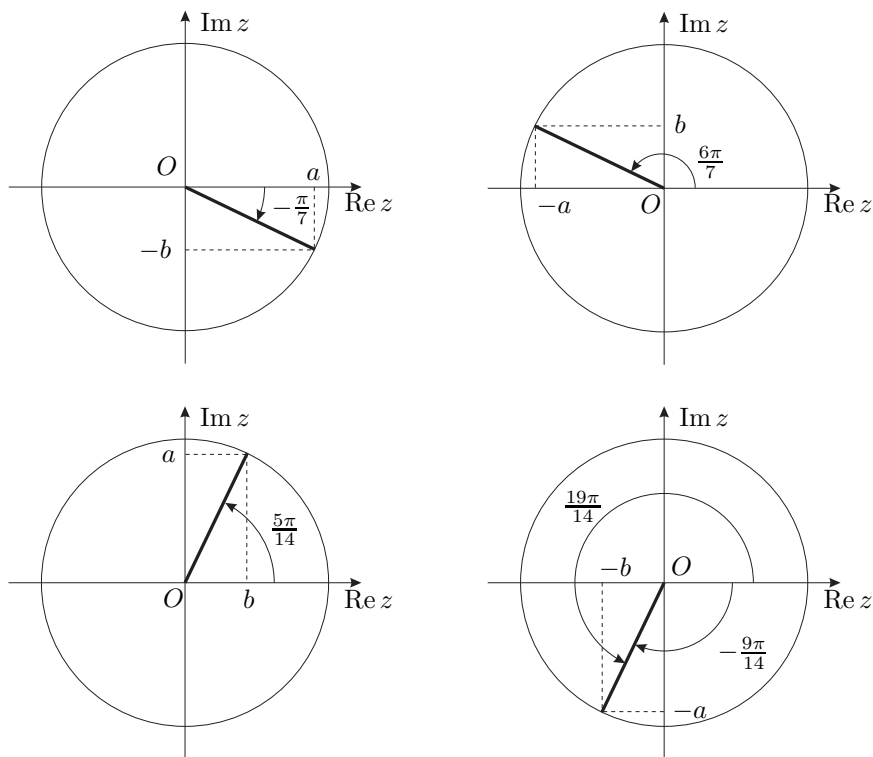


Рис. 3.4. К примеру 3.4

(в) Точка, изображающая число $z_3 = b + ia$, расположена в I квадранте, т.е. $\varphi_3 = \arg z_3 \in (0, \pi/2)$, и

$$\cos \varphi_3 = \sin \frac{\pi}{7}, \quad \sin \varphi_3 = \cos \frac{\pi}{7} \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14},$$

$$z_3 = \cos \frac{5\pi}{14} + i \sin \frac{5\pi}{14} = \exp \left(i \frac{5\pi}{14} \right).$$

(г) Точка, изображающая число $z_4 = -b - ia$, расположена в III квадранте, т.е. $\varphi_4 = \arg z_4 \in (\pi, 3\pi/2)$, и

$$\cos \varphi_4 = -\sin \frac{\pi}{7}, \quad \sin \varphi_4 = -\cos \frac{\pi}{7} \Rightarrow \varphi_4 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{19\pi}{14},$$

$$z_4 = \cos \frac{19\pi}{14} + i \sin \frac{19\pi}{14} = \exp \left(i \frac{19\pi}{14} \right).$$

Если выбирать главное значение аргумента не в промежутке $[0, 2\pi)$, как это было только что сделано, а в промежутке $(-\pi, \pi]$,

то получим

$$\begin{aligned}\cos \varphi_4 &= -\sin \frac{\pi}{7}, \quad \sin \varphi_4 = -\cos \frac{\pi}{7} \Rightarrow \varphi_4 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = -\frac{9\pi}{14}, \\ z_4 &= \cos \left(-\frac{9\pi}{14}\right) + i \sin \left(-\frac{9\pi}{14}\right) = \exp \left(-i\frac{9\pi}{14}\right).\end{aligned}$$

Пример 3.5. Вычислите $(1 - i)^{35}$.

Решение. Представим комплексное число $1 - i$ в тригонометрической (показательной) форме:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(1 - i) &= 1, \quad \operatorname{Im}(1 - i) = -1, \quad |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4};\end{aligned}$$

здесь для $\arg z$ выбран диапазон значений $(-\pi, \pi]$. Имеем:

$$\begin{aligned}(1 - i)^{35} &= \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{35} = \\ &= 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{35}{4}} = \\ &= 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi(8+\frac{3}{4})} = \\ &= 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{3}{4}} = \\ &= 2^{\frac{35}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= -2^{17}(1 + i).\end{aligned}$$

Отметим, что применение формулы бинома Ньютона в данной задаче привело бы к неоправданно громоздким вычислениям.

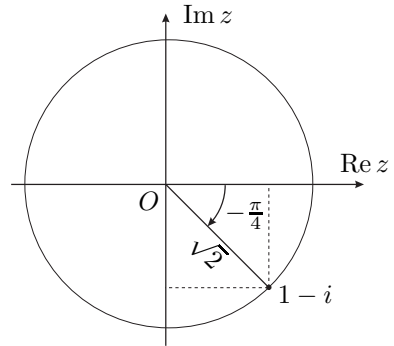


Рис. 3.5. К примеру 3.5

Пример 3.6. Найдите все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Очевидно, $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$, $\operatorname{Arg} 1 = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, поэтому

$$\sqrt[3]{1} = \left(1 \cdot e^{2i\pi k}\right)^{1/3} = \exp i\frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Получаем

$$\text{при } k = 0: \quad \left(\sqrt[3]{1}\right)_0 = e^{0i} = 1;$$

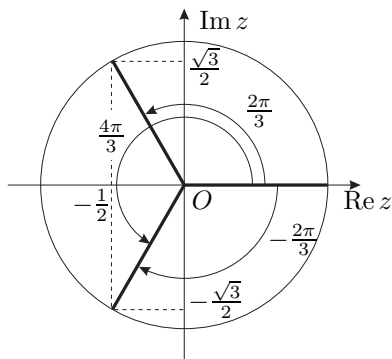


Рис. 3.6. К примеру 3.6

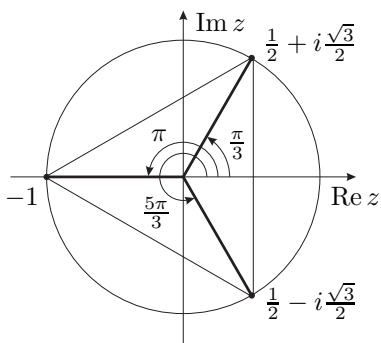


Рис. 3.7. К примеру 3.7

$$\text{при } k = 1: \left(\sqrt[3]{1}\right)_1 = \exp \frac{2\pi i}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{при } k = 2: \left(\sqrt[3]{1}\right)_2 = \exp \frac{4\pi i}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3.7. Найдите все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. Так как $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$, $\text{Arg}(-1) = \{\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, то

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = \exp \left(i \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Получаем:

$$\text{при } k = 0: \left(\sqrt[3]{-1}\right)_0 = \exp i \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{при } k = 1: \left(\sqrt[3]{-1}\right)_1 = \exp i \pi = -1;$$

$$\text{при } k = 2: \left(\sqrt[3]{-1}\right)_2 = \exp i \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3.8. Найдите все значения $\sqrt[3]{-i}$.

Решение. Поскольку $|-i| = 1$, $\arg(-i) = 3\pi/2$, имеем:

$$\sqrt[3]{-i} = \left(1 \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}}\right)^{1/3} = \exp i \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Получаем

$$\text{при } k = 0: \left(\sqrt[3]{-i}\right)_0 = \exp \frac{i\pi}{2} = i;$$

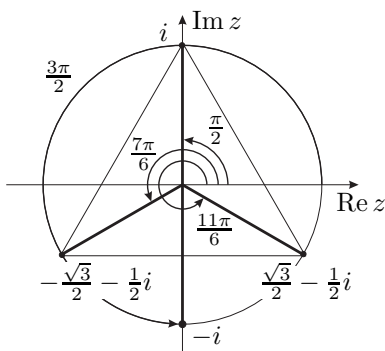


Рис. 3.8. К примеру 3.8

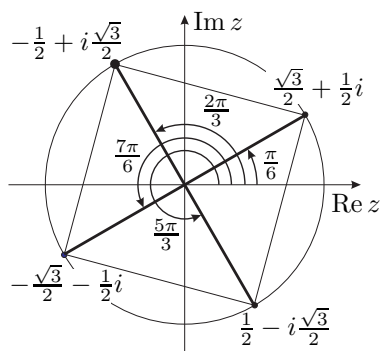


Рис. 3.9. К примеру 3.9

$$\text{при } k = 1: \quad \left(\sqrt[3]{-i}\right)_1 = \exp \frac{7i\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$\text{при } k = 2: \quad \left(\sqrt[3]{-i}\right)_2 = \exp \frac{11i\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Пример 3.9. Найдите все значения $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Решение. Так как $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \exp \frac{2i\pi}{3}$ (см. пример 3.6), получаем

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \exp i\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Имеем

$$\text{при } k = 0: \quad \left(\sqrt[4]{\exp \frac{2i\pi}{3}}\right)_0 = \exp \frac{i\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$\text{при } k = 1: \quad \left(\sqrt[4]{\exp \frac{2i\pi}{3}}\right)_1 = \exp \frac{2i\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{при } k = 2: \quad \left(\sqrt[4]{\exp \frac{2i\pi}{3}}\right)_2 = \exp \frac{7i\pi}{6} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{при } k = 3: \quad \left(\sqrt[4]{\exp \frac{2i\pi}{3}}\right)_3 = \exp \frac{5i\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3.10. Вычислите (а) $\sqrt{i}$; (б) $\sqrt{3-4i}$.

Решение. (а) Пусть $\sqrt{i} = x + iy$. Возводя в квадрат это равенство, получим $i = x^2 + 2ixy - y^2$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{2}.$$

(б) Пусть $\sqrt{3-4i} = x + iy$. Возводя в квадрат это равенство, получим $3-4i = x^2 + 2ixy - y^2$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \mp 1, \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3-4i} = \pm(2-i).$$

Пример 3.11. Получите формулы для косинуса и синуса тройного угла при помощи формулы Муавра.

Решение. Запишем формулу Муавра (3.4) для $n = 3$:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Развернём левую часть по формуле бинома Ньютона

$$\cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cdot i \sin \varphi + 3 \cos \varphi \cdot i^2 \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части левой и правой частей этого равенства, получаем

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \quad \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Пример 3.12. Выразите $\cos^5 t$ через тригонометрические функции кратных аргументов.

Решение. Поскольку $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ (см. формулы (3.5)), получаем, применяя формулу бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} \cos^5 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^5 = \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5it} + 5e^{4it}e^{-it} + 10e^{3it}e^{-2it} + 10e^{2it}e^{-3it} + 5e^{it}e^{-4it} + e^{-5it}) = \\ &= \frac{1}{2^4} \left(\frac{e^{5it} + e^{-5it}}{2} + 5 \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} + 10 \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{16} \cos 5t + \frac{5}{16} \cos 3t + \frac{5}{8} \cos t. \end{aligned}$$

Пример 3.13. Докажите тождества:

(а) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

(б) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

- (в) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$;
 (г) $\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$,
 (д) $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

Решение:

$$(а) \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \cos^2 ix - \left(\frac{1}{i} \sin ix\right)^2 = \cos^2 ix + \sin^2 ix = 1;$$

$$(б) \quad \operatorname{ch} 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = \\ = \operatorname{ch}^2 x - (i \sin x)^2 = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$(в) \quad \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{1}{i} (\sin ix + \sin iy) = \\ = \frac{1}{i} \cdot 2 \sin \frac{i(x+y)}{2} \cos \frac{i(x-y)}{2} = \\ = \frac{2}{i} \cdot i \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2};$$

$$(г) \quad \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y;$$

$$(д) \quad \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Пример 3.14. Найдите $\cos(i \ln 3)$.

Решение. Имеем

$$\cos(i \ln 3) = \operatorname{ch} \ln 3 = \frac{1}{2} (e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}) = \frac{5}{3}.$$

Таким образом, значения косинуса (и синуса) комплексного числа могут быть по модулю больше 1.

Пример 3.15. Преобразуйте в произведения следующие суммы:

$$C = \sum_{k=0}^n \cos kt = 1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt,$$

$$S = \sum_{k=0}^n \sin kt = \sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt.$$

Решение. Рассмотрим выражение $C + iS$:

$$C + iS = \sum_{k=0}^n \cos kt + i \sum_{k=0}^n \sin kt = \sum_{k=0}^n (\cos kt + i \sin kt) = \sum_{k=0}^n e^{ikt}.$$

Вычислим сумму получившейся геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n e^{ikt} &= \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{ikt}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} \left(e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t} \right)}{e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right)} = \\
&= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\left(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t} \right) / 2i}{\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}} \right) / 2i} = e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Отделяя в полученном выражении вещественную и мнимую части, приходим к окончательному результату:

$$\begin{aligned}
C &= \operatorname{Re} e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{nt}{2} \sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}, \\
S &= \operatorname{Im} e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin \frac{nt}{2} \sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

3. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Вычислите:

$$\begin{aligned}
&\text{(а)} (3 - i)(2 + 5i); & \text{(в)} (5 - 2i)(4 - i); \\
&\text{(б)} (5 - 2i)(3 + i); & \text{(г)} (3 + 2i)(5 - i).
\end{aligned}$$

3.2. Вычислите:

$$\begin{aligned}
&\text{(а)} \frac{17 - i}{5 - 2i} + \frac{11 + 13i}{2 + 5i}; & \text{(в)} \frac{17 + 7i}{3 + 2i} - \frac{4 - 7i}{2 + 3i}; \\
&\text{(б)} \frac{11 - 13i}{3 + i} + \frac{18 - 13i}{5 - 2i}; & \text{(г)} \frac{4 + 7i}{1 - 2i} + \frac{7 - i}{1 - 3i}.
\end{aligned}$$

3.3. Выясните, какие множества точек на плоскости комплексной переменной z определяются следующими условиями (здесь z_1, z_2 — заданные комплексные числа):

$$\begin{aligned}
&\text{(а)} \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = 1; & \text{(в)} \operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0; & \text{(д)} 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1; \\
&\text{(б)} \operatorname{Im} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0; & \text{(г)} \operatorname{Re} \frac{1}{z} = c, \quad c \in \mathbb{R}; & \text{(е)} |z| = \operatorname{Im}(z + i).
\end{aligned}$$

3.4. Представьте следующие числа в тригонометрической и показательной форме:

(а) $\sin \alpha - i \cos \alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; (г) $\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta}$;

(б) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$, $-\pi < \alpha \leq \pi$; (д) $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

(в) $\frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; (е) $\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}$.

3.5. Вычислите:

(а) $\sqrt{8 - 6i}$; (б) $\sqrt{21 - 20i}$; (в) $\sqrt{5 + 12i}$; (г) $\sqrt{-3 - 4i}$.

3.6. Решите уравнения:

(а) $z^2 - 4z + 8 = 0$; (в) $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - i = 0$;

(б) $z^2 - 6z + 10 = 0$; (г) $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$.

3.7. Вычислите кубические корни:

(а) $\sqrt[3]{\frac{7 - 22i}{3 - 2i} - \frac{11 + 17i}{3 + i}}$; (б) $\sqrt[3]{\frac{17 + 11i}{i - 3} - \frac{29 + 15i}{1 + 5i}}$.

3.8. Вычислите корни четвертой степени:

(а) $\sqrt[4]{\frac{5i\sqrt{3} - 19}{1 + i\sqrt{3}} - \frac{8 - 11i\sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}}}$; (б) $\sqrt[4]{\frac{9 - 13i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} - \frac{31 - 10i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}}$.

3.9 (у). Найдите суммы

(а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$; (б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$.

3.10. Найдите сумму $C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \dots$.

3.11 (у). Найдите суммы

(а) $C = \sum_{k=1}^n C_n^k \cos kx$; (б) $S = \sum_{k=1}^n C_n^k \sin kx$.

3.12 (у). Найдите сумму $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1}$, где ε — корень n -й степени из 1.

3.13. Найдите суммы

(а) $\cos \frac{2\pi}{n} + 2 \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + (n-1) \cos \frac{2(n-1)\pi}{n}$;

(б) $\sin \frac{2\pi}{n} + 2 \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$.

ГЛАВА 4

Векторная алгебра.

I. Линейные операции

1. Основные понятия и факты

A. Векторные физические величины.

4.1. Произвольный отрезок прямой можно сделать *направленным*, указав, какая из двух его концевых точек является его *началом* (или *точкой приложения*), а какая — *концом*. Направленный отрезок с началом A и концом B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается на чертеже стрелкой, начинающейся («приложенной») в точке A и заканчивающейся в точке B . Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется также его *модулем* и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

4.2. Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* для направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. Модули взаимно противоположных направленных отрезков равны: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

4.3. Направленные отрезки называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Два коллинеарных направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (очевидно, они лежат в одной плоскости) называются *одинаково направленными* (или *сонаправленными*, обозначение $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$), если их концы B и D лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой (AC) , проходящей через их начала, и *противоположно направленными* (обозначение $\overrightarrow{AB} \downarrow \overrightarrow{CD}$) — если в разных.

4.4. У *вырожденного*, или *нулевого* направленного отрезка конец которого совпадает с началом; фактически это точка. По определению считается, что длина вырожденного направленного отрезка равна нулю, а направления он не имеет.

4.5. Понятие направленного отрезка весьма плодотворно используется в физике для изображения так называемых *векторных величин*, которые характеризуются, помимо числового значения, выраженного в некоторой системе единиц, ещё и направлением. Читателю хорошо знакомы примеры из школьного курса физики: скорость, ускорение, сила, напряжённость поля и т. д. Однако «физические» свойства направленных отрезков существенно зависят от того, каким образом определено их «геометрическое» равенство: в зависимости от того, как именно это сделано, получаются разные виды «векторов».

4.6. При построении физических теорий и решении прикладных задач над физическими величинами требуется выполнять различные операции. Например, известно, что действие на частицу двух сил можно заменить действием одной равнодействующей силы; поэтому требуется ввести операцию, позволяющую из двух направленных отрезков получать третий — их сумму. Понятие *вектора* (точнее, геометрического вектора) отличается от понятия направленного отрезка в первую очередь тем, что над векторами можно выполнять алгебраические операции: сложение и умножение на число (см. далее определения 4.16 и 4.18).

4.7. Приложенные векторы. Сила, приложенная к некоторой точке A деформируемого тела, может быть изображена направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, приложенным в точке A , направление которого указывает направление действия силы, а модуль пропорционален величине этой силы. Если изменить точку приложения силы, то эффект её воздействия на тело также изменится. Векторные величины такого типа, требующие задания (i) направления, (ii) величины (модуля) и (iii) точки приложения направленного отрезка, называются *несвободными*, или *приложенными векторами*. Два приложенных вектора называются *равными*, если они

- (i) сонаправлены,
- (ii) имеют одинаковые длины и
- (iii) приложены в одной и той же точке.

Иными словами, равные приложенные векторы изображаются одним и тем же направленным отрезком.

4.8. Скользящие векторы. Рассмотрим пример силы, приложенной к абсолютно твёрдому телу, закреплённому в одной точке. Направленный отрезок, изображающий такую силу, можно перенести вдоль прямой, на которой он лежит; при этом эффект, оказываемый силой на тело, не изменяется: здесь важна линия действия

силы, а точка приложения роли не играет. Векторные величины подобного типа называют *скользящими векторами*. Два *скользящих вектора* называются *равными*, если они

- (i) сонаправлены,
- (ii) имеют одинаковые длины и
- (iii) лежат на одной прямой.

Равные скользящие векторы изображаются направленными отрезками одинаковой длины, лежащими на одной прямой.

4.9. Свободные векторы. Если же направленный отрезок, изображающий некоторую физическую величину, можно переносить в пространстве параллельно его начальному положению, то говорят о *свободном векторе*. Свободный вектор характеризуется только модулем и направлением; точка приложения и линия действия не имеют значения. Примером физической величины такого рода может случить скорость точек твёрдого тела, совершающего поступательное движение. Таким образом, мы придём к понятию свободного вектора, если назовём *равными* направленные отрезки, которые

- (i) сонаправлены и
- (ii) имеют одинаковые длины.

Итак, свободный вектор $\mathbf{a}$ — это множество всех равных друг другу направленных отрезков, причём каждый из этих направленных отрезков является изображением рассматриваемого вектора.

4.10. Одна и та же физическая величина в разных задачах может представлять собой векторы разных типов. Например, сила, приложенная к деформируемому телу, является приложенным вектором, а сила, приложенная к абсолютно твёрдому телу, — скользящим.

4.11. В геометрии также встречаются различные типы векторов. Например, если в пространстве зафиксирована некоторая точка O (начало отсчёта), то положение любой другой точки A может быть задано при помощи направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$, называемого радиус-вектором точки A ; ясно, что это приложенный вектор. Направление произвольного луча (а также всех сонаправленных ему лучей) может быть задано при помощи свободного вектора, называемого *направляющим вектором*.

Б. Линейные операции над векторами: сложение и умножение на число. В геометрии важнейшую роль играют свободные векторы (см. п. 4.9); в дальнейшем слово «свободные» будем опускать.

4.12. Определение. Вектором (или свободным вектором), порождённым направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, называется множество $[\overrightarrow{AB}]$ всех направленных отрезков, равных направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$ в смысле, описанном в п. 4.9. Векторы обычно обозначаются строчными жирными буквами: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и т. д.

4.13. Нулевой вектор — это множество всех нулевых направленных отрезков; обозначение нулевого вектора $\mathbf{0}$. Ясно, что для любой точки A направленный отрезок $\overrightarrow{AA}$ является реализацией нулевого вектора.

4.14. Длина вектора $\mathbf{a}$ — это длина любого направленного отрезка, являющегося его представителем; обозначение $|\mathbf{a}|$. Аналогичным образом, мы можем говорить о сонаправленных и противоположно направленных векторах, о коллинеарных и компланарных векторах и т. п.

4.15. Отложить вектор $\mathbf{a}$ от точки A означает построить направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A , входящий в соответствующее множество, или, что то же, такой, что $[\overrightarrow{AB}] = \mathbf{a}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *представителем* или *реализацией* вектора $\mathbf{a}$. Говорят также, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ получен откладыванием вектора $\mathbf{a}$ от точки A . Ясно, что конечная точка B полученного направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ получена переносом точки A на расстояние, равное длине направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ (или, что то же самое, длине вектора $\mathbf{a}$), в направлении, которое он указывает. Поскольку вектор $\mathbf{a}$ можно отложить от любой точки A плоскости (пространства), то возникает преобразование плоскости (пространства), называемое *параллельным переносом*: каждой точке плоскости (пространства) оно ставит в соответствие конец B направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, полученного откладыванием вектора $\mathbf{a}$ от точки A . Последовательное выполнение двух параллельных переносов приводит к понятию суммы векторов. Итак, главное отличие направленных отрезков от векторов состоит в том, что над векторами можно выполнять алгебраические операции сложения и умножения на вещественные числа.

4.16. Определение. Сумма двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это вектор, обозначаемый $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ и определяемый одним из следующих двух способов (см. рис. 4.1).

(а) *Правило треугольника.* Отложим вектор $\mathbf{a}$ от точки A , получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$; отложим вектор $\mathbf{b}$ от точки

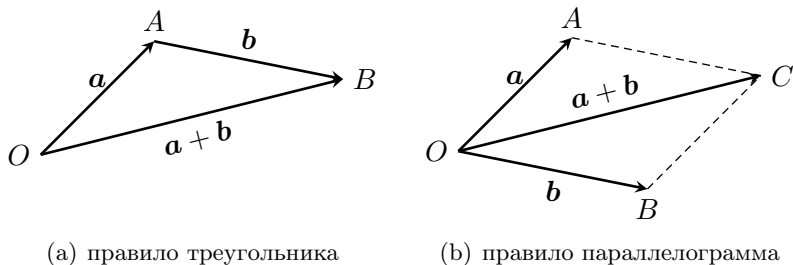


Рис. 4.1. Сложение векторов

B , получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Вектор $\mathbf{c} = [\overrightarrow{AC}]$, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, называется суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

- (b) *Правило параллелограмма.* Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от точки O , получим направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Проведём через точку A прямую, параллельную (OB) , а через точку B — прямую, параллельную (OA) . Пусть C — точка пересечения построенных прямых. Вектор $\mathbf{c} = [\overrightarrow{OC}]$, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{OC}$, называется суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

4.17. Формула $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ показывает, что вектор $\mathbf{O}$ играет при сложении векторов ту же роль, что нуль при сложении чисел:

$$\mathbf{O} + \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \text{для любого вектора } \mathbf{a}.$$

Переставив концевые точки вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, получим вектор $\overrightarrow{BA}$, который называется *противоположным* к вектору $\mathbf{a}$ и обозначается символом $-\mathbf{a}$. Формула $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ показывает, что вектор $-\mathbf{a}$ играет при сложении векторов ту же роль, что противоположное число при сложении чисел:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{O} \quad \text{для любого вектора } \mathbf{a};$$

последнюю формулу обычно записывает в виде $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{O}$.

4.18. Определение. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на вещественное число α называется вектор $\alpha\mathbf{a}$, определяемый следующим образом: длина вектора $\alpha\mathbf{a}$ равна

$$|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|,$$

а его направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно направлению вектора $\mathbf{a}$, если $\alpha < 0$. Если же

$\alpha = 0$, то $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{O}$. При записи произведения вектора на число порядок сомножителей несуществен: $\alpha \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} \alpha$.

4.19. В определении 4.18 мы обозначили модуль вещественного числа и длину вектора при помощи одного и того же символа $|\cdot|$; этот символ используется и в других смыслах; будьте внимательны!

4.20. Определение умножения вектора на число согласовано с определением сложения векторов в том смысле, что для любого натурального числа n справедливы равенства

$$n\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a} + \cdots + \mathbf{a}}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Кроме того, очевидно,

$$-\mathbf{a} = -1 \cdot \mathbf{a}.$$

4.21. Сложение векторов и умножение вектора на число называются *линейными операциями* над векторами.

4.22. Теорема. *Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:*

(1) *коммутативность сложения: для всех векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

(2) *ассоциативность сложения¹: для всех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c});$$

(3) *свойство нулевого вектора: для любого вектора $\mathbf{a}$*

$$\mathbf{a} + \mathbf{O} = \mathbf{a};$$

(4) *существование противоположного вектора: для любого вектора $\mathbf{a}$ существует такой вектор $\mathbf{a}'$, что*

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{O};$$

(5) *свойство единицы: для любого вектора $\mathbf{a}$*

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

¹Как следует из определения 4.16, понятие суммы векторов вводится только для случая *двух* слагаемых. Если имеются три вектора, то можно образовывать суммы вида $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ и $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$; равенство этих сумм, т.е. независимость результата от способа расстановки скобок в выражении $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, и есть содержание свойства ассоциативности. Аналогичное утверждение справедливо для любого (конечного) числа слагаемых: значение выражения $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n$ не зависит от способа расстановки скобок в нём.

- (6) ассоциативность умножения на число: для любого вектора $\mathbf{a}$ и любых чисел α и β

$$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a});$$

- (7) дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов: для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и любого числа α

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b};$$

- (8) дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел: для любого вектора $\mathbf{a}$ и любых чисел α и β

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}.$$

4.23. Пусть даны упорядоченный набор векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ (не обязательно попарно различных) и упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Вектор, определяемый выражением

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{a}_p \quad (4.1)$$

(и само это выражение) называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. При записи выражений типа (4.1) приоритет выполнения операций следующий: сначала выполняется умножение вектора на число, затем сложение векторов.

4.24. В дальнейшем для упорядоченных наборов чисел, векторов и т. д. будем часто употреблять термин «*семейство*». Так, в приведённом выше определении линейной комбинации речь идёт о построении вектора $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{a}_p$ из заданных семейства векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ и семейства числовых коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

4.25. Линейная комбинация произвольных векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$, все коэффициенты которой равны нулю, $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$, называется *тривиальной*. Очевидно, тривиальная линейная комбинация произвольного семейства векторов равна нулевому вектору.

Линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ называется *нетривиальной*, если среди её коэффициентов имеется хотя бы один ненулевой. Нетривиальная линейная комбинация может быть отличной от нулевого вектора (например, $1 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — неколлинеарные векторы), а может быть равна нулевому вектору (например, $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор).

4.26. *Линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ называется множество всех линейных комбинаций, которые можно получить из этих векторов:

$$L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{a}_p \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Например, линейной оболочкой *одного* вектора является множество всех коллинеарных ему векторов (прямая), а линейной оболочкой *двух неколлинеарных* — множество всех векторов, компланарных им (плоскость). (Подумайте, что представляет собой линейная оболочка *двух коллинеарных* векторов.)

В. Коллинеарные и компланарные векторы.

4.27. Векторы, лежащие на коллинеарных прямых, будем называть *коллинеарными*, а лежащие в компланарных плоскостях — *компланарными*. Следующие факты очевидны:

- (i) на плоскости существуют неколлинеарные векторы;
- (ii) в пространстве существуют некомпланарные векторы;
- (iii) если векторы коллинеарны, то они компланарны;
- (iv) любые два вектора компланарны.

4.28. Предложение.

- (i) Для того чтобы два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно существование их нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору.
- (ii) Для того чтобы три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно существование их нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Докажем *необходимость*, т.е. утверждение о том, что если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то существуют такие два числа α и β , не равные нулю одновременно, что выполняется равенство $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{O}$. Если один из векторов нулевой, например, $\mathbf{a} = \mathbf{O}$, то искомой нетривиальной линейной комбинацией является $1 \cdot \mathbf{O} + 0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{O}$. Если оба вектора ненулевые, то в силу определения произведения вектора на число имеем $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, так что $1 \cdot \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} = \mathbf{O}$.

Докажем *достаточность*, т.е. утверждение о том, что если существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{O}$, то векторы коллинеарны. Действительно, хотя бы один из коэффициентов α , β отличен от нуля; пусть, например, $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha\mathbf{a} = -\beta\mathbf{b}$ и далее $\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b}$, так что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны в силу определения произведения вектора на число.

(ii) Докажем *необходимость*, т.е. утверждение о том, что если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, то существуют такие три числа α , β и γ , не равные нулю одновременно, что выполняется равенство $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{O}$. Если хотя бы один вектор нулевой, например, $\mathbf{a} = \mathbf{O}$, то искомой нетривиальной линейной комбинацией является $1 \cdot \mathbf{O} + 0 \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{O}$. Если все три вектора ненулевые, то проведём следующее построение (см. рис. 4.2). Отложив все векторы от

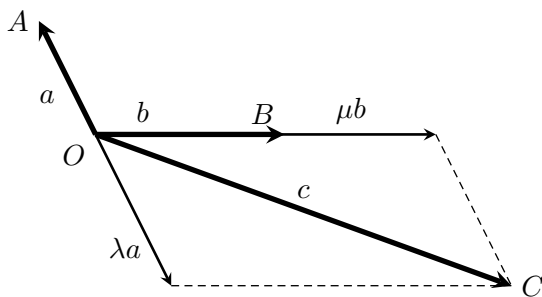


Рис. 4.2. К доказательству предложения 4.28

одной точки O , получим направленные отрезки $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, лежащие в одной плоскости, и представим один из них (например, $\overrightarrow{OC}$) в виде линейной комбинации двух других:

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{OB},$$

так что искомой нетривиальной линейной комбинацией, равной нулевому вектору, является

$$\lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b} - 1 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{O}.$$

Для доказательства *достаточности* заметим, что если в равенстве $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{O}$ хотя бы один из коэффициентов α , β , γ отличен от нуля, например, $\gamma \neq 0$, то

$$\mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b},$$

так что вектор $\mathbf{c}$ лежит в одной плоскости с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (при условии, что они отложены от одной точки). $\square$

Г. Линейная зависимость и независимость.

4.29. Предложение 4.28 показывает, что коллинеарность *двух* векторов и компланарность *трёх* векторов имеют место при выполнении одного и того же необходимого и достаточного условия. Известное общенаучное правило гласит, что если некоторое свойство наблюдается у разных объектов, то оно заслуживает самостоятельного изучения безотносительно к тем объектам, у которых было обнаружено. В связи с этим сформулируем следующее фундаментальное определение.

4.30. Определение. Семейство векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная

комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Семейство векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ называется *линейно независимым*, если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов. Используется также терминология «линейно зависимые (независимые) векторы» (а не семейства).

4.31. Примеры.

1. Семейство векторов, состоящее из единственного вектора, является линейно независимым тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой. Действительно, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то равенство $\alpha \mathbf{a} = \mathbf{0}$ возможно лишь при $\alpha = 0$. Линейно зависимое *двучленное* семейство векторов — это в точности пара коллинеарных векторов, а *трёхчленное* — тройка компланарных.
2. На прямой любой ненулевой направленный отрезок образует линейно независимое (одноэлементное) семейство, а любые два направленных отрезка на прямой линейно зависимы (коллинеарны).
3. На плоскости любые два ненулевых неколлинеарных направленных отрезка линейно независимы, а любые три направленных отрезка линейно зависимы (компланарны).
4. В пространстве любые три ненулевых некомпланарных направленных отрезка линейно независимы, а любые четыре направленных отрезка линейно зависимы.

4.32. Резюмируя, можно сказать, что любое линейно независимое семейство векторов на прямой состоит не более чем из одного вектора, на плоскости — не более чем из двух векторов, в пространстве — не более чем из трёх. Натуральное число n , равное максимально возможному количеству линейно независимых векторов на прямой, на плоскости или в пространстве, называется *размерностью* прямой (плоскости, пространства). Таким образом, размерность прямой равна 1, размерность плоскости равна 2, размерность пространства — 3.

4.33. Теорема (свойства линейно зависимых векторов).

- ЛЗ-1.** Если семейство векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ содержит нулевой вектор, то оно линейно зависимо.
- ЛЗ-2.** Если семейство векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ содержит пару пропорциональных векторов, то оно линейно зависимо.
- ЛЗ-3.** Если семейство векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ линейно зависимо, а векторы $\mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_p$ произвольны, то семейство векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_p$ линейно зависимо.
- ЛЗ-4.** Если векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ линейно зависимо, то один из них можно представить как линейную комбинацию остальных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ЛЗ-1. Предположим, что $\mathbf{a}_1 = \mathbf{O}$. Тогда нетривиальная линейная комбинация $1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_p$ равна нулевому вектору, что и означает линейную зависимость рассматриваемого семейства.

ЛЗ-2. Предположим, что $\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2$, где $\lambda \neq 0$ (случай, когда $\lambda = 0$, фактически был рассмотрен ранее: это свойство **ЛЗ-1**). Следующая линейная комбинация нетривиальна, но равна нулевому вектору:

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 + (-\lambda) \cdot \mathbf{a}_2 + 0 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_p = \mathbf{O}.$$

ЛЗ-3. Линейная зависимость подсемейства $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ означает, что существуют такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, что

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}_s = \mathbf{O}.$$

Тогда

$$\underbrace{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}_s}_{=\mathbf{O}, \text{ нетривиальна}} + \underbrace{0 \cdot \mathbf{a}_{s+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_p}_{=\mathbf{O}, \text{ тривиальна}} = \mathbf{O}.$$

ЛЗ-4. Предположим, что в нетривиальной комбинации

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{a}_p = \mathbf{O}$$

отличен от нуля первый коэффициент: $\alpha_1 \neq 0$. Поэтому

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_p}{\alpha_1} \mathbf{a}_p. \quad \square$$

Применяя контрапозицию¹, из теоремы 4.33 получаем следующие свойства линейно независимых векторов.

4.34. Теорема (свойства линейно независимых векторов).

ЛН-1. Если семейство векторов линейно независимо, то оно не содержит нулевого вектора.

ЛН-2. Если семейство векторов линейно независимо, то его векторы не являются попарно пропорциональными.

ЛН-3. Если семейство векторов линейно независимо, то и любое его подсемейство также линейно независимо.

ЛН-4. Если ни один из векторов данного семейства не может быть представлен как линейная комбинация остальных, то это семейство линейно независимо.

¹Закон контрапозиции — закон классической логики, утверждающий, что в том случае, если некая посылка A влечёт некое следствие B , то отрицание этого следствия (то есть «не B ») влечёт отрицание посылки (то есть «не A »). Суть контрапозиции состоит в простом умозаключении: если из истинности некоторого утверждения следует истинность другого, то в случае ложности второго утверждения первое никак не может быть истинным, поскольку иначе было бы истинным и второе.

4.35. Отметим простое следствие свойства **ЛЗ-3**: линейно зависимое семейство векторов невозможно сделать линейно независимым, добавляя к нему какие-либо векторы. (Подумайте, можно ли это сделать, удаляя некоторые векторы.)

Д. Базисы и координаты.

4.36. Определение. *Базисом* в пространстве будем называть произвольное семейство линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Любой вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^3 x^j \mathbf{e}_j; \quad (4.2)$$

это соотношение называется *разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$* , а числа x^1, x^2, x^3 — *координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$* . Координаты принято нумеровать верхними индексами (которые, таким образом, в данной ситуации являются номерами, а не показателями степени) и записывать в виде столбца:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Записи $\mathbf{x} \rightleftharpoons X$ и $X \rightleftharpoons \mathbf{x}$ означают, что столбец X является набором координат вектора $\mathbf{X}$ в некотором (заранее указанном) базисе. Если в некоторой задаче базис зафиксирован и никаким изменениям не подлежит, то вектор и столбец его координат часто отождествляют и записывают $\mathbf{x} = X$.

4.37. Все описанные выше понятия можно использовать и для множеств векторов на прямой и на плоскости; в этих случаях базисы состоят соответственно из одного или двух линейно независимых векторов, а столбцы координат — из одного или двух элементов.

4.38. Часто используется более простая система обозначений: векторы базиса в пространстве обозначают $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ вместо $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (на плоскости, соответственно, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$), а координаты вектора $\mathbf{a}$ — a_x, a_y, a_z вместо a^1, a^2, a^3 (соответственно, a_x, a_y вместо a^1, a^2).

4.39. Теорема. *Разложение вектора по базису единственно, т.е. набор координат векторов в каждом базисе определен однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ вектор $\mathbf{x}$ имеет два различных набора координат:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + y^3 \mathbf{e}_3.$$

Вычитая второе разложение из первого, получим

$$\mathbf{0} = (x^1 - y^1) \mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2) \mathbf{e}_2 + (x^3 - y^3) \mathbf{e}_3.$$

Так как векторы базиса линейно независимы, то это равенство возможно лишь при нулевых коэффициентах, т.е.

$$x^1 = y^1, \quad x^2 = y^2, \quad x^3 = y^3. \quad \square$$

4.40. Анализ проведённого доказательства позволяет сделать вывод, что единственность разложения по базису является следствием линейной независимости векторов базиса.

4.41. Теорема. Два вектора равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые наборы координат относительно произвольного базиса.

4.42. Теорема. Если x^1, x^2, x^3 — координаты вектора $\mathbf{x}$, а y^1, y^2, y^3 — координаты вектора $\mathbf{y}$ относительно некоторого базиса, то в том же базисе вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ имеет координаты $x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3$, а вектор $\alpha \mathbf{x}$, где α — произвольное число, имеет координаты $\alpha x^1, \alpha x^2, \alpha x^3$:

$$\text{если } \mathbf{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}, \text{ то } \mathbf{x} + \mathbf{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}, \alpha \mathbf{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \alpha x^2 \\ \alpha x^3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.42 инспирирует следующее определение.

4.43. Определение. Сумма столбцов и произведение столбца на число определяются следующим образом:

$$\text{для } X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}: X + Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}, \alpha X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \alpha x^2 \\ \alpha x^3 \end{pmatrix}.$$

Указанные операции называются *линейными операциями* над столбцами. Разумеется, аналогичные операции можно определить для столбцов любой высоты (т.е. состоящих из любого количества элементов); заметим, однако, что складывать можно только столбцы одинаковой высоты.

4.44. Аналогичным образом можно ввести линейные операции над строками из чисел.

4.45. Очевидно, линейные операции над столбцами обладают теми же свойствами, что и линейные операции над векторами (см. теорему 4.22). Кроме того, аналогично определению 4.30 можно ввести понятия линейной зависимости и линейной независимости столбцов и убедиться, что эти понятия обладают свойствами, доказанными в теоремах 4.33 и 4.34.

4.46. Соглашение о суммировании (правило суммирования Эйнштейна). Для сокращения записи сумм типа (4.2) А. Эйнштейн¹ предложил опускать знак суммирования, если индекс суммирования встречается в выражении для типового слагаемого дважды: один раз как верхний индекс, второй раз — как нижний; пределы изменения индекса суммирования при этом должны быть явно указаны или ясны из контекста. Например, сумма (4.2) может быть записана в виде $x = x^j e_j$. Итак, выражение, имеющее вид одночлена, который содержит некоторый индекс дважды — один раз вверху, а второй раз внизу, — на самом деле представляет собой сумму нескольких подобных одночленов, соответствующих нескольким значениям индекса из заранее зафиксированного диапазона; эту сумму называют *свёрткой*.

4.47. Выражения $x_i y_i$ и $\lambda_j a_k^j e_j$ не рассматриваются как суммы: в первом из них индекс i встречается дважды, но оба раза как нижний индекс, а во втором индекс j встречается и как нижний, и как верхний, но не два раза, а три; в выражении $a_j^i x_i y_j$ сумма по i выполняется, а по j — нет. Имеются исключения, в которых правило суммирования применяется несмотря на то, что индекс суммирования встречается более двух раз. Например, в выражениях $a_i x^i$ и $b_i x^i$ препятствий для применения правила суммирования нет, и потому оно применяется также и для выражения $(a_i + b_i)x^i \equiv a_i x^i + b_i x^i$:

$$(a_i + b_i)x^i = (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

Е. Аффинная система координат.

4.48. Определение. *Аффинная система координат*, или *репёр*, в пространстве — это совокупность, состоящая из некоторой точки O (*начала координат*) и некоторого базиса e_1, e_2, e_e . Аффинную систему координат обозначают $Oe_1e_2e_3$ (или $Oijk$).

¹Альберт Эйнштейн (Albert Einstein; 1879—1955) — один из крупнейших физиков-теоретиков XX века, создатель теории относительности, общественный деятель-гуманист.

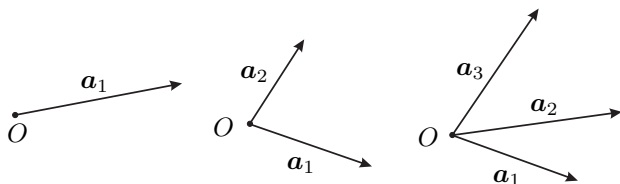


Рис. 4.3. Аффинные системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве

4.49. Понятия аффинной системы координат на прямой и на плоскости вводятся аналогично. На рис. 4.3 изображены аффинные реперы на прямой, на плоскости и в пространстве.

4.50. Определение. Радиус-вектором точки M в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$. Координатами точки M в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ называются координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе e_1, e_2, e_3 .

4.51. Запись $M(\mathbf{r})$ означает, что вектор $\mathbf{r}$ является радиус-вектором точки M в заранее указанном аффинном репере $Oe_1e_2e_3$. Аналогичный смысл имеет обозначение $M(x, y, z)$.

Ж. Прямые и плоскости в аффинных координатах.

4.52. Любая прямая l на плоскости или в пространстве полностью определяется своей произвольной точкой M_0 и произвольным ненулевым вектором $\mathbf{a}$, параллельным этой прямой (см. рис. 4.4). Точку M_0 будем называть (*опорной точкой*) прямой l , а вектор $\mathbf{a}$ — её *направляющим вектором*. Условие, при котором некоторая точка M принадлежит прямой l , состоит в том, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, т.е. существует такое число $t \in \mathbb{R}$, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}. \quad (4.3)$$

Прямую с опорной точкой M_0 и направляющим вектором $\mathbf{a}$ будем обозначать $l(M_0, \mathbf{a})$. В дальнейшем будем отождествлять прямую с множеством лежащих на ней точек; таким образом,

$$l(M_0, \mathbf{a}) = \left\{ M : \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.53. Аналогично, любая плоскость π в пространстве полностью определяется своей произвольной точкой M_0 и парой неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, параллельных этой плоскости (см. рис. 4.5). Точку M_0 будем называть (*опорной точкой*) плоскости π , а векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — её *направляющими векторами*. Условие, при котором



Рис. 4.4.

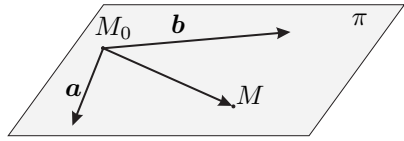


Рис. 4.5.

некоторая точка M принадлежит плоскости π , состоит в том, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ компланарен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. существуют такие числа $s, t \in \mathbb{R}$, что

$$\overrightarrow{M_0M} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}. \quad (4.4)$$

Плоскость с опорной точкой M_0 и направляющими векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ будем обозначать $\pi(M_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. В дальнейшем будем отождествлять плоскость с множеством лежащих на ней точек; таким образом,

$$\pi(M_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{ M : \overrightarrow{M_0M} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Уравнения прямой на плоскости.

4.54. Если на плоскости (или в пространстве) выбрано произвольным образом начало координат O , то соотношение (4.3), определяющее прямую, можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-векторы точек M_0, M относительно начала координат O (см. рис. 4.6). Уравнение (4.5) называется *параметрическим уравнением прямой в векторной форме*.

Из векторного параметрического уравнения можно получить различные другие формы уравнения прямой; оно незаменимо при анализе различных теоретических вопросов, связанных с прямыми и плоскостями. Кроме того, это уравнение выглядит совершенно одинаково в планиметрическом и стереометрическом случаях, а значит, может быть использовано и в многомерном случае.

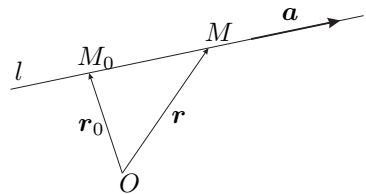


Рис. 4.6.

4.55. Рассмотрим сначала планиметрическую ситуацию. Выберем на плоскости произвольный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и обозначим через (x, y) , (x_0, y_0) , (a_x, a_y) координаты векторов $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{a}$ соответственно. Тогда

векторное параметрическое уравнение (4.5) в полученной аффинной системе координат *Oij* можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y. \end{cases} \quad (4.6)$$

Полученная система называется *системой параметрических уравнений прямой*. Часто говорят «*параметрическое уравнение прямой*», помня, что на самом деле уравнений два. При решении задач параметрическое уравнение прямой — один из наиболее удобных типов уравнений.

4.56. Попытаемся исключить из параметрического уравнения параметр t . Если обе координаты a_x и a_y направляющего вектора $\mathbf{a}$ отличны от нуля, то очевидным образом получаем

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \quad (4.7)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости. Разумеется, его можно всячески преобразовывать по обычным алгебраическим правилам, но чаще всего при решении практических задач бывает удобно перейти от данного канонического уравнения к параметрическому уравнению и в дальнейшем пользоваться именно им:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} \iff \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = t \iff \begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y. \end{cases}$$

4.57. Если же одна из координат направляющего вектора $\mathbf{a}$ равна нулю, например, $a_x = 0$, то имеем

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + ta_y. \end{cases}$$

Эту систему записывают в виде

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{a_y}.$$

Естественно, здесь не имеется в виду деление на нуль; данное уравнение подлежит преобразованию в параметрическое уравнение по рецепту, указанному выше:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{a_y} \iff \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{a_y} = t \iff \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + ta_y. \end{cases}$$

Можно поступить и иначе:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{a_y} \iff a_y(x - x_0) = 0(y - y_0) \iff \begin{cases} x = x_0, \\ y - \text{любой}. \end{cases}$$

Итак, каноническое уравнение прямой допустимо записывать и в случае, когда одна из координат направляющего вектора прямой равна нулю.

4.58. Чтобы составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$, заметим, что в качестве опорной точки прямой можно взять любую из них (возьмём M_1), а в качестве направляющего вектора прямой — вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Тогда получим параметрические уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

и каноническое уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

4.59. Каноническое уравнение прямой можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} \quad \Longleftrightarrow \quad a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0);$$

введя обозначения $A = a_y$, $B = -a_x$, получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

называемое *общим уравнением прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0)* . Раскрыв скобки и введя обозначение $D = Ax_0 + By_0$, получим так называемое *общее уравнение прямой на плоскости*

$$Ax + By = D. \quad (4.8)$$

4.60. Если $D = 0$, то, очевидно, прямая проходит через начало координат. Если же $D \neq 0$, то, разделив обе части последнего уравнения на D , получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = D/A$, $b = D/B$. Геометрический смысл коэффициентов a и b очевиден: прямая проходит через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$, отчего последнее уравнение носит название *уравнения прямой в отрезках* (a и b — отрезки, отсекаемые прямой на осях координат).

2. Примеры решения задач

Пример 4.1. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})/2$.

Решение (см. рис. 4.7). Имеем:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}, \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}.$$

Складывая эти равенства и учитывая соотношения $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{DF}$, получаем требуемое.

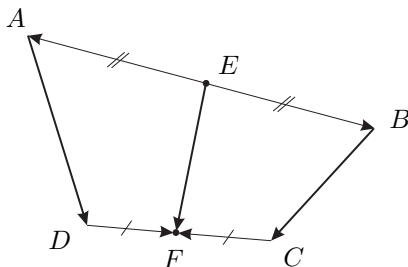


Рис. 4.7. К примеру 4.1

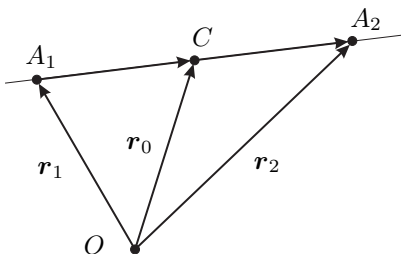


Рис. 4.8. К примеру 4.2

Пример 4.2. Две точки A_1 и A_2 называются симметричными относительно точки C , если $\overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{CA_2}$. Найдите радиус-вектор¹ $\mathbf{r}_2$ точки A_2 , симметричной точке $A_1(\mathbf{r}_1)$ относительно точки $C(\mathbf{r}_0)$.

Решение. Если точка A_2 симметрична точке $A_1(\mathbf{r}_1)$ относительно точки $C(\mathbf{r}_0)$, то

$$\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA_1} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$$

(см. рис. 4.8), откуда

$$\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_2} = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) = 2\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1.$$

Ответ: $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$.

Пример 4.3. Говорят, что точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\alpha : \beta = \lambda$, если $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ (точка M не обязательно лежит между A и B , т.е. не обязательно $\lambda > 0$). Выразите радиус-вектор $\mathbf{r}_M$ точки M через радиус-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ точек A и B .

Решение. Имеем

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_M;$$

¹Относительно какого-либо зафиксированного начала координат O .

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB} \iff \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A = \lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_M) \Rightarrow \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda}.$$

Заменяя λ на отношение $\alpha : \beta$, можно переписать последнюю формулу в виде

$$\mathbf{r}_M = \frac{\beta \mathbf{r}_A + \alpha \mathbf{r}_B}{\alpha + \beta}.$$

В частности, если $\lambda = 1$, то получаем формулу для радиус-вектора $\mathbf{r}_C$ середины C отрезка AB :

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda} = \frac{\beta \mathbf{r}_A + \alpha \mathbf{r}_B}{\alpha + \beta}.$$

Пример 4.4. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (называемой *центроидом* треугольника) и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$ считая от вершины. Выразите радиус-вектор $\mathbf{r}_M$ центроида M треугольника ABC с вершинами $A(\mathbf{r}_A)$, $B(\mathbf{r}_B)$, $C(\mathbf{r}_C)$.

Решение. Если $A(\mathbf{r}_A)$, $B(\mathbf{r}_B)$, $C(\mathbf{r}_C)$ — вершины треугольника, $A_1(\mathbf{r}_{A_1})$, $B_1(\mathbf{r}_{B_1})$, $C_1(\mathbf{r}_{C_1})$ — середины сторон BC , CA и AB соответственно, то

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A_1} &= \frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{2}, \quad \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{r}_{A_1} - \mathbf{r}_A = \frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{2} - \mathbf{r}_A, \\ \overrightarrow{AM} &= \alpha \overrightarrow{AA_1} = \alpha \left(\frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{2} - \mathbf{r}_A \right), \\ \mathbf{r}_M &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \mathbf{r}_A(1 - \alpha) + \frac{\alpha}{2}(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C), \end{aligned}$$

где α — неизвестный коэффициент. Аналогично, исходя из $\mathbf{r}_{B_1}$, находим

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_B(1 - \beta) + \frac{\beta}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C).$$

Приравнивая полученные выражения для $\mathbf{r}_M$ и учитывая линейную независимость векторов $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$, получаем для α и β систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \alpha = \frac{\beta}{2}, \\ \frac{\alpha}{2} = 1 - \beta, \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{2}{3},$$

т.е. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$. Далее находим

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C);$$

симметрия этого выражения относительно векторов $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ влечёт соотношение $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$.

Пример 4.5. Две прямые на плоскости заданы векторными параметрическими уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2$. Выясните, при каких необходимых и достаточных условиях эти прямые (а) пересекаются; (б) параллельны; (в) совпадают.

Решение. Требуется проанализировать векторное уравнение

$$\mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad t\mathbf{a}_1 - s\mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

с двумя неизвестными s и t . В случае линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ последнее уравнение имеет единственное решение при любой правой части, т.е. прямые пересекаются в единственной точке. Если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависимы, т.е. пропорциональны ($\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_1$), то уравнение принимает вид

$$(t - s\lambda)\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1;$$

если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ коллинеарны, то оно имеет бесконечно много решений — прямые совпадают; в противном случае решений нет — прямые параллельны.

3. Задачи для самостоятельного решения

4.1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$, найдите в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CE}$.

4.2. Найдите координаты вершин параллелограмма $ABCD$ в аффинном репере, начало которого находится в центре O этого параллелограмма, а базис состоит из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BO}$.

4.3. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно k . Найдите координаты вершин трапеции, точки M пересечения диагоналей и точки S пересечения продолжений боковых сторон в аффинном репере с началом в точке A и базисными векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

4.4. Найдите координаты вершин тетраэдра $OABC$ в аффинном репере с началом в вершине O , базисными векторами которого являются медианы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ граней BOC , COA , AOB .

4.5 (у). Докажите следующие утверждения:

- (а) Отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер произвольного тетраэдра, пересекаются в одной точке M и делятся этой точкой пополам.
- (б) Точка M является общей точкой отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней и делит эти отрезки в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

4.6. (а) Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 5)$ и $B(-3; 7)$.

- (б) Получите из параметрического уравнения прямой $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ каноническое уравнение и общее уравнение.
- (в) Получите из параметрического уравнения прямой $\begin{cases} x = 5, \\ y = 3 - 7t \end{cases}$ каноническое уравнение и общее уравнение.
- (г) Получите из канонического уравнения прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-5}$ параметрическое уравнение и общее уравнение.
- (д) Получите из канонического уравнения прямой $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{0}$ параметрическое уравнение и общее уравнение.
- (е) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(13; -7)$ параллельно вектору $\mathbf{a}(5; 2)$.
- (ж) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4; 2)$ параллельно прямой $\frac{x+8}{5} = \frac{y-9}{-11}$.
- (з) Нарисуйте прямую, заданную уравнением $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$.

4.7. Две прямые на плоскости заданы уравнениями общего вида $A_1x + B_1y = D_1$ и $A_2x + B_2y = D_2$. Выясните, при каких необходимых и достаточных условиях эти прямые (а) пересекаются; (б) параллельны; (с) совпадают.

ГЛАВА 5

Матрицы.

I. Основные понятия

1. Основные понятия и факты

A. Основные определения.

5.1. *Числовой матрицей* размера $m \times n$ (или $(m \times n)$ -матрицей) над числовым полем $\mathbb{K}$ называется совокупность mn чисел из поля $\mathbb{K}$, называемых *элементами* (или *компонентами*) матрицы и записанных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов. Матрицы принято обозначать прописными буквами и заключать соответствующие таблицы элементов в скобки различного вида: $(\cdot)$, $[\cdot]$, $\|\cdot\|$. При указании размера матрицы сначала указывается количество её строк, а затем — количество столбцов. Элементы матрицы обозначаются буквами, снабжёнными двумя индексами, которые указывают положение элемента внутри матрицы; при этом используются две системы обозначений:

- (1) *верхний* индекс указывает номер строки, *нижний* — номер столбца, не пересечения которых стоит элемент:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix};$$

- (2) *первый* индекс указывает номер строки, а *второй* — номер столбца:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Часто применяются сокращённые обозначения:

$$A = (a_j^i)_n^m, \quad B = (b_{ij})_{mn}.$$

Если требуется указать размер матрицы в явном виде, то будем записывать его под буквой, обозначающей матрицу: $A_{m \times n}$.

5.2. В дальнейшем иногда будет полезно следующее обозначение: если $A = (a_j^i)_n^m$ или $B = (b_{ij})_{mn}$, то $\{A\}_j^i = a_j^i$ и $\{B\}_{ij} = b_{ij}$; фигурные скобки здесь обозначают «операцию извлечения элемента из матрицы».

5.3. Наряду с числовыми матрицами часто приходится рассматривать матрицы, элементами которых являются, например, функции или другие матрицы. Множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из множества X обозначается $X^{m \times n}$. В дальнейшем мы в основном будем работать с множеством $\mathbb{K}^{m \times n}$ всех матриц размера $m \times n$ с элементами из числового поля $\mathbb{K}$ (обычно $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

5.4. *Вектор-строки* и *вектор-столбцы* — это матрицы, состоящие соответственно из одной строки или из одного столбца. Множество всех вектор-строк длины m (т.е. состоящих из m элементов) обозначается

$$\mathbb{K}^{*m} = \left\{ A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \mid a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{K} \right\}$$

и называется *арифметическим пространством строк*.

Множество всех вектор-столбцов высоты n (т.е. состоящих из n элементов) обозначается

$$\mathbb{K}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{K} \right\}$$

и называется *арифметическим пространством $\mathbb{K}^n$* (или кратко пространством $\mathbb{K}^n$). Отметим, что элементы столбцов нумеруются верхними индексами в соответствии с принятым соглашением о нумерации; нижние индексы в этом случае использовать неудобно, поскольку возникает путаница со строками.

5.5. Выделяют следующие специальные виды матриц:

- (i) *нулевая матрица* O : все её элементы равны нулю; вёчастью, рассматриваются нулевые столбцы и нулевые строки;

- (ii) *квадратная матрица*: количество строк равно количеству столбцов,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называют количество её строк (столбцов). *Главная диагональ* квадратной матрицы состоит из элементов $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n$, а *побочная диагональ* — из элементов $a_n^1, a_{n-1}^2, \dots, a_2^{n-1}, a_1^n$. Сумма элементов главной диагонали называется *следом* квадратной матрицы и обозначается $\text{tr } A$:

$$\text{tr } A = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n = \sum_{i=1}^n a_i^i;$$

- (iii) *диагональная матрица*: квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1^1, a_2^2, a_3^3, \dots, a_{n-1}^{n-1}, a_n^n);$$

- (iv) *верхнетреугольная* (правая треугольная) и *нижнетреугольная* (левая треугольная) матрицы: у первой из них равны нулю все элементы, расположенные ниже главной диагонали, т.е. $a_j^i = 0$ для всех $i > j$, а у второй — выше главной диагонали, т.е. $a_j^i = 0$ для всех $i < j$:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix};$$

- (v) *блочная матрица*: матрица, элементами которой являются матрицы согласованных размеров; например,

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|;$$

здесь матрицу A размера 3×3 можно рассматривать как блочную матрицу размера 2×2 с блоками

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения блочной матрицы будем использовать скобки вида $\| \cdot \|$.

Б. Линейные операции над матрицами.

5.6. Матрицы A и B называются *равными* (обозначение $A = B$), если их размеры совпадают, а элементы, стоящие на одинаковых местах, равны между собой:

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n : \quad a_j^i = b_j^i.$$

5.7. Определение. Сумма матриц $A = (a_j^i)_n^m$ и $B = (b_j^i)_n^m$ одинакового размера $m \times n$ и произведение матрицы $A = (a_j^i)_n^m$ на число α определяются следующим образом:

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n : \quad \{A + B\}_j^i = \{A\}_j^i + \{B\}_j^i,$$

$$\{\alpha A\}_j^i = \alpha \{A\}_j^i.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются *линейными операциями*. Говорят, что линейные операции выполняются *поэлементно*; это означает, что каждый элемент результирующей матрицы зависит только от элементов исходных матриц, расположенных на тех же местах.

5.8. Теорема. *Линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:*

- (i) *коммутативность сложения:*

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n} : \quad A + B = B + A;$$

(ii) ассоциативность сложения:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n} : (A + B) + C = A + (B + C);$$

(iii) свойство нулевой матрицы $O \in \mathbb{K}^{m \times n}$:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : A + O = A;$$

(iv) существование противоположной матрицы:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : \exists A' \in \mathbb{K}^{m \times n} : A + A' = O;$$

(v) свойство единицы:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : 1 \cdot A = A;$$

(vi) ассоциативность умножения на число:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$$

(vii) дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n} : \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

(viii) дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

5.9. Определение ((ср. п. 4.23)). *Линейной комбинацией* матриц $A_1, \dots, A_p \in \mathbb{K}^{m \times n}$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ называется матрица

$$\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_p A_p \in \mathbb{K}^{m \times n}. \quad (5.1)$$

5.10. (ср. п. 4.25) Линейная комбинация произвольных матриц $A_1, \dots, A_p \in \mathbb{K}^{m \times n}$, все коэффициенты которой равны нулю, $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$, называется *тривиальной*. Очевидно, тривиальная линейная комбинация произвольного семейства матриц равна нулевой матрице. Если среди коэффициентов имеется хотя бы один ненулевой, линейная комбинация называется *нетривиальной*.

5.11. Определение ((ср. п. 4.26)). *Линейной оболочкой* матриц $A_1, \dots, A_p$ называется множество всех линейных комбинаций, которые можно получить из этих векторов:

$$L(A_1, \dots, A_p) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_p A_p \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K} \right\}.$$

В. Линейная зависимость и независимость.

5.12. Определение (см. п. 4.30). Семейство матриц $A_1, \dots, A_p$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих матриц, равная нулевой матрице. Семейство матриц $A_1, \dots, A_p$ называется *линейно независимым*, если нулевой матрице равна только тривиальная линейная комбинация этих матриц. Используется также терминология «линейно зависимые (независимые) матрицы» (а не семейства).

5.13. Теорема (свойства линейно зависимых матриц; ср. с теоремой 4.33).

ЛЗ-1. Если семейство матриц $A_1, \dots, A_p$ содержит нулевую матрицу, то оно линейно зависимо.

ЛЗ-2. Если семейство матриц $A_1, \dots, A_p$ содержит пару пропорциональных матриц, то оно линейно зависимо.

ЛЗ-3. Если семейство матриц $A_1, \dots, A_s$ линейно зависимо, а матрицы $A_{s+1}, \dots, A_p$ произвольны, то семейство матриц $A_1, \dots, A_s, A_{s+1}, \dots, A_p$ линейно зависимо.

ЛЗ-4. Если матрицы $A_1, \dots, A_p$ линейно зависимо, то одну из них можно представить как линейную комбинацию остальных.

Доказательство теоремы 5.13 дословно повторяет доказательство теоремы 4.33.

5.14. Теорема (свойства линейно независимых матриц; ср. с теоремой 4.34).

ЛН-1. Если семейство матриц линейно независимо, то оно не содержит нулевой матрицы.

ЛН-2. Если семейство матриц линейно независимо, то составляющие его матрицы не являются попарно пропорциональными.

ЛН-3. Если семейство матриц линейно независимо, то и любое его подсемейство также линейно независимо.

ЛН-4. Если ни одна из матриц данного семейства не может быть представлена как линейная комбинация остальных, то это семейство линейно независимо.

Доказательство теоремы 5.14 дословно повторяет доказательство теоремы 4.34.

Г. Транспонирование.

5.15. Определение. Матрицей, транспонированной по отношению к матрице $A = (a_{ij}^i)_n^m \in \mathbb{K}^{m \times n}$, называется матрица

$A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$, элементы которой равны

$$\{A^T\}_i^j = \{A\}_j^i.$$

Очевидно, количество строк (столбцов) транспонированной матрицы равно количеству столбцов (строк) исходной матрицы. Другие обозначения операции транспонирования: ${}^T A$, ${}^t A$, A^t , A' .

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.16. Теорема. *Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:*

(i) *линейность:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n} : (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T;$$

(ii) *инволютивность:*

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : (A^T)^T = A.$$

Д. Произведение строки на столбец.

5.17. Определение. Пусть $A \in \mathbb{K}^{*n}$ и $B \in \mathbb{K}^n$ — строка и столбец, состоящие из одинакового числа элементов:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

Их *произведением* AB называется число

$$AB = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n = \sum_{k=1}^n a_k b^k.$$

В данном контексте строку A и столбец B называют сомножителями, а операцию вычисления произведения AB — умножением. Порядок записи сомножителей существен: строка выступает первым (левым) сомножителем, столбец — вторым (правым).

5.18. Теорема. *Операция умножения строки и столбца обладает следующими свойствами:*

(i) *ассоциативность:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathbb{K}^{*n}, \forall B \in \mathbb{K}^n : (\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B);$$

$$\forall A \in \mathbb{K}^{*n}, \quad \forall B, B' \in \mathbb{K}^n : \quad A(B + B') = AB + AB';$$
$$\forall A, A' \in \mathbb{K}^{*n}, \quad \forall B \in \mathbb{K}^n : \quad (A + A')B = AB + A'B.$$
$$A^T B = \sum_{j=1}^n a^j b^j = B^T A \in \mathbb{K}.$$

5.20. Рассмотрим матрицы $A \in \mathbb{K}^{m \times s}$ и $B \in \mathbb{K}^{s \times n}$, размеры которых согласованы следующим образом: количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B . Представим эти матрицы в блочной форме, считая блоками матрицы A её строки, а блоками матрицы B — столбцы:

[illegible]

5.21. Определение. Произведением матриц $A \in \mathbb{K}^{m \times s}$ и $B \in \mathbb{K}^{s \times n}$ называется матрица $C = AB \in \mathbb{K}^{m \times n}$, элементы которой

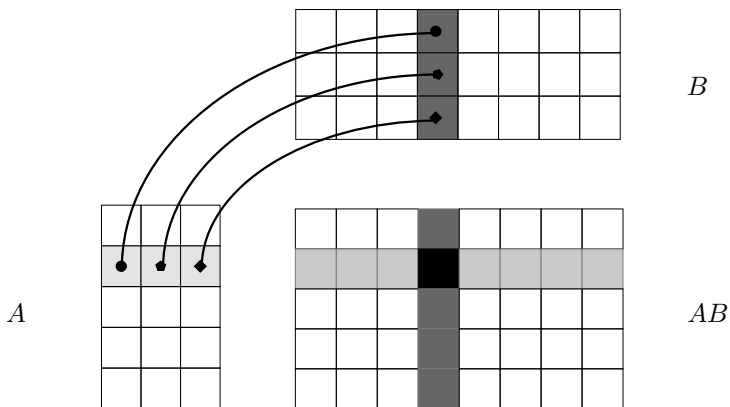


Рис. 5.1. Умножение матриц

вычисляются по формуле

$$c_j^i = \{AB\}_j^i = A^i B_j = \sum_{k=1}^s a_k^i b_j^k. \quad (5.2)$$

Таким образом, элемент $\{AB\}_j^i$, расположенный в i -й строке и j -м столбце матрицы AB , равен произведению i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B или, эквивалентно, сумме попарных произведений элементов i -й строки матрицы A и элементов j -го столбца матрицы B . Схема на рис. 5.1 иллюстрирует правило умножения матриц.

5.22. *Единичной матрицей* $\mathbf{1}$ называется диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1. Элементы единичной матрицы обозначаются

$$\delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

и называются *символами Кронекера*.

5.23. В дальнейшем всюду столбцы и строки единичной матрицы будем обозначать следующим образом:

$$\mathbf{1}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{1}_k = \begin{pmatrix} \delta_k^1 \\ \delta_k^2 \\ \vdots \\ \delta_k^n \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^1 &= (1, 0, \dots, 0), \\
\mathbf{1}^2 &= (0, 1, \dots, 0), \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{1}^j = (\delta_1^j, \delta_2^j, \dots, \delta_n^j). \\
&\dots\dots\dots \\
\mathbf{1}^n &= (0, 0, \dots, 1),
\end{aligned}$$

5.24. Теорема. Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:

(i) ассоциативность:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times s}, \forall B \in \mathbb{K}^{s \times p}, \forall C \in \mathbb{K}^{p \times n} : \quad A(BC) = (AB)C;$$

(ii) дистрибутивность слева:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times s}, \forall B, B' \in \mathbb{K}^{s \times n} : \quad A(B + B') = AB + AB';$$

(iii) дистрибутивность справа:

$$\forall A, A' \in \mathbb{K}^{m \times s}, \forall B \in \mathbb{K}^{s \times n} : \quad (A + A')B = AB + A'B;$$

(iv) транспонирование произведения:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times s}, \forall B \in \mathbb{K}^{s \times n} : \quad (AB)^T = B^T A^T;$$

(v) свойство единичной матрицы:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} : \quad \mathbf{1}_m A = A \mathbf{1}_n = A;$$

(vi) свойство следа:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \forall B \in \mathbb{K}^{n \times m} : \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Доказательство ассоциативности приведено в примере 5.2, остальные свойства предлагаются для самостоятельной работы читателя (задачи 5.10–5.13).

5.25. Произведение двух ненулевых матриц может оказаться нулевой матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

отсюда следует, что в матричных равенствах вида $AC = BC$ множитель C нельзя сокращать даже в случае, когда $C \neq O$.

5.26. Операция умножения матриц не обладает свойством коммутативности, т.е., вообще говоря, $AB \neq BA$; более того, одно из произведений AB и BA может существовать, а другое нет, или эти произведения могут иметь разные размеры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix};$$

произведение тех же матриц в обратном порядке не существует. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}.$$

5.27. Квадратные матрицы A и B одинакового размера называются *коммутирующими*, если $AB = BA$, и *некоммутирующими* в противном случае. *Коммутатором* квадратных матриц A и B называется выражение

$$[A, B] = AB - BA.$$

В следующих примерах матрицы A, B коммутируют, а C, D — нет:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad CD = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix},$$

$$[C, D] = CD - DC = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.28. Теорема. Коммутатор обладает следующими свойствами:

(i) *антикоммутативность*:

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} : \quad [A, B] = -[B, A];$$

(ii) *правило Лейбница*:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n} : \quad [A, BC] = [A, B]C + B[A, C];$$

(iii) *тождество Якоби*:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n} : \quad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O.$$

5.29. Умножение блочных матриц также производится согласно приведённому выше определению: каждый блок матрицы-произведения равен сумме попарных произведений блоков матриц-сомножителей, однако требуется, чтобы все «горизонтальные размеры» блоков в первом сомножителе совпадали с соответствующими «вертикальными размерами» во втором. Например,

$$\left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ m_1 \times n_1 & m_1 \times n_2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} B_1 \\ n_1 \times p \\ B_2 \\ n_2 \times p \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \underbrace{A_{11}B_1 + A_{12}B_2}_{m_1 \times p} \\ \underbrace{A_{21}B_1 + A_{22}B_2}_{m_2 \times p} \end{array} \right\|.$$

5.30. Если A — квадратная матрица, то её *степень* A^d , $d = 0, 1, \dots$, определяется следующим образом:

$$A^0 = \mathbf{1}, \quad A^1 = A, \quad A^d = A^{d-1}A = \underbrace{A \cdots A}_{d \text{ раз}}.$$

5.31. Пусть $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_{d-1}x + a_d$ — многочлен степени d от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Под *многочленом от матрицы* понимается выражение

$$f(A) = a_0A^d + a_1A^{d-1} + \dots + a_{d-1}A + a_d\mathbf{1}.$$

Ж. Структура произведения матриц.

5.32. Теорема. Пусть $A = (a_l^j)_s^m \in \mathbb{K}^{m \times s}$, $B = (b_k^l)_n^s \in \mathbb{K}^{s \times n}$.

- (i) k -й столбец матрицы $C = AB$ равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, представляющими собой элементы k -го столбца матрицы B :

$$C_k = \sum_{l=1}^p A_l b_k^l.$$

- (ii) k -й столбец матрицы $C = AB$ равен произведению матрицы A на k -й столбец матрицы B :

$$C_k = A \cdot B_k.$$

- (iii) p -я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, представляющими собой элементы p -й строки матрицы A :

$$C^p = \sum_{k=1}^s a_k^p B^k.$$

- (iv) s -я строка матрицы AB равна произведению s -й строки матрицы A на матрицу B :

$$C^p = A^p \cdot B.$$

3. Обратная матрица.

5.33. Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A , если выполняются соотношения

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}.$$

Матрица, для которой существует обратная, называется *обратимой*.

5.34. Не все матрицы обратимы; очевидно, для нулевой матрицы обратная не существует. Вопрос о существовании обратной матрицы в общем случае будет решён позже (см. теорему ??, с. ??).

5.35. Теорема. Обратимые матрицы обладают следующими свойствами:

- (i) единичная матрица обратима и $\mathbf{1}^{-1} = \mathbf{1}$;
- (ii) если матрица A обратима, то её обратная матрица A^{-1} также обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (iii) если матрица A обратима, то обратная матрица A^{-1} единственна;
- (iv) если матрицы A и B обратимы, то их произведение также обратимо и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5.36. Теорема. (2×2) -Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обратима тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$, и обратная к ней вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Если $ad - bc = 0$, то матрица A обратной не имеет.

5.37. Число $ad - bc$ называется *определителем* (2×2) -матрицы A . Изучению определителей посвящена глава 6; там же решён вопрос о вычислении обратной матрицы для матриц третьего порядка. В общем случае задача об обратной матрице рассмотрена в главе ??).

5.38. Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц. Однако существуют неквадратные матрицы, произведение которых является единичной матрицей, например, при любых a, b имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В подобных ситуациях матрицы в левой части равенства *не считаются* обратными друг к другу.

2. Примеры решения задач

Пример 5.1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите $2A - 3B$, AB^T , BA^T , A^TB , B^TA .

Решение:

$$2A - 3B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ 2 & 22 & 6 \end{pmatrix},$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA^T = (AB^T)^T = O,$$

$$A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ 12 & -24 & 12 \\ 15 & -30 & 15 \end{pmatrix},$$

$$B^TA = (A^TB)^T = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ -18 & -24 & -30 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2. Докажите ассоциативность умножения матриц (п. (1) теоремы 5.24).

Решение. Пусть

$$A = (a_{ij}^i)_s^m, \quad B = (b_{kj}^j)_p^s, \quad C = (c_{li}^k)_n^p.$$

Убедимся в совпадении размеров матриц: AB имеет размер $m \times p$, $(AB)C$ — размер $m \times n$, BC — размер $s \times n$, $A(BC)$ — размер $m \times n$. Таким образом, размеры матриц $A(BC)$ и $(AB)C$ одинаковы.

Вычислим соответствующие элементы матриц:

$$\begin{aligned}
 \{A(BC)\}_l^i &= \sum_{j=1}^s a_j^i \{BC\}_l^j \quad (\text{определение произведения } A(BC)) \\
 &= \sum_{j=1}^s a_j^i \left(\sum_{k=1}^p b_k^j c_l^k \right) \quad (\text{определение произведения } BC) \\
 &= \sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^p a_j^i b_k^j c_l^k \right) \quad (\text{внесение множителя в скобку}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^s a_j^i b_k^j c_l^k \right) \quad (\text{перемена порядка суммирования}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^s a_j^i b_k^j \right) c_l^k \quad (\text{вынесение общего множителя}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^s \{AB\}_k^i \right) c_l^k = \{(AB)C\}_l^i.
 \end{aligned}$$

Пример 5.3. Докажите теорему 5.32.

Решение. Проанализируем строение столбцов матрицы $C = AB$, где

$$A = (a_l^j)_s^m \in \mathbb{K}^{m \times s}, \quad B = (b_k^l)_n^s \in \mathbb{K}^{s \times n},$$

Представим матрицу A в виде совокупности столбцов

$$A = \left\| A_1, A_2, \dots, A_s \right\|;$$

здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_s = \begin{pmatrix} a_s^1 \\ a_s^2 \\ \vdots \\ a_s^m \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $C = \begin{matrix} A & B \\ m \times n & m \times s \quad s \times n \end{matrix}$ вычисляются по формуле

$$c_k^j = \sum_{l=1}^s a_l^j b_k^l, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, m, \\ k = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Представим матрицу C в виде совокупности столбцов:

$$C = \left\| C_1, C_2, \dots, C_n \right\|$$

и проанализируем структуру её k -го столбца C_k :

$$C_k = \begin{pmatrix} c_k^1 \\ \vdots \\ c_k^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^s a_l^1 b_k^l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^s a_l^m b_k^l \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^s \begin{pmatrix} a_l^1 \\ \vdots \\ a_l^m \end{pmatrix} b_k^l = \sum_{l=1}^s A_l b_k^l = A \cdot B_k.$$

Утверждения для строк матрицы C доказываются аналогично.

Пример 5.4. Найдите неизвестные матрицы X и Y из уравнений (а) $XA = B$, (б) $AY = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Каждая из матриц X, Y имеет размер 2×2 . Проверим, обратима ли матрица A :

$$ad - bc = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2 \neq 0,$$

т.е. матрица A^{-1} существует и равна

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Умножая обе части уравнения $XA = B$ справа на A^{-1} , получим

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

(б) Умножая обе части уравнения $AY = B$ слева на A^{-1} , получим

$$Y = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (а) $X = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$, (б) $Y = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

найдите (а) $(3A - 2B)C^T$, (б) $(3A^T - 2B^T)C$, (в) $C^T(3A - 2B)$.

5.2 (р). Докажите, что матрица $A = \lambda \mathbf{1}$, где λ — произвольное число, а $\mathbf{1}$ — единичная матрица, коммутирует со всеми матрицами того же порядка.

5.3. Для любого натурального n найдите

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; & \text{(б)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n; \\ \text{(в)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n; & \text{(г)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n. \end{aligned}$$

5.4. Найдите:

$$\text{(а)} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n.$$

5.5. Для данных матриц A и B найдите $AB - BA$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.6. Найдите $f(A)$, если

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 7x - 2; \\ \text{(б)} \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 3x - 1; \\ \text{(в)} \quad & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 3x + 2; \end{aligned}$$

$$(г) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - x + 3.$$

5.7. Для данных матриц найдите обратные:

$$(а) \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (б) \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (в) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(г) \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (д) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad (е) \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

5.8. Решите уравнения (а) $XA = B$, (б) $AX = B$, (в) $AXB = \mathbf{1}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.9. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Запишите линейную комбинацию, в виде которой представляется (а) второй столбец матрицы AB , (б) третий столбец матрицы BA , (в) вторая строка матрицы AB , (г) третья строка матрицы BA .

5.10. Докажите теорему 5.24.

5.11. Докажите теорему 5.28.

5.12. Докажите теорему 5.35.

5.13. Докажите теорему 5.36.

5.14 (у). Докажите, что для любых двух матриц $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ и $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ соотношение $[A, B] = \mathbf{1}_n$ выполняться не может.

5.15. Докажите, что каждая матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ второго порядка удовлетворяет уравнению $x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0$.

5.16 (у). Докажите, что $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$, где P , A — квадратные матрицы одного порядка и $f(x)$ — произвольный многочлен.

5.17 (у). Пусть квадратная матрица A такова, что $A^2 + A + \mathbf{1} = O$. Докажите, что матрица A обратима, и найдите обратную матрицу.

5.18. Докажите, что при $n \geq 1$ выполняются соотношения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = (-1)^n \begin{pmatrix} F_{n+1} & -F_n \\ -F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},$$

где F_n — числа Фибоначчи (см. задачу 1.9).

5.19 (y). Пусть квадратная матрица A такова, что $A^m = O$ (такие матрицы называются нильпотентными). Докажите, что матрица $\mathbb{1} - A$ обратима и $(\mathbb{1} - A)^{-1} = \mathbb{1} + A + \dots + A^{m-1}$.

5.20. Пусть A, B — столбцы одинаковой высоты и $C = AB^T$. Докажите, что существует такое число λ , что $C^2 = \lambda C$.

5.21. (2×2) -Матрицы

$$\sigma_1 \equiv \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где i — мнимая единица, называются *матрицами Паули*; они имеют важные приложения в теоретической физике. Найдите все попарные произведения и коммутаторы матриц Паули.

5.22. Матрица A называется *симметричной*, если $A^T = A$, и *кососимметричной* (*антисимметричной*), если $A^T = -A$. Докажите следующие утверждения:

- произведение AB симметричных матриц A, B является симметричной матрицей тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют;
- если матрица A симметрична, то матрица A^k симметрична при любом натуральном k ;
- произведение AB кососимметричных матриц A, B является симметричной матрицей тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют.
- Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие кососимметричности произведения AB двух кососимметричных матриц A, B .
- Докажите, что если матрица A кососимметрична, то матрица A^k симметрична при чётном k и кососимметрична при нечётном k .

ГЛАВА 6

Определители второго и третьего порядков

1. Основные понятия и факты

А. Система двух уравнений с двумя неизвестными.

6.1. Для анализа взаимного расположения на плоскости двух прямых, заданных общими уравнениями вида (4.8), требуется решить систему двух уравнений с двумя неизвестными следующего вида (по сравнению с предыдущим изложением коэффициенты уравнений обозначены иначе):

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q, \end{cases} \quad (6.1)$$

где a, b, c, d, p, q — заданные числа, x, y — неизвестные. Решим систему методом исключения неизвестных.

Умножая первое уравнение на d , второе на $-b$ и складывая полученные уравнения, получим

$$(ad - bc)x = pd - qb.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $-c$, второе на a и складывая полученные уравнения, получим

$$(ad - bc)y = qa - pc.$$

Если $ad - bc \neq 0$, имеем

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{qa - pc}{ad - bc}.$$

Прямая проверка показывает, что эти числа действительно представляют собой решение системы (6.1) в случае, когда $ad - bc \neq 0$. Кроме того, ясно, что это решение единственно¹.

¹ Действительно, поскольку каждое из двух уравнений $(ad - bc)y = qa - pc$ и $(ad - bc)x = pd - qb$ является следствием системы (6.1), любое решение исходной системы является одновременно и решением полученных уравнений.

6.2. Для облегчения запоминания этих формул запишем коэффициенты системы (6.1) в виде матрицы

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

называемой *основной матрицей* системы. Поставим в соответствие этой матрице число $ad - bc$; оно называется *определителем* (или *детерминантом*) матрицы M (см. п. 5.37, с. 80) и обозначается одним из следующих способов:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \det M \equiv |M| \equiv \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad - bc.$$

Такой определитель называют *определителем второго порядка* (по количеству его строк и столбцов). Часто используются термины «элемент (строка, столбец) определителя»; они означают соответственно элемент (строку, столбец) матрицы M , для которой рассматривается определитель.

6.3. С помощью определителей формулы для решения системы могут быть записаны в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det M_x}{\det M}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det M_y}{\det M}, \quad (6.2)$$

где M_x (соответственно, M_y) — матрица, полученная из M заменой первого (соответственно, второго) столбца на столбец, состоящий из свободных членов уравнений. Полученные формулы называются *формулами Крамера*.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

6.4. Предложение. Если определитель $\det M$ основной матрицы системы (6.1) отличен от нуля, то существует единственное решение этой системы, определяемое формулами Крамера (6.2).

6.5. Если же $\det M = 0$, то система (6.1) может либо вовсе не иметь решений, либо иметь их бесконечно много, как показывают

следующие примеры:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \det M = 0, \quad \begin{cases} \det M_x = -1, \\ \det M_y = 1, \end{cases} \quad (\text{решений нет});$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2, \\ 3x + 3y = 3 \end{cases} \quad \det M = 0, \quad \begin{cases} \det M_x = 0, \\ \det M_y = 0, \end{cases} \quad (\text{решений бесконечно много}).$$

Пример несовместной системы

$$\begin{cases} 0x + 0y = 1, \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

рассеивает распространённое заблуждение (встречающееся даже и в учебниках!), будто в случае $\det M = \det M_x = \det M_y = 0$ система имеет бесконечно много решений.

6.6. Геометрический вывод, вытекающий из полученных результатов, таков: две прямые на плоскости могут либо пересекаться в единственной точке, либо не иметь общих точек (параллельные прямые), либо полностью совпадать.

Б. Свойства определителя второго порядка.

6.7. Для дальнейшего изложения удобно считать, что структурными элементами определителя второго порядка являются не четыре числа, а два двухэлементных столбца (по поводу обозначений см. определение 4.36):

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

В этом случае будем обозначать определитель следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \|\mathbf{a}, \mathbf{b}\| = |\mathbf{a}, \mathbf{b}|.$$

Следующие свойства определителя второго порядка проверяются прямыми выкладками.

6.8. Теорема (основные свойства определителя). *Определитель второго порядка обладает следующими свойствами:*

(i) *линейность по первому столбцу:*

$$\det \|\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\| = \alpha_1 \det \|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}\| + \alpha_2 \det \|\mathbf{a}_2, \mathbf{b}\|$$

или, в развёрнутом виде,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 & b \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 & d \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix};$$

также имеет место аналогичное свойство линейности по второму столбцу:

$$\det \|\mathbf{a}, \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2\| = \beta_1 \det \|\mathbf{a}, \mathbf{b}_1\| + \beta_2 \det \|\mathbf{a}, \mathbf{b}_2\|;$$

(ii) *кососимметричность*:

$$\det \|\mathbf{a}, \mathbf{b}\| = -\det \|\mathbf{b}, \mathbf{a}\|;$$

в развёрнутом виде

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

(при перестановке столбцов определитель меняет знак);

(iii) *нормировка*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\| = 1,$$

где

$$\mathbf{e}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— так называемые *единичные столбцы*.

Эти три свойства определителя называются *основными*, или *характеристическими*. Из них можно вывести ряд новых (*производных*) свойств, полезных при вычислениях.

6.9. Предложение (производные свойства определителя).

(i) *Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю*:

$$\det \|\mathbf{a}, \mathbf{a}\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) *Определитель не изменится, если к одному его столбцу прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число*:

$$\det \|\mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{b}\| = \det \|\mathbf{a}, \mathbf{b}\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. При перестановке столбцов знак определителя должен измениться в силу кососимметричности, но с другой стороны, определитель не изменится, поскольку переставляемые столбцы одинаковы.

2. Действительно,

$$\det \|\mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{b}\| = \det \|\mathbf{a}, \mathbf{b}\| + \underbrace{\beta \det \|\mathbf{b}, \mathbf{b}\|}_{=0} = \det \|\mathbf{a}, \mathbf{b}\|. \quad \square$$

6.10. Производные свойства, перечисленные в предложении 6.9, можно вывести непосредственно из определения, но мы вывели их из основных свойств, установленных в теореме 6.8. В дальнейшем основные свойства будут приняты за аксиомы, и производные свойства придётся выводить именно таким образом.

Имеет место следующее очевидное свойство, означающее, что строки и столбцы определителя равноправны: любое утверждение, верное для столбцов, будет справедливым и для строк.

6.11. Предложение. *Определитель второго порядка не меняется, если элементы его столбцов записать в строки и наоборот:*

$$\left| \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array} \right| \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline d \\ \hline \end{array} = \left| \begin{array}{|c|} \hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline \end{array} \right|.$$

6.12. Преобразование матрицы, при котором элементы каждой строки записываются в столбец, называется *транспонированием*. Разумеется, транспонированию можно подвергнуть матрицу с любым количеством строк и столбцов.

6.13. Теорема. *Определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) пропорциональны, т.е. линейно зависимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть определитель равен нулю. Имеем:

$$\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = 0 \iff ad = bc \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \alpha \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

(самостоятельно проанализируйте случай, когда среди элементов определителя имеются нулевые).

2. Пусть столбцы определителя пропорциональны; тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{array} \right| = 0. \quad \square$$

В. Определитель третьего порядка.

6.14. Согласно теореме 6.13 два вектора на плоскости коллинеарны тогда и только тогда, когда обращается в нуль определитель второго порядка, столбцы которого составлены из координат рассматриваемых векторов. Попробуем решить аналогичную задачу для трёх векторов в пространстве, т.е. сконструируем из координат трёх заданных векторов выражение, которое обращалось бы в нуль тогда и только тогда, когда заданные три вектора компланарны.

6.15. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — три компланарных вектора. Согласно теореме ?? это возможно тогда и только тогда, когда один из них выражается в виде линейной комбинации двух других, например, $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$. Будем предполагать, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ не являются коллинеарными; в противном случае (т.е. $\mathbf{b} = \kappa \mathbf{a}$) вектор $\mathbf{c}$ коллинеарен (пропорционален) им обоим:

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} + \mu \kappa \mathbf{a} = (\lambda + \mu \kappa) \mathbf{a}.$$

Случай коллинеарных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ анализируется аналогично, но гораздо проще.

Пусть $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — произвольный базис в пространстве. Разложив векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ по этому базису, получим столбцы координат

$$\mathbf{a} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix},$$

из которых сформируем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

В силу теорем 4.41 и 4.42 соотношение $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ (или $\lambda A + \mu B = C$) эквивалентно следующему:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda a_x + \mu b_x = c_x, \\ \lambda a_y + \mu b_y = c_y, \\ \lambda a_z + \mu b_z = c_z. \end{cases} \quad (6.4)$$

Получили переопределённую систему трёх уравнений с двумя неизвестными λ, μ , которая (в силу предположения о компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$) имеет решение, т.е. существует (хотя бы одна) пара чисел λ_0, μ_0 , обращающая при подстановке в верное числовое равенство каждое из уравнений системы. Поступим следующим образом: найденные из второго и третьего уравнений системы числа

λ_0, μ_0 подставим в первое уравнение системы (6.4), после чего оно обратится в верное равенство.

По формулам Крамера (6.2) получаем:

$$\begin{cases} \lambda a_y + \mu b_y = c_y, \\ \lambda a_z + \mu b_z = c_z \end{cases} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{\begin{vmatrix} c_y & b_y \\ c_z & b_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}}, \quad \mu_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_y & c_y \\ a_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}};$$

определитель, стоящий в знаменателях дробей, отличен от нуля в силу неколлинеарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Подставив найденные выражения в первое уравнение системы (6.4) и умножив обе части полученного равенства на знаменатель, находим:

$$a_x \begin{vmatrix} c_y & b_y \\ c_z & b_z \end{vmatrix} + b_x \begin{vmatrix} a_y & c_y \\ a_z & c_z \end{vmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Используя свойство кососимметричности определителя второго порядка,

$$\begin{vmatrix} c_y & b_y \\ c_z & b_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix},$$

запишем равенство (6.5) в следующем виде:

$$a_x \begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix} - b_x \begin{vmatrix} a_y & c_y \\ a_z & c_z \end{vmatrix} + c_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} = 0. \quad (6.6)$$

Итак, если три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны, то выполняется равенство (6.6). Выражение в левой части этого равенства заслуживает особого изучения.

6.16. Выражение в левой части равенства (6.6) устроено следующим образом: оно является суммой трёх слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение элемента первой строки матрицы M (см. (6.3)) — числа a_x, b_x или c_x — на определитель второго порядка, который получится, если из матрицы M удалить строку и столбец, на пересечении которых стоит соответствующий элемент первой строки; при этом слагаемое, содержащее b_x , берется с противоположным знаком. Полученное выражение называют

определителем матрицы M , или *определителем третьего порядка*, и обозначают $\det M$, $\det \|A, B, C\|$ или при помощи вертикальных ограничителей $|M|$. Итак, *по определению*

$$|M| \equiv \det \|A, B, C\| \equiv |a, b, c| \equiv \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \equiv \det \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} a_x \begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix} - b_x \begin{vmatrix} a_y & c_y \\ a_z & c_z \end{vmatrix} + c_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}. \quad (6.7)$$

6.17. Раскрывая входящие в (6.7) определители второго порядка, получим формулу, называемую *формулой полного развёртывания* определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \\ = a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x. \quad (6.8)$$

6.18. Перегруппировкой слагаемых нетрудно получить формулы разложения определителя по второй и третьей строкам (сделайте это самостоятельно!):

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = -a_y \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_z & c_z \end{vmatrix} + b_y \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_z & c_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = a_z \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} - b_z \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_y & c_y \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}.$$

6.19. Точно так же получаются формулы разложения определителя по столбцам:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = a_x \begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_z & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = -b_x \begin{vmatrix} a_y & c_y \\ a_z & c_z \end{vmatrix} + b_y \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_z & c_z \end{vmatrix} - b_z \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_y & c_y \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix},$$

6.20. Обратите внимание на появление знаков « $-$ » в некоторых слагаемых полученных формул в соответствии со следующей схемой, смысл которой довольно очевиден:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

6.21. Замечание. Формула (6.7) разложения определителя третьего порядка *по первой строке* является *определением* и потому никакого доказательства не требует. Напротив, формулы разложения по другим строкам и по столбцам и формула полного развёртывания являются *следствиями* определения (6.7), т.е. должны быть *выведены* из него.

6.22. Определители второго порядка, фигурирующие в формулах разложения, называются *дополнительными минорами* тех элементов, на которые они умножаются; внимательный читатель уже заметил, что каждый дополнительный минор получается удалением из исходного определителя строки и столбца, на пересечении которых расположен соответствующий этому минору элемент, например, дополнительный минор элемента c_y равен

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

(удаляемые элементы затенены).

6.23. Дополнительный минор элемента определителя, домноженный на ± 1 согласно схеме (6.9), называется *алгебраическим дополнением* соответствующего элемента. Будем обозначать алгебраическое дополнение каждого элемента определителя той же буквой, что и сам элемент, но прописного каллиграфического начертания (см. таблицу 1 на с. 6); например, алгебраические дополнения элементов b_y и c_y определителя равны

$$\mathcal{B}_y = \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_z & c_z \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}_y = - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}.$$

6.24. Таким образом, формулы разложения определителя по столбцам имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} &= a_x \mathcal{A}_x + a_y \mathcal{A}_y + a_z \mathcal{A}_z = \\ &= b_x \mathcal{B}_x + b_y \mathcal{B}_y + b_z \mathcal{B}_z = \\ &= c_x \mathcal{C}_x + c_y \mathcal{C}_y + c_z \mathcal{C}_z. \end{aligned}$$

Формулы разложения определителя по строкам имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} &= a_x \mathcal{A}_x + b_x \mathcal{B}_x + c_x \mathcal{C}_x = \\ &= a_y \mathcal{A}_y + b_y \mathcal{B}_y + c_y \mathcal{C}_y = \\ &= a_z \mathcal{A}_z + b_z \mathcal{B}_z + c_z \mathcal{C}_z. \end{aligned}$$

Г. Свойства определителя третьего порядка.

6.25. Предложение. *Определители взаимно транспонированных (3×3) -матриц¹ равны:*

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Действительно, разложение левого определителя по первому столбцу совпадает с разложением правого определителя по первой строке.

Благодаря этому свойству, называемому иногда свойством равноправия строк и столбцов определителя, каждое свойство определителя, доказанное для столбцов, автоматически будет верным и для строк.

6.26. Теорема (основные свойства определителя третьего порядка). *Определитель третьего порядка обладает следующими свойствами:*

(i) *линейность по каждому столбцу, например,*

$$\begin{aligned} \det \left\| \alpha' A' + \alpha'' A'', B, C \right\| &= \\ &= \alpha' \det \left\| A', B, C \right\| + \alpha'' \det \left\| A'', B, C \right\| \end{aligned}$$

— линейность по первому столбцу;

¹То есть матриц, состоящих из трёх строк и трёх столбцов.

- (ii) *кососимметричность*: при перестановке местами двух любых столбцов определитель меняет знак, например,

$$\det \|B, A, C\| = -\det \|A, B, C\|;$$

- (iii) *нормировка*:

$$\det \|e_1, e_2, e_3\| = 1,$$

где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения доказываются при помощи формул разложения определителя третьего порядка по строке или столбцу и свойств определителя второго порядка. Например, для доказательства линейности по первому столбцу разложим определитель по этому столбцу¹:

$$\begin{aligned} \det \|\alpha' A' + \alpha'' A'', B, C\| &= \\ &= \begin{vmatrix} \alpha' a'_x + \alpha'' a''_x & b_x & c_x \\ \alpha' a'_y + \alpha'' a''_y & b_y & c_y \\ \alpha' a'_z + \alpha'' a''_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = (\alpha' a'_x + \alpha'' a''_x) \begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix} - \\ &- (\alpha' a'_y + \alpha'' a''_y) \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_z & c_z \end{vmatrix} + (\alpha' a'_z + \alpha'' a''_z) \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} = \\ &= \alpha' a'_x \begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix} - \alpha' a'_y \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_z & c_z \end{vmatrix} + \alpha' a'_z \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} + \\ &+ \alpha'' a''_x \begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix} - \alpha'' a''_y \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_z & c_z \end{vmatrix} + \alpha'' a''_z \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

¹Здесь используются обозначения

$$A' = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} a''_x \\ a''_y \\ a''_z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha' \begin{vmatrix} a'_x & b_x & c_x \\ a'_y & b_y & c_y \\ a'_z & b_z & c_z \end{vmatrix} + \alpha'' \begin{vmatrix} a''_x & b_x & c_x \\ a''_y & b_y & c_y \\ a''_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \\
&= \alpha' \det \|A', B, C\| + \alpha'' \det \|A'', B, C\|.
\end{aligned}$$

Чтобы доказать смену знака определителя при перестановке, например, первого и второго столбцов, разложим определитель его по третьему столбцу и воспользуемся свойством кососимметричности определителя второго порядка:

$$\begin{aligned}
\det \|B, A, C\| &= \begin{vmatrix} b_x & a_x & c_x \\ b_y & a_y & c_y \\ b_z & a_z & c_z \end{vmatrix} = \\
&= c_x \begin{vmatrix} b_y & a_y \\ b_z & a_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} b_x & a_x \\ b_z & a_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} b_x & a_x \\ b_y & a_y \end{vmatrix} = \\
&= -c_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - c_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \\
&= - \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \det \|A, B, C\|. \quad \square
\end{aligned}$$

6.27. Предложение (производные свойства определителя).

(i) *Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю:*

$$\det \|A, A, B\| = 0.$$

(ii) *Определитель не изменится, если к любому его столбцу прибавить произвольную линейную комбинацию остальных столбцов:*

$$\det \|A + \beta B + \gamma C, B, C\| = \det \|A, B, C\|.$$

Эти утверждения доказываются точно так же, как предложение 6.9.

6.28. Теорема (критерий равенства определителя нулю). *Определитель третьего порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно зависимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* фактически была доказана в п. 6.15: определитель третьего порядка определяется именно

таким выражением, которое обращается в нуль в случае линейно зависимых столбцов. Однако нетрудно повторить рассуждения, основываясь на свойствах определителя. Итак, пусть столбцы A , B , C линейно зависимы; тогда один из них является линейной комбинацией остальных (в силу свойства ЛЗ-3 из теоремы 4.33, с. 55), например, $C = \lambda A + \mu B$. Определитель $\det \|A, B, C\|$, составленный из координат данных векторов, не изменится, если из последнего столбца вычесть линейную комбинацию $\lambda A + \mu B$ первых двух столбцов:

$$\det \|A, B, C\| = \det \|A, B, C - \lambda A - \mu B\| = \det \|A, B, O\| = 0;$$

очевидно, последний определитель равен нулю (разложите его по последнему столбцу).

Достаточность докажем для строк. Пусть

$$\det M = \det \|A, B, C\| = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Введём следующие обозначения для строк определителя:

$$M_x = (a_x, b_x, c_x), \quad M_y = (a_y, b_y, c_y), \quad M_z = (a_z, b_z, c_z).$$

Если одна из строк (например, M_x) нулевая, то строки линейно зависимы; действительно, нетривиальная линейная комбинация

$$1 \cdot M_x + 0 \cdot M_y + 0 \cdot M_z$$

равна нулевой строке. Таким образом, можно считать, что все строки определителя ненулевые; тогда без ограничения общности можно предположить, что $a_x \neq 0$ (этого можно добиться, переставляя местами строки или столбцы; равенство $\det \|A, B, C\| = 0$ при этом не нарушается). Пользуясь свойством 2 из предложения 6.27, вычтем из второй и третьей строк определителя первую строку, умноженную на такие коэффициенты, чтобы элементы первого столбца (кроме a_x) обратились в нули:

$$0 = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ 0 & b_y - \frac{a_y}{a_x} b_x & c_y - \frac{a_y}{a_x} c_x \\ 0 & b_z - \frac{a_z}{a_x} b_x & c_z - \frac{a_z}{a_x} c_x \end{vmatrix}. \quad (6.10)$$

Разлагая полученный определитель по первому столбцу и принимая во внимание тот факт, что $a_x \neq 0$, получаем

$$\begin{vmatrix} b_y - \frac{a_y}{a_x}b_x & c_y - \frac{a_y}{a_x}c_x \\ b_z - \frac{a_z}{a_x}b_x & c_z - \frac{a_z}{a_x}c_x \end{vmatrix} = 0.$$

Согласно теореме 6.13 строки этого определителя линейно зависимы, а потому линейно зависимы и строки определителя, полученного в (6.10), т.е. строки

$$\begin{aligned} N_y &= \left(0, b_y - \frac{a_y}{a_x}b_x, c_y - \frac{a_y}{a_x}c_x \right) = M_y - \frac{a_y}{a_x}M_x, \\ N_z &= \left(0, b_z - \frac{a_z}{a_x}b_x, c_z - \frac{a_z}{a_x}c_x \right) = M_z - \frac{a_z}{a_x}M_x. \end{aligned}$$

Это означает, что существуют такие числа β_y и β_z , не равные одновременно нулю, что $\beta_y N_y + \beta_z N_z = O$. Но тогда

$$\begin{aligned} \beta_y N_y + \beta_z N_z &= \beta_y \left(M_y - \frac{a_y}{a_x}M_x \right) + \beta_z \left(M_z - \frac{a_z}{a_x}M_x \right) = \\ &= - \left(\beta_y \frac{a_y}{a_x} + \beta_z \frac{a_z}{a_x} \right) M_x + \beta_y M_y + \beta_z M_z = O, \end{aligned}$$

т.е. строки M_x , M_y , M_z линейно зависимы, что и требовалось доказать. $\square$

Д. Формулы Крамера.

6.29. Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a^1x + b^1y + c^1z = p^1, \\ a^2x + b^2y + c^2z = p^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z = p^3. \end{cases} \quad (6.11)$$

Введя в рассмотрение столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix},$$

перепишем систему в виде

$$xA + yB + zC = P.$$

Эту запись можно трактовать следующим образом: если числа x, y, z образуют решение системы, то столбец P является линейной комбинацией столбцов A, B, C с коэффициентами x, y, z .

6.30. Предположив, что тройка чисел x, y, z является решением системы, рассмотрим определитель $\det \|P, B, C\|$ и преобразуем его следующим образом, используя свойства определителя:

$$\begin{aligned}\det \|P, B, C\| &= \det \|xA + yB + zC, B, C\| = \\ &= x \det \|A, B, C\| + y \det \|B, B, C\| + z \det \|C, B, C\|.\end{aligned}$$

Определители $\det \|B, B, C\|$ и $\det \|C, B, C\|$ равны нулю, поскольку содержат одинаковые столбцы, так что получаем

$$x \det \|A, B, C\| = \det \|P, B, C\|.$$

Преобразуя определители $\det \|A, P, C\|$ и $\det \|A, B, P\|$ аналогичным образом, приходим к соотношениям

$$y \det \|A, B, C\| = \det \|A, P, C\|, \quad z \det \|A, B, C\| = \det \|A, B, P\|.$$

Итак, если $\det \|A, B, C\| \neq 0$, то решение системы выражается следующими формулами, называемыми *формулами Крамера*:

$$x = \frac{\det \|P, B, C\|}{\det \|A, B, C\|}, \quad y = \frac{\det \|A, P, C\|}{\det \|A, B, C\|}, \quad z = \frac{\det \|A, B, P\|}{\det \|A, B, C\|}. \quad (6.12)$$

6.31. Эти формулы доказывают единственность решения в случае, когда оно существует и отличен от нуля определитель $\det \|A, B, C\|$; в отличие от случая системы двух уравнений с двумя неизвестными проверка существования путём подстановки выражений (6.12) в уравнения (6.11) затруднительно, и мы его отложим до п. ??.

Е. Символы Леви-Чивиты.

6.32. В п. 6.17 была получена формула полного развёртывания определителя третьего порядка; перепишем её в виде

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} &= \\ &= a^1 b^2 c^3 - a^1 b^3 c^2 + a^2 b^3 c^1 - a^2 b^1 c^3 + a^3 b^1 c^2 - a^3 b^2 c^1, \quad (6.13)\end{aligned}$$

используя верхние числовые индексы 1, 2, 3 вместо нижних буквенных x, y, z (см. п. 4.38). Правая часть формулы полного развёртывания (6.13) содержит 6 слагаемых, каждое из которых является произведением трёх элементов определителя, причем никакие два сомножителя не находятся в одном столбце или в одной строке. Обратим внимание на тот факт, что если множители записаны «по алфавиту» (в математике это называется *лексикографический порядок*), то индексы множителей образуют все шесть ($6 = 3!$) возможных перестановок (см. п. 2.6) чисел 1, 2, 3:

$$1, 2, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 3, 1; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 1, 2; \quad 3, 2, 1.$$

6.33. Проанализируем знаки слагаемых в формуле полного развёртывания. Со знаком «плюс» в сумму входят произведения

$$a^1 b^2 c^3, \quad a^2 b^3 c^1, \quad a^3 b^1 c^2,$$

отвечающие перестановкам верхних индексов

$$1, 2, 3, \quad 2, 3, 1, \quad 3, 1, 2, \tag{6.14}$$

а со знаком «минус» — произведения

$$a^1 b^3 c^2, \quad a^2 b^1 c^3, \quad a^3 b^2 c^1,$$

отвечающие перестановкам

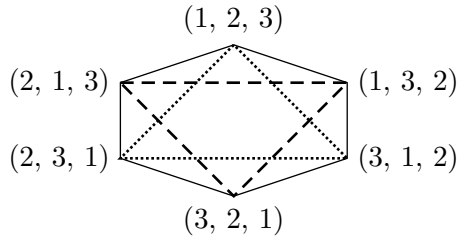
$$1, 3, 2, \quad 2, 1, 3, \quad 3, 2, 1. \tag{6.15}$$

Назовём *транспозицией* преобразование одной перестановки в другую, при котором меняются местами два соседних члена этой перестановки. Внимательно посмотрев на перестановки двух типов (6.14) и (6.15), приходим к следующим выводам:

- (i) каждая перестановка одного типа получается из некоторой перестановки другого типа нечётным числом транспозиций;
- (ii) две перестановки одного типа получаются одна из другой чётным числом транспозиций.

Перестановки (6.14) назовём *чётными*, а перестановки (6.15) — *нечётными*; установленные факты (i)–(ii) можно сформулировать следующим образом: если одна перестановка получена из другой нечётным числом транспозиций, то они имеют разную чётность (т.е. одна из них чётная, а другая нечётная), а если чётным — то одинаковую (т.е. обе либо чётные, либо нечётные). Эти наблюдения

проиллюстрированы на следующей диаграмме:



6.34. Говорят, что в перестановке имеется *инверсия*, если большее число расположено в этой перестановке левее меньшего. Так, в перестановке $(1, 2, 3)$ инверсий нет: её члены расположены в возрастающем порядке. В перестановках $(2, 1, 3)$ и $(1, 3, 2)$ имеется по одной инверсии:

$$\begin{array}{ccc} \curvearrowright & & \curvearrowright \\ 2 & 1 & 3 \qquad \qquad 1 & 3 & 2 \end{array}$$

в перестановках $(2, 3, 1)$ и $(3, 1, 2)$ — по две инверсии:

$$\begin{array}{ccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ 2 & 3 & 1 \qquad \qquad 3 & 1 & 2 \end{array}$$

а в перестановке $(3, 2, 1)$ — три инверсии:

$$\begin{array}{ccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Обозначим число инверсий в перестановке $P = (i, j, k)$ символом $|P|$ (ещё одно употребление ограничителя $|\cdot|$!); тогда *чётностью* перестановки называют число $(-1)^{|P|}$ (которое часто обозначают $(-1)^P$). Таким образом, чётность чётных перестановок равна 1, а нечётных — (-1) .

6.35. Определение. Рассмотрим три переменные i, j, k , каждая из которых может принимать (независимо от остальных) значения 1, 2, 3. Рассмотрим функцию трёх переменных $\varepsilon(i, j, k)$, определяемую следующей формулой:

$$\varepsilon(i, j, k) = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — чётная перестановка,} \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечётная перестановка,} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

эта функция называется *символом Леви-Чивиты*¹. Вместо $\varepsilon(i, j, k)$ принято писать ε_{ijk} ; эти числа (значения функции ε) называются компонентами символа. Итак,

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \quad (6.16)$$

все остальные ε_{ijk} равны нулю.

Очевидно, количество компонент символа Леви-Чивиты равно $3^3 = 27$ (здесь показатель степени равен количеству индексов, а основание — максимальному значению, которое может принимать каждый индекс).

6.36. Из соотношений (6.16) вытекает следующее важное свойство символов Леви-Чивиты, называемое *полной кососимметричностью* (или *полной антисимметричностью*): *при перестановке любых двух индексов символ меняет значение на противоположное*:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}. \quad (6.17)$$

Отметим, что при циклической перестановке индексов («по кругу») значение символа Леви-Чивиты не меняется:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}. \quad (6.18)$$

Соотношения (6.17) и (6.18) верны и в том случае, когда среди индексов символов Леви-Чивиты имеются равные (соответствующий символ в этом случае равен нулю).

6.37. При помощи символов Леви-Чивиты формулу полного развёртывания определителя третьего порядка можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k. \quad (6.19)$$

Тройная сумма в правой части формулы содержит 27 слагаемых, из которых 21 заведомо равны нулю; ненулевыми могут быть лишь оставшиеся 6 слагаемых.

6.38. Использование символов Леви-Чивиты значительно упрощает вывод формул и доказательство теорем. Например, выведем

¹Туллио Лёви-Чивита (Tullio Levi-Civita, 1873–1941) — итальянский математик.

свойство кососимметричности определителя по первым двум столбцам из формулы полного развёртывания. Имеем:

$$\begin{aligned}\det \|B, A, C\| &= \varepsilon_{ijk} b^i a^j c^k && (\text{переставляем множители } b^i \text{ и } a^j) \\ &= \varepsilon_{ijk} a^j b^i c^k && (\text{переставляем индексы у } \varepsilon_{ijk}) \\ &= -\varepsilon_{jik} a^j b^i c^k = -\det \|A, B, C\|.\end{aligned}$$

Ж. Алгебраические дополнения и миноры. В этом разделе будем обозначать элементы определителя через a_k^j :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Напомним (см. п. 6.22), что дополнительным минором элемента a_k^j определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, который получится, если из исходного определителя удалить j -ю строку и k -й столбец; обозначим дополнительный минор элемента a_k^j через M_k^j . Например,

$$M_1^1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad M_1^2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением $\mathcal{A}_j^k$ элемента a_k^j (обратите внимание на положение индексов!) называется минор, взятый со знаком $+$ или $-$ в соответствии со схемой (6.9), т.е.

$$\mathcal{A}_1^1 = M_1^1, \quad \mathcal{A}_2^1 = -M_1^2, \quad \mathcal{A}_3^1 = M_1^3.$$

Анализируя разложения определителя по всем строкам и столбцам (см. пп. 6.16–6.19) и схему знаков, легко получить следующую связь между дополнительными минорами и алгебраическими дополнениями:

$$\mathcal{A}_j^k = (-1)^{j+k} M_k^j, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Сравнивая формулу разложения определителя по первому столбцу

$$\det A = a_1^1 \mathcal{A}_1^1 + a_1^2 \mathcal{A}_2^1 + a_1^3 \mathcal{A}_3^1 = \sum_{i=1}^3 a_1^i \mathcal{A}_i^1 = a_1^i \mathcal{A}_i^1$$

с формулой (6.19) полного разложения, записанной при помощи символов Леви-Чивиты

$$\det A = \varepsilon_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k,$$

получаем формулу для алгебраических дополнений элементов первого столбца:

$$\mathcal{A}_i^1 = \varepsilon_{ijk} a_2^j a_3^k.$$

Общая формула для алгебраического дополнения любого элемента будет получена в п. ??.

3. Определитель произведения матриц.

6.39. Теорема. Если $A, B \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ — две (3×3) -матрицы, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы матрицы $C = AB$ выражаются формулой $c_p^i = a_\alpha^i b_p^\alpha$ (суммирование по индексу $\alpha = 1, 2, 3$), а её определитель — формулой

$$\begin{aligned} \det C &= \varepsilon_{ijk} c_1^i c_2^j c_3^k = \varepsilon_{ijk} \left(a_\alpha^i b_1^\alpha \right) \left(a_\beta^j b_2^\beta \right) \left(a_\gamma^k b_3^\gamma \right) = \\ &= \varepsilon_{ijk} a_\alpha^i a_\beta^j a_\gamma^k b_1^\alpha b_2^\beta b_3^\gamma. \end{aligned}$$

Выражение $\varepsilon_{ijk} a_\alpha^i a_\beta^j a_\gamma^k$ представляет собой определитель матрицы $\|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma\|$, который равен нулю, если среди индексов α, β, γ имеются равные, и может отличаться от определителя $\det A$ матрицы $\|A_1, A_2, A_3\|$ разве лишь множителем, равным знаку перестановки α, β, γ , если эти индексы попарно различны. Таким образом,

$$\varepsilon_{ijk} a_\alpha^i a_\beta^j a_\gamma^k = \det A \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}.$$

Продолжаем выкладку:

$$\det C = \det A \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_1^\alpha b_2^\beta b_3^\gamma = \det A \det B. \quad \square$$

И. Фальшивое разложение определителя. Сумма попарных произведений элементов столбца определителя на их алгебраические дополнения равна значению этого определителя. Выясним, чему равна сумма попарных произведений элемента столбца определителя на алгебраические дополнения элементов *другого* столбца.

6.40. Запишем формулу разложения определителя $\det \|A, B, C\|$ по первому столбцу:

$$\det \|A, B, C\| = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1 \mathcal{A}_1 + a^2 \mathcal{A}_2 + a^3 \mathcal{A}_3.$$

Если заменить элементы a^i , $i = 1, 2, 3$, на произвольные числа x^i , $i = 1, 2, 3$, то получится разложение определителя $\det \|X, B, C\|$:

$$\det \|X, B, C\| = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^3 A_3.$$

В частности, если $X = B$, то значение полученного определителя $\det \|B, B, C\|$ будет равно нулю; правая же часть соответствующего разложения

$$\det \|B, B, C\| = b^1 A_1 + b^2 A_2 + b^3 A_3$$

представляет собой сумму попарных произведений элементов b^i *второго* столбца исходного определителя $\det \|A, B, C\|$ на алгебраические дополнения a_i элементов *первого* столбца. Проведённое рассуждение легко видоизменяется для других столбцов и алгебраических дополнений. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

6.41. Теорема (фальшивое разложение определителя). *Сумма попарных произведений элементов произвольно выбранного столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^3 a_j^k A_k^p = 0, \quad \text{если } j \neq p.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для строк:

$$\sum_{j=1}^3 a_j^k A_q^j = 0, \quad \text{если } k \neq q.$$

6.42. Объединяя эти формулы с формулами разложения определителя по строкам и столбцам, получаем:

$$a_j^k A_k^p \equiv \sum_{k=1}^3 a_j^k A_k^p = \det A \cdot \delta_j^p = \begin{cases} \det A, & \text{если } j = p, \\ 0, & \text{если } j \neq p; \end{cases} \quad (6.21)$$

$$a_j^k A_q^j \equiv \sum_{j=1}^3 a_j^k A_q^j = \det A \cdot \delta_q^k = \begin{cases} \det A, & \text{если } k = q, \\ 0, & \text{если } k \neq q. \end{cases} \quad (6.22)$$

К. Обращение (3×3) -матриц.

6.43. Рассмотрим (3×3) -матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Найдём алгебраические дополнения всех элементов этой матрицы, составим из них новую (3×3) -матрицу и транспонируем её:

$$M^{\vee} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix};$$

полученная матрица $M^{\vee}$ называется *присоединённой* к матрице M . Вычислим произведение $M M^{\vee}$:

$$\begin{aligned} M M^{\vee} &= \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a^1 A_1 + b^1 B_1 + c^1 C_1}{a^2 A_1 + b^2 B_1 + c^2 C_1} & \frac{a^1 A_2 + b^1 B_2 + c^1 C_2}{a^2 A_2 + b^2 B_2 + c^2 C_2} & \frac{a^1 A_3 + b^1 B_3 + c^1 C_3}{a^2 A_3 + b^2 B_3 + c^2 C_3} \\ \frac{a^2 A_1 + b^2 B_1 + c^2 C_1}{a^3 A_1 + b^3 B_1 + c^3 C_1} & \frac{a^2 A_2 + b^2 B_2 + c^2 C_2}{a^3 A_2 + b^3 B_2 + c^3 C_2} & \frac{a^2 A_3 + b^2 B_3 + c^2 C_3}{a^3 A_3 + b^3 B_3 + c^3 C_3} \\ \frac{a^3 A_1 + b^3 B_1 + c^3 C_1}{a^3 A_2 + b^3 B_2 + c^3 C_2} & \frac{a^3 A_2 + b^3 B_2 + c^3 C_2}{a^3 A_3 + b^3 B_3 + c^3 C_3} & \frac{a^3 A_3 + b^3 B_3 + c^3 C_3}{a^3 A_3 + b^3 B_3 + c^3 C_3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \det M & 0 & 0 \\ 0 & \det M & 0 \\ 0 & 0 & \det M \end{pmatrix} = \det M \cdot \mathbf{1}; \end{aligned}$$

подчёркнутые выражения представляют собой разложения определителя $\det M$ по строкам, а остальные выражения — фальшивые разложения. Аналогичный результат получается при вычислении произведения $M^{\vee} M$. Итак, приходим к следующей теореме.

6.44. Теорема. (3×3) -Матрица (6.23) обратима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля. Обратная матрица M^{-1} выражается формулой

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} M^{\vee}, \quad (6.24)$$

где $M^{\vee}$ — присоединённая матрица для M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если матрица M обратима, то $M M^{\vee} = \mathbf{1}$. Вычисляя определители и применяя теорему 6.39, находим

$$\det(M M^{\vee}) = \det M \cdot \det M^{\vee} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det M \neq 0.$$

Обратно, если $\det M \neq 0$, то из равенства $M M^{\vee} = \det M \cdot \mathbf{1}$, доказанного в п. 6.43, получаем (6.24). $\square$

2. Примеры решения задач

Пример 6.1. Вычислите определители

$$(a) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad (б) \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix}.$$

Решение. (а) Имеем

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

(б) Для вычисления определителя вычтем из его второй строки удвоенную первую строку:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 - 2 \cdot 12345 & 24695 - 2 \cdot 12347 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12345 \cdot 1 - 12347 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

Пример 6.2. Решите систему уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 12, \\ 11x - 6y = -7. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители, участвующие в формулах Крамера:

$$\det M = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 11 & -6 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-6) - 3 \cdot 11 = 12 - 33 = -21,$$

$$\det M_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-6) - 3 \cdot (-7) = -72 + 21 = -51,$$

$$\det M_y = \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 11 & -7 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-7) - 12 \cdot 11 = 14 - 132 = -118.$$

По формулам Крамера получаем

$$x = \frac{\det M_x}{\det M} = \frac{17}{7}, \quad y = \frac{\det M_y}{\det M} = \frac{118}{21}.$$

Систему можно записать в матричной форме $MX = P$, где $X = (x; y)^T$ — столбец неизвестных, $P = (12; -7)^T$ — столбец свободных членов. Поскольку матрица M обратима (ибо $\det M \neq 0$),

решение системы выражается формулой $X = M^{-1}P$. Найдём обратную матрицу по формуле (5.3) и далее решение X системы:

$$M^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 11 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X = M^{-1}P = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/7 \\ 118/21 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.3. Решите систему уравнений при каждом значении параметра p :

$$\begin{cases} (p+2)x & - & 3y & = & p, \\ x & + & (p-2)y & = & -1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$|M| = \begin{vmatrix} p+2 & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 1.$$

Если $p \neq \pm 1$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$|M_x| = \begin{vmatrix} p & -3 \\ -1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3,$$

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{(p+1)(p-3)}{(p-1)(p+1)} = \frac{p-3}{p-1},$$

$$|M_y| = \begin{vmatrix} p+2 & p \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2p - 2,$$

$$y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-2(p+1)}{(p-1)(p+1)} = -\frac{2}{p-1}.$$

Если $p = -1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} x - 3y = -1, \\ x - 3y = -1, \end{cases}$$

т.е. состоит из двух одинаковых уравнений. Взяв y произвольно, $y = c$, найдём с помощью этого уравнения $x = 3c - 1$.

Если $p = 1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} 3x - 3y = 1, \\ x - y = -1; \end{cases}$$

полученные уравнения противоречивы, так что система не имеет решений.

Ответ: при $p \neq \pm 1$ решение единственно: $\left(\frac{p-3}{p-1}; -\frac{2}{p-1}\right)$;

при $p = -1$ решений бесконечно много: $(3c - 1; c)$, где c — произвольное число; при $p = 1$ решений нет.

Пример 6.4. Пусть все элементы матрицы A второго порядка являются дифференцируемыми функциями одной переменной x , так что определитель $\det A$ этой матрицы также является функцией от x . Докажите, что $\det A$ — дифференцируемая функция, причём имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' &= (a(x)d(x) - b(x)c(x))' = \\ &= \underline{a'(x)d(x)} + \underline{a(x)d'(x)} - \underline{b'(x)c(x)} - \underline{b(x)c'(x)} = \\ &= (a'(x)d(x) - b'(x)c(x)) + (a(x)d'(x) - b(x)c'(x)) = \\ &= \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 6.5. Не раскрывая определителя, докажите, что он равен нулю:

$$(a) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}; \quad (б) \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. (а) Если из второго столбца вычесть сумму первого и третьего, то получим определитель с нулевым столбцом.

(б) Если к первому столбцу определителя прибавить второй, то получится столбец, все элементы которого равны $a + b + c$; он пропорционален третьему столбцу, так что определитель равен нулю по теореме ??(??).

Пример 6.6. Вычислите определители

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad (б) \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. (а) Преобразуем определитель так, чтобы в его первом столбце образовались два нулевых элемента; после этого разложим определитель по первому столбцу. Итак, ко второй строке прибавим первую, умноженную на -2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

(поскольку во второй строке образовались два нулевых элемента, немного изменим наши первоначальные намерения и раскроем определитель по второй строке)

$$= -(-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 91$$

(обратите внимание на минус перед (-7) , появившийся в силу соотношения между минорами и алгебраическими дополнениями).

(б) Для вычисления второго определителя попытаемся получить нули в третьем столбце; для этого к первой строке прибавим утроенную вторую строку:

$$\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow 3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

и ко второй строке прибавим третью строку, после чего разложим определитель по третьему столбцу:

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 16 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot (45 - 32) = 91; \end{aligned}$$

здесь мы вынесли за знак определителя общий множитель элементов первой строки, равный 7.

Пример 6.7. Найдите обратную матрицу для матрицы

$$M = \|A, B, C\| = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для каждого элемента данной матрицы вычислим алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9, & B_1 &= - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2, & C_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 26, \\ A_2 &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13, & B_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 13, & C_2 &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -13, \\ A_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14, & B_3 &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, & C_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Присоединённая матрица имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы был найден в примере 6.6: $\det M = 91$ (впрочем, его легко получить, используя только что найденные алгебраические дополнения), так что обратная матрица равна

$$M^{-1} = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.8. Решите систему уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 2x + 4y - z = 5, \\ -4x + 5y + z = 2. \end{cases}$$

Решение. Определитель основной матрицы M данной системы был найден в примере 6.6: $\det M = 91 \neq 0$, так что формулы Крамера применимы; столбец правых частей системы равен $P = (6; 5; 2)^T$.

Найдём остальные требуемые определители и далее значения неизвестных x, y, z :

$$\det M_x = \det \|P, B, C\| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 91, \quad x = \frac{\det M_x}{\det M} = 1,$$

$$\det M_y = \det \|A, P, C\| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 91, \quad y = \frac{\det M_y}{\det M} = 1,$$

$$\det M_z = \det \|A, B, P\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 91, \quad z = \frac{\det M_z}{\det M} = 1.$$

Обратная матрица была найдена в примере 6.7; решение матричного уравнения $MX = P$, эквивалентного заданной системе уравнений, имеет вид

$$X = M^{-1}P = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Задачи для самостоятельного решения

6.1. Вычислите следующие определители второго порядка; если определитель равен нулю, укажите линейную зависимость его столбцов и линейную зависимость его строк:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(б) \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 15 \end{vmatrix};$$

$$(в) \begin{vmatrix} n-1 & n \\ n & n+1 \end{vmatrix};$$

$$(г) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix};$$

$$(д) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix};$$

$$(e) \begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos y + \cos x \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix};$$

$$(ж) \begin{vmatrix} a^2 - ab + b^2 & a - b \\ a^2 + ab + b^2 & a + b \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

6.2. Решите системы уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{aligned}
 \text{(а)} \quad & \begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ -5x + 4y = -3; \end{cases} & \text{(б)} \quad & \begin{cases} -5x + 2y = -12, \\ 3x - 4y = 5; \end{cases} \\
 \text{(в)} \quad & \begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 4x + 3y = 5; \end{cases} & \text{(г)} \quad & \begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 4x + 3y = 5. \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.3. Для каждого значения параметра p решите системы:

$$\begin{aligned}
 \text{(а)} \quad & \begin{cases} (p+2)x + 2py = 4, \\ 5x + (p+3)y = 5; \end{cases} \\
 \text{(б)} \quad & \begin{cases} (p+3)x + 15y = p, \\ px + (p+4)y = p-2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.4. Докажите, что уравнение

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$$

относительно неизвестной x имеет вещественные корни при любых вещественных a, b, c .

6.5. Известно, что числа 737, 871, 938 делятся на 67. Не вычисляя определителя, докажите, что число $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \\ 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ также делится на 67.

6.6. Вычислите определители третьего порядка:

$$\begin{aligned}
 \text{(а)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; & \text{(б)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; & \text{(в)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \\
 \text{(г)} \quad & \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}; & \text{(д)} \quad & \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & c \end{vmatrix}; & \text{(е)} \quad & \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \\
 \text{(ж)} \quad & \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ x & y & z \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}; & \text{(з)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}; & \text{(и)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(к)} \quad \left| \begin{array}{ccc} a^2 + 1 & ab & ac \\ ba & b^2 + 1 & bc \\ ca & cb & c^2 + 1 \end{array} \right| & ; \quad \text{(л)} \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & x + 1 & 1 - x \\ 1 - x & 0 & x + 1 \\ x + 1 & 1 - x & 0 \end{array} \right| ; \\
 \text{(м)} \quad \left| \begin{array}{ccc} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{array} \right| & ; \quad \text{(н)} \quad \left| \begin{array}{ccc} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{array} \right|.
 \end{array}$$

6.7. Для данных матриц найдите обратные:

$$\text{(а)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.8 (у). Решите следующие системы уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\text{(а)} \quad \begin{cases} 2x + y - 3z = 8, \\ -x + 2y + 5z = -5, \\ -3x - y + 4z = -11; \end{cases} \quad \text{(б)} \quad \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 4, \\ -3x + 2y - 3z = 4, \\ -3x - 3y + 2z = 4. \end{cases}$$

6.9 (у). Решите следующие системы уравнений с помощью формул Крамера:

$$\text{(а)} \quad \begin{cases} by + cz = a, \\ ax + cz = b, \\ ax + by = c; \end{cases} \quad \text{(б)} \quad \begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = p, \\ a^2x + b^2y + c^2z = p^2. \end{cases}$$

6.10. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & -b^1 & c^1 \\ -a^2 & b^2 & -c^2 \\ a^3 & -b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

ГЛАВА 7

Векторная алгебра.

II. Скалярное, векторное и смешанное произведения

1. Основные понятия и факты

А. Скалярное произведение векторов.

7.1. Определение. *Ортогональной проекцией направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на прямую l называется направленный отрезок $\overrightarrow{A'B'}$, лежащий на прямой l , начало A' и конец B' которого представляют собой ортогональные проекции на эту прямую начала A и конца B направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. Обозначение $\overrightarrow{A'B'} = \text{Pr}_l \overrightarrow{AB}$.*

Если вектор $\mathbf{a}$ порождён направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ (см. определение 4.12), то *ортогональной проекцией этого вектора на прямую l называется вектор $\mathbf{a}'$, порождённый ортогональной проекцией $\overrightarrow{A'B'}$ на указанную прямую направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. Обозначение $\mathbf{a}' = \text{Pr}_l \mathbf{a}$.*

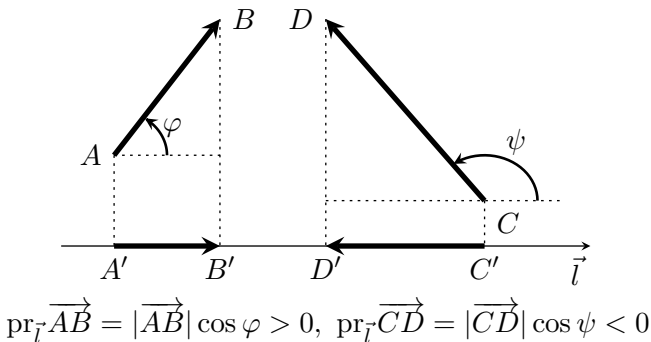


Рис. 7.1. Ортогональная проекция
направленного отрезка на ось

7.2. Если на прямой l выбрано одно из двух возможных направлений, то эта прямая называется *ориентированной прямой*, или *осью*, и обозначается $\vec{l}$. Одно из направлений данной прямой называется условно *положительным*, а другое — *отрицательным*. На чертежах положительным направлением считается направление слева направо или снизу вверх. Любой вектор $\mathbf{l}$, сонаправленный с осью $\vec{l}$, называется *направляющим вектором оси*.

7.3. Определение. *Ортогональной проекцией вектора $\mathbf{a}$ на ось $\vec{l}$ называется число*

$$\text{pr}_{\vec{l}} \mathbf{a} = \begin{cases} |\text{Pr}_l \mathbf{a}|, & \text{если } \text{Pr}_l \mathbf{a} \uparrow \vec{l}, \\ -|\text{Pr}_l \mathbf{a}|, & \text{если } \text{Pr}_l \mathbf{a} \updownarrow \vec{l}. \end{cases}$$

Если $\mathbf{l}$ — направляющий вектор оси $\vec{l}$, то проекцию $\text{pr}_{\vec{l}} \mathbf{a}$ на ось $\vec{l}$ обозначают также символом pr_l .

7.4. Подчеркнём, что согласно принятым определениям проекция вектора *на прямую* является *вектором*, а проекция вектора *на ось* — *числом*.

7.5. Очевидно, проекция $\text{pr}_{\vec{l}} \mathbf{a}$ вектора $\mathbf{a}$ на ось $\vec{l}$ равна

$$\text{pr}_{\vec{l}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi,$$

где φ — угол между вектором $\mathbf{a}$ и осью $\vec{l}$ (или, что то же, угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{l}$).

7.6. Проекции векторов, введённые в определениях 7.1 и 7.3, обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= p(\mathbf{a}) + p(\mathbf{b}) && \text{— аддитивность,} \\ p(\alpha \cdot \mathbf{a}) &= \alpha \cdot p(\mathbf{a}) && \text{— однородность,} \end{aligned} \quad (7.1)$$

где символ p означает любую из указанных проекций векторов (на прямую или на координатную ось). Очевидно, соотношения (7.1) можно объединить в одно:

$$p(\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}) = \alpha \cdot p(\mathbf{a}) + \beta \cdot p(\mathbf{b}). \quad (7.2)$$

Свойство (7.2) называется свойством *линейности*. Итак,

линейность = аддитивность + однородность.

7.7. Определение. *Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = \text{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}|.$$

Другое обозначение скалярного произведения — $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (англ. «dot product»).

7.8. Теорема. Свойства скалярного произведения векторов:

- (1) *линейность по каждому аргументу (смножителю):* для произвольных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ и произвольных вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ выполняются соотношения

$$(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = \alpha_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + \alpha_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{a}, \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2) = \beta_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + \beta_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2),$$

- (2) *симметричность (коммутативность):* для произвольных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a});$$

- (3) *положительная определённость:* для любого вектора $\mathbf{a}$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0,$$

причём $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность скалярного произведения вытекает из линейности проекций (см. п. 7.6). Симметричность и положительная определённость являются непосредственным следствием определения 7.7. $\square$

7.9. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — произвольный базис в пространстве, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные векторы. Разложим эти векторы по базису:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3,$$

и, пользуясь свойством линейности, преобразуем выражение для скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3, b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3) = \\ &= a^1 b^1 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a^1 b^2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a^1 b^3 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + \\ &+ a^2 b^1 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a^2 b^2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + a^2 b^3 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \\ &+ a^3 b^1 (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a^3 b^2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + a^3 b^3 (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Используя символ суммирования, эту выкладку можно записать короче:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{j=1}^3 a^j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^3 b^k \mathbf{e}_k \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^j b^k (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k),$$

а с применением правила суммирования Эйнштейна — ещё короче:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^j \mathbf{e}_j, b^k \mathbf{e}_k) = a^j b^k (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

7.10. Введем обозначение

$$g_{jk} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k);$$

в силу симметричности скалярного произведения имеем

$$g_{jk} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = g_{kj}.$$

Числа g_{jk} называются *метрическими коэффициентами* базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Метрические коэффициенты удобно записать в виде таблицы

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

называемой *матрицей Грама* базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ или *метрическим тензором*.

7.11. Матрица Грама для базиса на плоскости имеет размер (2×2) :

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \end{pmatrix}.$$

Матрицей Грама упорядоченной пары векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (возможно, линейно зависимых) называют (2×2) -матрицу, состоящую из попарных скалярных произведений этих векторов:

$$G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) \end{pmatrix};$$

аналогично для пространства.

7.12. Матрица Грама любого семейства векторов имеет неотрицательный определитель (см. пример 7.2).

7.13. Таким образом, скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно выразить через координаты этих векторов в произвольном базисе и метрические коэффициенты базиса:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{13}a^1b^3 + \\ &+ g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2 + g_{23}a^2b^3 + \\ &+ g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3b^2 + g_{33}a^3b^3 \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{jk}a^jb^k = g_{jk}a^jb^k \end{aligned} \quad (7.3)$$

(в последнем выражении, согласно правилу суммирования Эйнштейна, подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу j в пределах от 1 до 3 и по повторяющемуся индексу k в

тех же пределах). Полученное выражение представляет собой однородный многочлен второй степени¹ от переменных a^1, a^2, a^3 и b^1, b^2, b^3 с коэффициентами g_{jk} .

7.14. Введя столбцы координат $A = (a^1, a^2, a^3)^T$, $B = (b^1, b^2, b^3)^T$ векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, можем записать формулу (7.3) в матричном виде:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = A^T G B. \quad (7.4)$$

7.15. Два вектора называются *ортгогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, нулевой вектор ортогонален любому другому, а ненулевые векторы ортогональны тогда и только тогда, когда они перпендикулярны. Базис в пространстве называется *ортгогональным*, если его векторы попарно ортогональны. Ортогональный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называется *ортонормированным*, если входящие в его состав векторы имеют единичную длину.

7.16. Метрические коэффициенты ортонормированного базиса принято обозначать δ_{jk} ; они равны

$$\delta_{jk} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Набор чисел δ_{jk} называется *символом Кронекера*. Часто рассматривают также символы Кронекера с иным расположением индексов:

$$\delta^{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases} \quad \delta_j^k = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Кроме того, не обязательно ограничиваться диапазоном изменения индекса суммирования от 1 до 3.

7.17. Сумма (свёртка), каждое слагаемое которой содержит символ Кронекера в качестве множителя, превращается в единственное слагаемое:

$$a_j \delta_k^j = a_1 \underbrace{\delta_{1k}^1}_{=0} + \cdots + a_k \underbrace{\delta_{kk}^k}_{=1} + \cdots + a_n \underbrace{\delta_{nk}^n}_{=0} = a_k, \quad (7.5)$$

$$b^j \delta_{jk} = b^1 \underbrace{\delta_{1k}}_{=0} + \cdots + b^k \underbrace{\delta_{kk}}_{=1} + \cdots + b^n \underbrace{\delta_{nk}}_{=0} = b^k. \quad (7.6)$$

¹Многочлен называется однородным, если все одночлены, входящие в его состав, имеют одну и ту же степень.

7.18. Формулы, содержащие суммы типа свёртки, встречаются в различных разделах математики весьма часто. Одним из формальных признаков корректности таких формул является «правильное» расположение индексов в правой и левой частях равенства: если какой-либо свободный индекс (т.е. не индекс суммирования) является верхним индексом в левой части равенства, то он должен быть верхним и в правой части. Нарушение этого правила может свидетельствовать (хотя и не всегда!) об ошибке в выкладках. Так, в формуле (7.6), записанной без промежуточных выкладок: $b^j \delta_{jk} = b^k$, — свободный индекс k является нижним в левой части равенства и верхним в правой части. Для выяснения причины указанного явления придётся довольно глубоко разработать теорию.

7.19. Условимся также о следующих обозначениях (ср. п. 4.38). Векторы *произвольного* базиса будем в дальнейшем обозначать $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, координаты вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе — a^1, a^2, a^3). Векторы *ортонормированного* базиса будем обозначать $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, координаты вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе — a_x, a_y, a_z . Напомним, что координаты векторов принято записывать в виде столбцов из чисел (см. п. 4.36).

7.20. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается через их координаты (a_x, a_y, a_z) и (b_x, b_y, b_z) относительно произвольного ортонормированного базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ формулой

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

7.21. *Скалярный квадрат вектора* — это скалярное произведение вектора на себя:

$$\mathbf{a}^2 \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2.$$

Длину вектора можно выразить через его скалярный квадрат:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})};$$

в ортонормированном базисе

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Угол между векторами можно найти по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|};$$

в ортонормированном базисе

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

7.22. Теорема. Координаты (a^1, a^2, a^3) произвольного вектора $\mathbf{a}$ относительно ортогонального базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ вычисляются по формулам

$$a^1 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}, \quad a^2 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}, \quad a^3 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)}. \quad (7.7)$$

В частности, координаты (a_x, a_y, a_z) вектора $\mathbf{a}$ относительно ортонормированного базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ вычисляются по формулам

$$a_x = (\mathbf{a}, \mathbf{i}), \quad a_y = (\mathbf{a}, \mathbf{j}), \quad a_z = (\mathbf{a}, \mathbf{k}). \quad (7.8)$$

Формулы (7.7) и (7.8) называются формулами Гиббса¹.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая скалярно обе части разложения

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$$

на вектор $\mathbf{e}_1$, получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) = (a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = a^1 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a^2 \underbrace{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}_{=0} + a^3 \underbrace{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)}_{=0},$$

откуда получается первая из формул (7.7); остальные формулы выводятся аналогично. Та же выкладка записывается короче при помощи соглашения о суммировании (см. п. 4.46): если $\mathbf{a} = a^j \mathbf{e}_j$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_k) = (a^j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = a^j \underbrace{(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)}_{=\delta_{jk}} = \delta_{jk} a^j = a^k.$$

□

Б. Ориентация плоскости и пространства. Подобно понятию ориентации прямой — выбора одного из двух возможных *направлений* на прямой, — можно ввести понятия *ориентации* плоскости и пространства.

7.23. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ — два базиса на плоскости. Разложим векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ второго базиса по первому базису:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = c_1^1 \mathbf{e}_1 + c_1^2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_2 = c_2^1 \mathbf{e}_1 + c_2^2 \mathbf{e}_2; \end{cases} \quad (7.9)$$

коэффициенты запишем в виде матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix},$$

¹Джозайя Уиллард Гиббс (Josiah Willard Gibbs, 1839–1903) — американский физик и математик, один из создателей векторного исчисления.

располагая координаты вектора $\mathbf{f}_1$ в первом столбце, а координаты вектора $\mathbf{f}_2$ во втором (как и принято для координат: см. п. 4.36); при этом образуется «правильная» нумерация строк и столбцов: строк — верхними индексами, столбцов — нижними. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Поскольку векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ линейно независимы, то линейно независимыми являются и столбцы матрицы C ; в силу теоремы 6.13 её определитель отличен от нуля и, следовательно, существует обратная матрица C^{-1} .

7.24. Введём удобные для дальнейшего матричные обозначения: из каждой пары векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ и образуем матрицы-строки

$$\mathbf{E} = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\|, \quad \mathbf{F} = \|\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\|$$

(ограничители вида $\|\cdot\|$ напоминают, что элементами матриц $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ являются не числа, а векторы), после чего формулы (7.9) перепишем в матричном виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}C.$$

Умножив обе части последнего равенства справа на обратную матрицу C^{-1} , получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}C^{-1}.$$

7.25. Обозначения, введённые в п. 7.24, можно использовать следующим образом. Если $\mathbf{A} = \|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\|$ — упорядоченная пара векторов, то

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} \cdot \|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\| = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

— её матрица Грама (точка « $\cdot$ » означает скалярное произведение; см. п. 7.7). Ясно, что свойства операций над такими «векторными матрицами» аналогичны свойствам операций над обычными (числовыми) матрицами.

7.26. Два базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ на плоскости назовём *одноимёнными*, если определитель матрицы перехода положителен, и *разноимёнными* в противном случае. Легко проверить, что отношение одноимённости на множестве всех базисов на плоскости является отношением эквивалентности (в общеалгебраическом смысле: см. [?], (??)). Следовательно, множество всех базисов распадается на два непересекающихся класса: любые два базиса, принадлежащие одному классу, являются одноимёнными, а любые два базиса, принадлежащие разным классам — разноимёнными. Каждый из этих двух классов называется *ориентацией* плоскости. Итак,

на плоскости существует ровно две ориентации, которые условно именуются положительной и отрицательной (или правой и левой).

Для связи абстрактного понятия ориентации с наглядными представлениями принято считать базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ правым, если кратчайший поворот, переводящий вектор $\mathbf{e}_1$ в вектор $\mathbf{e}_2$, осуществляется против часовой стрелки, и левым в противном случае (см. рис. 7.2(а)).

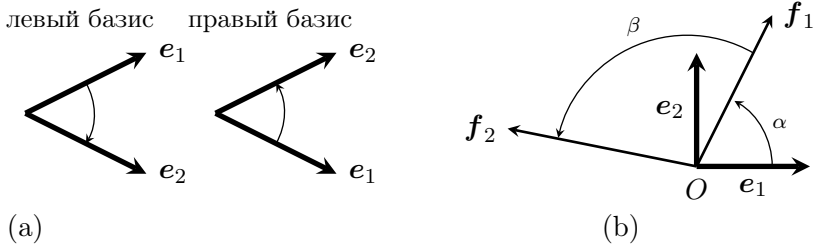


Рис. 7.2. Ориентация плоскости: (а) левый и правый базисы; (б) преобразование одного базиса в другой

7.27. При выяснении вопроса об одноимённости или разноимённости двух различных базисов удобнее сравнивать их не между собой, а с некоторым заранее выбранным ортонормированным базисом.

Пусть $\mathbf{E} = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\|$ и $\mathbf{F} = \|\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\|$ — два базиса, первый из которых является ортонормированным, причём направление поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ будем считать положительным направлением отсчёта углов; $\mathbf{C}$ — матрица перехода от первого из них ко второму: $\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{C}$. Будем считать, что все четыре вектора отложены от общего начала O (см. рис. 7.2(б)). Матрица перехода имеет в таком случае вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} |\mathbf{f}_1| \cos \alpha & |\mathbf{f}_2| \cos(\alpha + \beta) \\ |\mathbf{f}_1| \sin \alpha & |\mathbf{f}_2| \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix},$$

где $|\mathbf{f}_1|$ и $|\mathbf{f}_2|$ — модули векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, α — угол между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{f}_1$, β — угол между векторами $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ (все углы считаем ориентированными, а). Естественно считать, что $0 \leq \alpha < 2\pi$, $-\pi < \beta < \pi$, $\beta \neq 0$ (в противном случае векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ коллинеарны). Определитель матрицы $\mathbf{C}$ равен

$$\det \mathbf{C} = |\mathbf{f}_1| \cdot |\mathbf{f}_2| \cdot \sin \beta;$$

он положителен, если $0 < \beta < \pi$ (т.е. поворот от $\mathbf{f}_1$ к $\mathbf{f}_2$ осуществляется в положительном направлении), и отрицателен, если $-\pi < \beta < 0$ (указанный поворот осуществляется в отрицательном

направлении). Таким образом, можно считать, что один из двух одноимённых базисов ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$) получается из другого ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) непрерывной деформацией, состоящей в повороте вектора $\mathbf{e}_1$ вокруг его начала O на угол α и одновременного растяжения в $|\mathbf{f}_1|$ раз, что приводит к вектору $\mathbf{f}_1$, и последующего построения вектора $\mathbf{f}_2$ из вектора $\mathbf{f}_1$ поворотом на угол β в том же направлении, что и поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, и надлежащего растяжения (в $|\mathbf{f}_2|/|\mathbf{f}_1|$ раз).

7.28. Термин «правая пара векторов» (и аналогичный термин «правая тройка векторов» для трёхмерного случая; см. ниже) может использоваться в отношении любой упорядоченной пары неколлинеарных (тройки некомпланарных) векторов на плоскости (в пространстве) безотносительно к тому, рассматриваются ли эти векторы как базис (т.е. используются ли для разложения других векторов).

7.29. Рассмотрим на ориентированной плоскости параллелограмм, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. *Ориентированной площадью* $S_{\text{ор}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ этого параллелограмма называется произведение его площади на ± 1 , где выбирается знак «+», если ориентация упорядоченной пары $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ совпадает с ориентацией плоскости, и знак «−» в противном случае. Таким образом, абсолютная величина (модуль) ориентированной площади параллелограмма совпадает с обычной площадью, а знак указывает на ориентацию.

7.30. Теорема. Пусть $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ — правый ортонормированный базис на плоскости. Ориентированная площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$, равна

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обычная (не ориентированная) площадь параллелограмма с точностью до знака равна (см. рис. 7.3)

$$\begin{aligned} S &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\beta - \alpha) = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) = \\ &= \underbrace{|\mathbf{a}| \cos \alpha}_{=a_x} \cdot \underbrace{|\mathbf{b}| \sin \beta}_{b_y} - \underbrace{|\mathbf{a}| \sin \alpha}_{a_y} \cdot \underbrace{|\mathbf{b}| \cos \beta}_{b_x} = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

знак определителя отвечает за согласованность ориентаций базисов $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. □

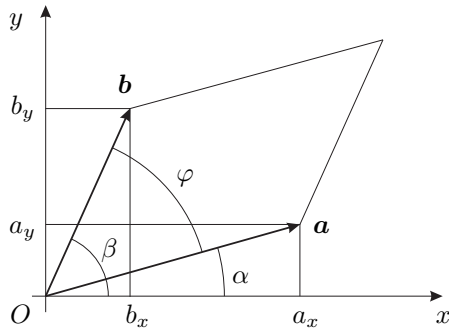


Рис. 7.3. К доказательству теоремы 7.30

7.31. Аналогичные понятия и конструкции можно ввести и в пространственном случае. Два базиса $\mathbf{E} = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\|$ и $\mathbf{F} = \|\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\|$ в пространстве, связанные матрицей перехода C , т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{E}C$, называются *одноимёнными*, если определитель $\det C$ матрицы перехода положителен, и *разноимёнными* в противном случае. Базис в пространстве называется *правым*, если выполнено одно из следующих (равносильных) условий (см. рис. 7.4):

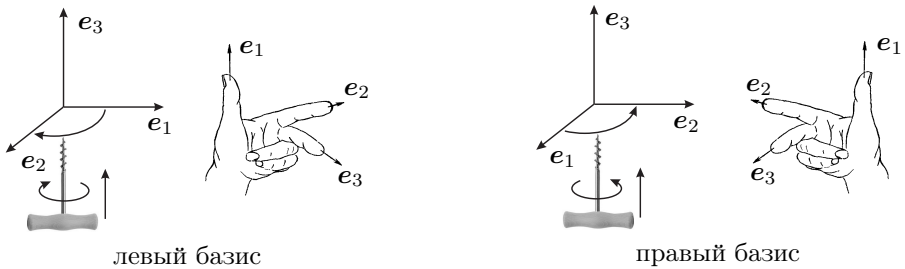


Рис. 7.4. Ориентация базиса в пространстве

- (1) если смотреть из конца вектора $\mathbf{e}_3$, то кратчайший поворот, переводящий вектор $\mathbf{e}_1$ в вектор $\mathbf{e}_2$, осуществляется против часовой стрелки;
- (2) векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ удовлетворяют *правилу буравчика*: если вращать буравчик в направлении поворота, переводящего (кратчайшим образом) вектор $\mathbf{e}_1$ в вектор $\mathbf{e}_2$, то поступательное движение буравчика происходит в направлении вектора $\mathbf{e}_3$;
- (3) векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ удовлетворяют *правилу правой руки*: их расположение совпадает с естественным положением большого, указательного и среднего пальцев правой руки.

В противном случае базис в пространстве называется *левым*.

В. Векторное произведение векторов.

7.32. Определение. Векторным произведением упорядоченной пары векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, удовлетворяющий следующим требованиям:

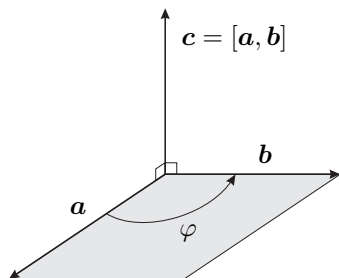


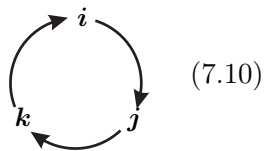
Рис. 7.5.

- (i) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ — (неориентированный) угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- (ii) вектор $\mathbf{c}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- (iii) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (в указанном порядке) образуют правую тройку (см. рис. 7.5).

Векторное произведение векторов часто также обозначают, особенно в физической литературе, символом $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (в англоязычной литературе используется термин «cross-product» — умножение «крестом»).

7.33. Таблица векторного умножения для векторов *правого* ортонормированного базиса приведена ниже. Справа от таблицы изображена диаграмма, облегчающая запоминание: произведение любых двух векторов равно третьему вектору, взятому со знаком $+$, если движение по диаграмме от первого сомножителя ко второму происходит по стрелке, и со знаком $-$ в противном случае:

I множ. \ II множ.	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0



7.34. Для векторов *левого* ортонормированного базиса все знаки $+$ и $-$ должны быть изменены на противоположные. В дальнейшем будем пользоваться исключительно правыми базисами.

7.35. Векторное произведение двух векторов равно нулевому вектору, если один из сомножителей есть нулевой вектор либо если перемножаемые векторы коллинеарны. Для неколлинеарных векторов условие (i) означает, что длина вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ численно равна

площади $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$. Во многих пространственных задачах удобно в качестве ориентированной площади параллелограмма рассматривать именно вектор $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

7.36. Предложение (критерий коллинеарности двух векторов). *Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, либо $\sin \varphi = 0$. Это равносильно тому, что $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 0$, т.е. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$. $\square$

7.37. Предложение. *Операция векторного умножения антикоммутативна, т.е. для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{E}$ имеем*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно для коллинеарных векторов (в этом случае $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$). Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то длины (ненулевых) векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ равны, оба эти вектора перпендикулярны плоскости, содержащей векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поскольку тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ правая, то тройка $\mathbf{b}, \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ также правая, так что тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ — левая. $\square$

Г. Смешанное произведение векторов.

7.38. Определение. *Смешанным произведением $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\mathbf{a}$ на векторное произведение векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

7.39. Предложение (критерий компланарности трёх векторов). *Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Будем считать, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ неколлинеарны (поскольку в противном случае, очевидно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$). Тогда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ параллельны плоскости π , содержащей векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, причём вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ортогонален этой плоскости. Следовательно, $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = 0$.

Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Тогда либо $|\mathbf{a}| = 0$, либо $[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{0}$, либо $\cos \alpha = 0$, где α — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Это означает, что либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны, либо $\mathbf{a}$

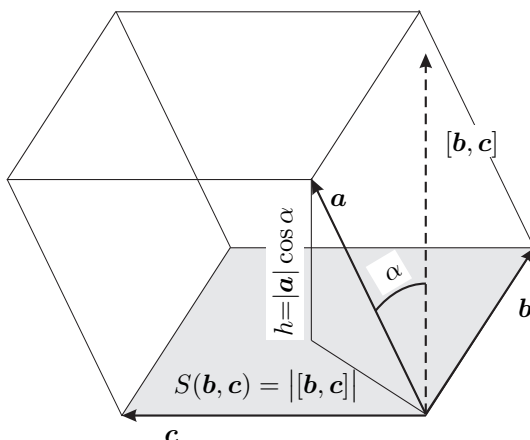


Рис. 7.6. Объём параллелепипеда

параллелен плоскости π , содержащей векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Во всех трёх случаях векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. $\square$

7.40. Предложение. Смешанное произведение некопланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно ориентированному объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ правая,} \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ левая,} \end{cases}$$

где символом $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначен объём параллелепипеда в смысле элементарной геометрии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отложив векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ от одной точки, получим параллелепипед, объём которого можно найти по формуле

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot h;$$

здесь $S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ — площадь основания, численно равная длине вектора $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, а h — высота параллелепипеда, равная $|\mathbf{a}| \cos \alpha$, где α — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Итак,

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = |(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Знак смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ определяется только знаком $\cos \alpha$, но $\cos \alpha > 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ направлены в одну сторону от плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, содержащей векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, т.е. тогда и только тогда, когда тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — правая. $\square$

7.41. Предложение. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}). \quad (7.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компланарных векторов утверждение очевидно. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ некопланарны, то тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ одинаково ориентированы. Для определённости будем считать, что обе тройки правые. Тогда

$$\begin{aligned} ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) &= (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = V_{cab} = \\ &= V_{abc} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]); \end{aligned}$$

здесь символом V_{abc} обозначен ориентированный объём параллелепипеда, построенного на упорядоченной тройке векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. $\square$

7.42. Следствие. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ &= -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Например, имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, -[\mathbf{c}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Можно рассуждать иначе: каждое из шести смешанных произведений совпадает (без учёта знака) с объёмом параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, знак же зависит от ориентации тройки, которая сохраняется при циклической перестановке векторов и меняется на противоположный при транспозиции. $\square$

7.43. Следствие. Смешанное произведение линейно по каждому из трёх сомножителей, например,

$$(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность по первому аргументу является следствием линейности скалярного произведения; линейность по остальным сомножителям вытекает из формул (7.12). $\square$

7.44. Предложение. Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей, например,

$$[\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] = \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] + \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем линейность по первому сомножителю. Введём обозначение

$$\mathbf{d} = [\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}].$$

Имеем

$$(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = \left([\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}], \mathbf{d} \right) =$$

(используем линейность скалярного произведения)

$$= (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) =$$

(используем линейность смешанного произведения)

$$= \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = 0,$$

откуда в силу положительной определённости скалярного произведения следует $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, что и требовалось. $\square$

Д. Вычисление векторного и смешанного произведений в ортонормированном базисе.

7.45. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы координатами относительно *правого* ортонормированного базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

Пользуясь линейностью векторного произведения (предложение 7.44) и таблицей (7.10) векторного умножения для векторов ортонормированного базиса, для векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ получаем:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= [a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}] = \\ &= a_x b_x \underbrace{[\mathbf{i}, \mathbf{i}]}_{=0} + a_x b_y \underbrace{[\mathbf{i}, \mathbf{j}]}_{=\mathbf{k}} + a_x b_z \underbrace{[\mathbf{i}, \mathbf{k}]}_{=-\mathbf{j}} + \\ &+ a_y b_x \underbrace{[\mathbf{j}, \mathbf{i}]}_{=-\mathbf{k}} + a_y b_y \underbrace{[\mathbf{j}, \mathbf{j}]}_{=0} + a_y b_z \underbrace{[\mathbf{j}, \mathbf{k}]}_{=\mathbf{i}} + \\ &+ a_z b_x \underbrace{[\mathbf{k}, \mathbf{i}]}_{=\mathbf{j}} + a_z b_y \underbrace{[\mathbf{k}, \mathbf{j}]}_{=-\mathbf{i}} + a_z b_z \underbrace{[\mathbf{k}, \mathbf{k}]}_{=0} \\ &= \mathbf{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k} (a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned}$$

7.46. Эту формулу удобно записать с помощью определителей:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \quad (7.13)$$

7.47. Запись можно ещё сократить, введя символический определитель третьего порядка:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}; \quad (7.14)$$

здесь предполагается, что определитель нужно разложить по первой строке.

7.48. В случае *левого* ортонормированного базиса все векторные произведения базисных векторов имеют противоположный знак, поэтому формула для векторного произведения имеет вид

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

7.49. Предложение. Смешанное произведение векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ выражается через их координаты относительно правого ортонормированного базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ формулой

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (7.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введём обозначение

$$\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z = \\ &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

7.50. В случае *левого* ортонормированного базиса в формуле (7.15) перед определителем нужно поставить знак «−».

Е. Двойное векторное произведение. Из трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ можно составить произведения $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ или $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$, называемые *двойными векторными произведениями*.

7.51. Теорема (формула Лагранжа¹). *Имеет место следующая формула:*

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (7.16)$$

КООРДИНАТНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим правый ортонормированный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, третий вектор $\mathbf{k}$ которого сонаправлен с вектором $\mathbf{c}$, а второй $\mathbf{j}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. В этом базисе векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имеют следующие разложения:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_z \mathbf{k}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & b_y & b_z \\ 0 & 0 & c_z \end{vmatrix} = b_y c_z \mathbf{i}, \\ [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_z b_y c_z \mathbf{j} - a_y b_y c_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Далее,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = a_z c_z, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_y b_y + a_z b_z,$$

так что

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = a_z c_z (b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}), \quad \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_y b_y + a_z b_z) c_z \mathbf{k}$$

и далее

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_z b_y c_z \mathbf{j} - a_y b_y c_z \mathbf{k}.$$

Сравнивая последнее выражение с (7.17), убеждаемся в справедливости (7.16). $\square$

БЕСКООРДИНАТНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ компланарны, поскольку по определению векторного произведения все они ортогональны вектору $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Поэтому вектор $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ можно разложить по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c},$$

где β и γ — подлежащие определению коэффициенты.

¹Ж. Л. Лагранж (J. L. Lagrange) — французский математик, астроном и механик (1736–1813).

Умножим обе части последнего равенства скалярно на $\mathbf{a}$. Так как $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] \perp \mathbf{a}$, скалярное произведение в левой части равенства будет равно нулю, и мы получим

$$0 = \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\beta}{(\mathbf{a}, \mathbf{c})} = -\frac{\gamma}{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \alpha,$$

так что

$$\beta = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad \gamma = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Таким образом, получаем

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \alpha(\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})). \quad (7.18)$$

Докажем теперь, что коэффициент α не зависит от вектора $\mathbf{a}$. Предположим обратное и запишем равенство (7.18) для произвольных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ и их суммы $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] &= \alpha(\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})), \\ [\mathbf{a}', [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] &= \alpha'(\mathbf{b}(\mathbf{a}', \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}', \mathbf{b})), \\ [\mathbf{a} + \mathbf{a}', [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] &= \alpha''(\mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b})). \end{aligned}$$

Сложим два первые равенства:

$$[\mathbf{a} + \mathbf{a}', [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}', \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}', \mathbf{b}),$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых векторах в двух последних равенствах, получим:

$$\begin{aligned} (\alpha''\mathbf{a} + \alpha''\mathbf{a}', \mathbf{c}) &= (\alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}', \mathbf{c}), \\ (\alpha''\mathbf{a} + \alpha''\mathbf{a}', \mathbf{b}) &= (\alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}', \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Учитывая произвольность вектора $\mathbf{a}'$, находим

$$\alpha''\mathbf{a} + \alpha''\mathbf{a}' = \alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}',$$

откуда $\alpha'' = \alpha' = \alpha$, что доказывает независимость α от первого сомножителя. Аналогично доказывается, что α не зависит также от $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Осталось убедиться в том, что $\alpha = 1$. Для нахождения α можно взять любые векторы, для которых произведения легко вычисляются, например, базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}$:

$$[\mathbf{i}, [\mathbf{k}, \mathbf{i}]] = \alpha \left[\underbrace{\mathbf{k}(\mathbf{i}, \mathbf{i})}_{=1} - \underbrace{\mathbf{i}(\mathbf{i}, \mathbf{k})}_{=0} \right] = \alpha \mathbf{k}.$$

С другой стороны, $[\mathbf{i}, [\mathbf{k}, \mathbf{i}]] = [\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$, так что $\alpha = 1$, и мы получаем требуемую формулу. $\square$

7.52. Предложение. *Справедливо следующее тождество, называемое тождеством Якоби¹:*

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Складывая разложение

$$[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$$

с аналогичными разложениями для $[b, [c, a]]$ и $[c, [a, b]]$, получаем требуемое тождество. $\square$

Ж. Полярные и аксиальные векторы.

7.53. Векторные произведения базисных векторов i , j и k различны для правого и левого базисов, например, $[i, j] = k$ для правого базиса и $[i, j] = -k$ для левого. Поскольку левый базис получается зеркальным отражением из правого, мы заключаем, что векторное произведение меняет направление при зеркальном отражении пространства. Векторы, обладающие этим свойством, называются *аксиальными* векторами, в отличие от обычных (*полярных*) векторов.

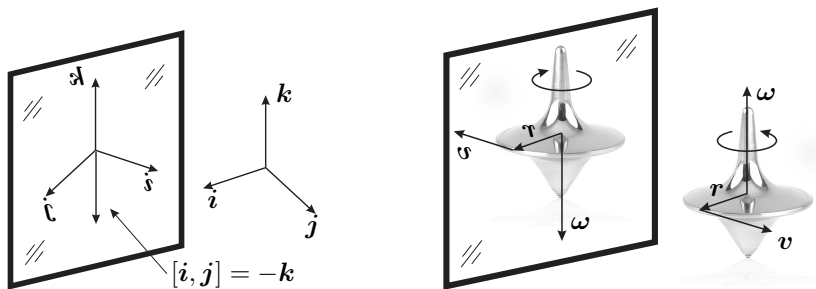


Рис. 7.7.

7.54. Простейшим примером аксиального вектора является вектор ω угловой скорости вращающегося тела, величина («длина») которого равна углу поворота тела вокруг оси вращения за единицу времени, а направление определяется правилом буравчика: если вектор угловой скорости ω отложен от центра вращения, то для наблюдателя, находящегося на конце вектора ω , вращение выглядит происходящим против часовой стрелки. При переходе от правого базиса к левому вектор угловой скорости меняет направление: векторы угловых скоростей вращающегося волчка и его зеркального изображения направлены противоположно. Линейная же

¹Карл Густав Якоб Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851) — немецкий математик и механик.

скорость точки волчка, которая связана с угловой скоростью формулой $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки относительно центра вращения, является обычным (полярным) вектором, т.е. отражается в зеркале обычным, «нормальным» образом.

2. Примеры решения задач

Пример 7.1. Докажите, что проекция вектора $\mathbf{a}$ на прямую, параллельную вектору $\mathbf{b}$, равна

$$\text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} \mathbf{b}. \quad (7.19)$$

Решение. Если $\mathbf{l}$ — единичный направляющий вектор (орт) прямой, т.е. $\mathbf{l} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$, то

$$\text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \text{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} \mathbf{b}.$$

Пример 7.2. Докажите, что определитель матрицы Грама любой упорядоченной пары или тройки векторов неотрицателен, причём обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы.

Решение. Пусть $\mathbf{E} = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\|$ — какой-либо ортонормированный базис в пространстве, $\mathbf{A} = \|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\|$ — произвольная упорядоченная тройка векторов. Разложив векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ по базису $\mathbf{E}$, $\mathbf{a}_j = a_j^k \mathbf{e}_k$ ($j, k = 1, 2, 3$), и составив из коэффициентов разложений (координат) матрицу $A = (a_j^k)$, можем записать $\mathbf{A} = \mathbf{E}A$. Используя обозначения пп. 7.24 и 7.25 и учитывая, что матрица Грама ортонормированного базиса $\mathbf{E}$ является единичной ($\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E} = \mathbf{1}$), найдём матрицу Грама семейства $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) &= \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{E}A)^T \cdot (\mathbf{E}A) = \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{E}^T) \cdot (\mathbf{E}A) = \mathbf{A}^T (\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E}) A = \mathbf{A}^T \mathbf{1} A = \mathbf{A}^T A. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\det G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{A}^T A) = \det \mathbf{A}^T \cdot \det A = (\det A)^2 \geq 0,$$

причём $\det G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det A = 0$, т.е. векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы.

Пример 7.3. Дан равносторонний треугольник ABC , длины сторон которого равны 1. Полагая $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, найдите значение выражения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$ с помощью свойств скалярного произведения.

Решение. Скалярно умножая равенство $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{O}$ поочерёдно на $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и складывая полученные соотношения, находим:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0,$$

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0,$$

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0,$$

$$3 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + 2(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0,$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = -\frac{3}{2}.$$

Пример 7.4. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB} = \lambda$ (см. пример 4.3, с. 64). Выразите длину отрезка CD через длины сторон треугольника и число λ .

Решение. Положим $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ (сделайте чертёж самостоятельно). Тогда $\overrightarrow{AD} = \alpha \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DB} = (1 - \alpha) \mathbf{c}$,

$$\lambda = \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad 1 - \alpha = \frac{1}{1 + \lambda}$$

(см. пример 4.3). Далее, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{b} + \alpha \mathbf{c}$ и

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD}) = (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{c}, \mathbf{b} + \alpha \mathbf{c}) = \mathbf{b}^2 + 2\alpha(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \alpha^2 \mathbf{c}^2.$$

Учитывая, что $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, а следовательно, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ и $2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2$, продолжим выкладку:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD}) &= \mathbf{b}^2 + \alpha(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2) + \alpha^2 \mathbf{c}^2 = \\ &= (1 - \alpha)\mathbf{b}^2 + \alpha\mathbf{a}^2 + \alpha(\alpha - 1)\mathbf{c}^2 = \\ &= \frac{1}{1 + \lambda}|\mathbf{CA}|^2 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}|\mathbf{CB}|^2 - \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2}|\mathbf{AB}|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } |CD| = \sqrt{\frac{1}{1 + \lambda}|\mathbf{CA}|^2 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}|\mathbf{CB}|^2 - \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2}|\mathbf{AB}|^2}.$$

Пример 7.5. Докажите тождество

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2.$$

Решение:

$$\begin{aligned} ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) &= ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [[\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]]) = \\ &= ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \underbrace{\mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{c})}_{=0}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2. \end{aligned}$$

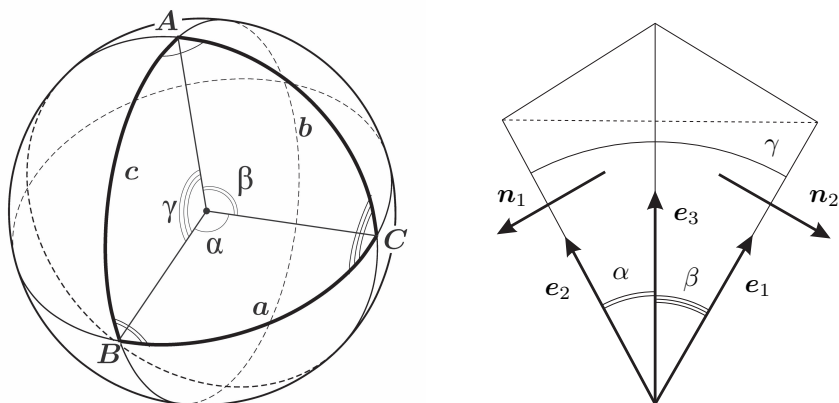


Рис. 7.8. К примеру 7.8

Пример 7.6. Докажите, что если векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ компланарны, то векторы a , b , c также компланарны.

Решение. Используя результат примера 7.5, заключаем, что если $([a, b], [b, c], [c, a]) = 0$, то $(a, b, c) = 0$, т.е. векторы a , b , c компланарны.

Пример 7.7. Докажите тождество

$$([a, b], [c, d]) = \begin{vmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{vmatrix}.$$

Решение/Доказательство:

$$\begin{aligned} ([a, b], \underbrace{[c, d]}_x) &= ([a, b], x) = (a, [b, x]) = (a, [b, [c, d]]) = \\ &= (a, c(b, d) - d(b, c)) = (b, d)(a, c) - (b, c)(a, d). \end{aligned}$$

Пример 7.8. Рассмотрим «треугольник», образованный дугами больших кругов на сфере единичного радиуса; длины его сторон a, b, c равны величинам центральных углов α, β, γ , а углы A, B, C — двугранным углам между полуплоскостями, осуществляющими сечения (см. рис. 7.8). Найдите соотношения между сторонами и углами сферического треугольника (или, иными словами, соотношения между плоскими углами и внутренними двугранными углами заданного трёхгранного угла).

Решение. Направим единичные векторы e_1, e_2, e_3 вдоль рёбер двугранного угла (см. рис. 7.8). Векторы n_1 и n_2 , перпендикулярные

граням, можно выразить формулами

$$\mathbf{n}_1 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{n}_2 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1].$$

Очевидно,

$$|\mathbf{n}_1| = \sin \alpha, \quad |\mathbf{n}_2| = \sin \beta.$$

Угол C между рассматриваемыми гранями равен дополнению угла между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ до развёрнутого угла. Используя тождество, доказанное в примере 7.7, находим

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) &= ([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \gamma \\ 1 & \cos \beta \end{vmatrix} = \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma. \end{aligned}$$

Поэтому косинус искомого угла равен

$$\cos C = -\frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Аналогично выводится формула

$$\cos \gamma = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Пример 7.9. Докажите тождество

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{p}) & (\mathbf{b}, \mathbf{p}) & (\mathbf{c}, \mathbf{p}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{q}) & (\mathbf{b}, \mathbf{q}) & (\mathbf{c}, \mathbf{q}) \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим все векторы по некоторому ортонормированному базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (например, $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$), запишем смешанное и векторное произведения с помощью определителей и воспользуемся теоремой о произведении определителей (теорема 6.39, с. 106):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{p}, \mathbf{q}] &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & p_x & q_x \\ \mathbf{j} & p_y & q_y \\ \mathbf{k} & p_z & q_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} & a_x p_x + a_y p_y + a_z p_z & a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z \\ b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} & b_x p_x + b_y p_y + b_z p_z & b_x q_x + b_y q_y + b_z q_z \\ c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k} & c_x p_x + c_y p_y + c_z p_z & c_x q_x + c_y q_y + c_z q_z \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a} & (\mathbf{a}, \mathbf{p}) & (\mathbf{a}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{b} & (\mathbf{b}, \mathbf{p}) & (\mathbf{b}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{c} & (\mathbf{c}, \mathbf{p}) & (\mathbf{c}, \mathbf{q}) \end{vmatrix}.$$

Пример 7.10. Стороны BC , CA и AB треугольника ABC разделены точками A_1 , B_1 , C_1 в отношениях

$$\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = \lambda, \quad \overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A} = \mu, \quad \overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = \nu. \quad (7.20)$$

Найдите отношение площади ориентированного треугольника ABC к площади ориентированного треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Введём обозначения $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$; очевидно, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{O}$. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCD$ при любом выборе четвёртой вершины D ; будем вычислять соответствующие ориентированные площади как векторные произведения

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}] = \frac{1}{2} [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} [\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{C_1A_1}].$$

Из условий (7.20) находим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA_1} &= \frac{\lambda}{\lambda+1} \mathbf{a}, & \overrightarrow{A_1C} &= \frac{1}{\lambda+1} \mathbf{a}, \\ \overrightarrow{CB_1} &= \frac{\mu}{\mu+1} \mathbf{b}, & \overrightarrow{B_1A} &= \frac{1}{\mu+1} \mathbf{b}, \\ \overrightarrow{AC_1} &= \frac{\nu}{\nu+1} \mathbf{c}, & \overrightarrow{C_1B} &= \frac{1}{\nu+1} \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_1C_1} &= \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{\mu+1} \mathbf{b} + \frac{\nu}{\nu+1} (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \\ &= \underbrace{-\frac{\nu}{\nu+1} \mathbf{a}}_{=:\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{\mu+1} - \frac{\nu}{\nu+1} \right) \mathbf{b}}_{=:\beta} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \\ \overrightarrow{C_1A_1} &= \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{\nu+1} (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{\lambda}{\lambda+1} \mathbf{a} = \\ &= \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda+1} - \frac{1}{\nu+1} \right) \mathbf{a}}_{=:\gamma} - \underbrace{\frac{1}{\nu+1} \mathbf{b}}_{=:\delta} = \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Найдём (удвоенную) ориентированную площадь треугольника $A_1B_1C_1$:

$$\begin{aligned}
 2S_2 &= [\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{C_1A_1}] = [\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}] = \\
 &= (\alpha\delta - \beta\gamma)[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot 2S_1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, отношение ориентированных площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равно

$$\begin{aligned}
 S_1 : S_2 &= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\nu}{\nu+1} & \frac{1}{\mu+1} - \frac{\nu}{\nu+1} \\ \frac{\lambda}{\lambda+1} - \frac{1}{\nu+1} & -\frac{1}{\nu+1} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\nu+1)(\mu+1)(\lambda+1)}.
 \end{aligned}$$

3. Задачи для самостоятельного решения

7.1. Докажите, что векторы $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ и $\mathbf{c}$ перпендикулярны.

7.2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AA_1}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BB_1}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC_1}) = 0$.

7.3. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB . Разложите вектор $\overrightarrow{CH}$ по ортогональному базису $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$.

7.4. Докажите, что при любом расположении точек A , B , C и D на плоскости или в пространстве имеет место равенство $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$

7.5. Найдите длину диагонали OD параллелепипеда, зная длины $a = |OA|$, $b = |OB|$, $c = |OC|$ трёх рёбер, выходящих из вершины O , и плоские углы $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle AOC$ и $\gamma = \angle AOB$ между ними.

7.6. Найдите объём параллелепипеда, зная длины a, b, c трёх его рёбер, выходящих из одной вершины, и углы α, β, γ между ними.

7.7. Найдите объём треугольной пирамиды с боковыми рёбрами a, b, c и двугранными углами α, β, γ при этих рёбрах.

7.8. Докажите теорему синусов для сферического треугольника (см. пример 7.8):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} \frac{\sin \beta}{\sin B} \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

7.9. Докажите следующие тождества:

$$(a) \quad |[a, b]|^2 + (a, b)^2 = |a|^2 |b|^2;$$

$$(б) \quad [[a, b], [c, d]] = c(a, b, d) - d(a, b, c);$$

$$(в) \quad [[a, b], [c, d]] = b(a, c, d) - a(b, c, d);$$

$$(г) \quad ([a, b], [c, d]) + ([a, c], [d, b]) + ([a, d], [b, c]) = 0;$$

$$(д) \quad (a, b, c)^2 + |[a, b, c]|^2 = |[a, b]|^2 \cdot |c|^2;$$

$$(е) \quad (x, y, z)(a, b, c) = \begin{vmatrix} (x, a) & (x, b) & (x, c) \\ (y, a) & (y, b) & (y, c) \\ (z, a) & (z, b) & (z, c) \end{vmatrix};$$

$$(ж) \quad [a, [b, [c, d]]] = [a, c](b, d) - [a, d](b, c);$$

$$(з) \quad [a, [b, [c, d]]] = (a, c, d)b - (a, b)[c, d];$$

$$(и) \quad ([a, b], [c, d], [e, f]) = (a, b, d)(c, e, f) - (a, b, c)(d, e, f).$$

7.10. Исходя из тождеств (б) и (в) задачи 7.9 получите следующую формулу для разложения произвольного вектора x по некоторому базису a, b, c :

$$x = \frac{(x, b, c)a + (a, x, c)b + (a, b, x)c}{(a, b, c)}.$$

Сравните полученное разложение с формулами Крамера.

7.11. Пользуясь тождеством (е) задачи 7.9 докажите формулу

$$\det G(a, b, c) = (a, b, c)^2,$$

где $G(a, b, c)$ — матрица Грама данной тройки векторов, и сравните результат с примером 7.2.

7.12 (см. пример 7.6). Докажите, что если векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ компланарны, то они коллинеарны.

7.13. Докажите, что если $[a, b] + [b, c] + [c, a] = O$, то векторы a, b, c компланарны.

7.14. Стороны BC , CA и AB треугольника ABC разделены точками A_1 , B_1 , C_1 в отношениях

$$\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = \lambda, \quad \overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A} = \mu, \quad \overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = \nu.$$

Пусть A' , B' , C' — точки пересечения пар прямых BB_1 и CC_1 , CC_1 и AA_1 , AA_1 и BB_1 . Найдите отношение площади ориентированного

треугольника $A'B'C'$ к площади ориентированного треугольника $A_1B_1C_1$.

7.15. Даны радиус-векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_3$ точек A, B, C . Известно, что векторы $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ неколлинеарны. Из точки A опущен перпендикуляр AM на плоскость OBC . Найдите радиус-вектор точки M .

ГЛАВА 8

Системы линейных уравнений

1. Основные понятия и факты

А. Арифметическое пространство $\mathbb{K}^n$.

8.1. Напомним (см. п. 5.4, с. 5.4), что *арифметическим пространством* $\mathbb{K}^n$ называется множество всех вектор-столбцов высоты n , элементами которых являются числа из поля $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{K} \right\}.$$

На пространстве $\mathbb{K}^n$ можно ввести линейные операции: сложение столбцов и умножение столбца на число из поля $\mathbb{K}$ (см. п. Б, с. 71). Указанные операции обладают свойствами, перечисленными в теореме 5.8 (см. с. 71). Далее вводятся понятия линейной комбинации и линейной оболочки заданного семейства столбцов, а также линейно зависимых и линейно независимых семейств столбцов (см. п. В). В дальнейшем элементы арифметического пространства будем часто называть векторами.

8.2. Линейно независимые векторы

$$\mathbf{1}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

обладают тем свойством, что любой другой вектор можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Семейство этих векторов называется *стандартным базисом* пространства $\mathbb{K}^n$.

8.3. Определение. Подмножество $\mathcal{P}$ арифметического пространства $\mathbb{K}^n$ называется *подпространством*, если для любых элементов $X, Y \in \mathcal{P}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ выполняется соотношение

$$\alpha X + \beta Y \in \mathbb{K}^n.$$

Тот факт, что $\mathcal{P}$ является подпространством в $\mathbb{K}^n$, будем обозначать символом $\subseteq$, т.е. $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$, оставляя символ $\subset$ для обозначения произвольных подмножеств (которые могут являться подпространствами или нет).

8.4. Например, подпространствами в $\mathbb{K}^n$ являются следующие множества:

- (а) само пространство $\mathbb{K}^n$ и множество, состоящее из одного нулевого столбца (нулевое подпространство); эти подпространства называются *тривиальными*;
- (б) множество $\mathcal{P}$ всех столбцов $(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n)^T$, у которых $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$; очевидно, подпространство $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$ можно отождествить с пространством $\mathbb{K}^k$;
- (в) множество $\mathcal{Q}$ всех столбцов $(x^1, \dots, x^n)^T$, удовлетворяющих условию $x^1 + x^2 + \dots + x^n = 0$;
- (г) линейная оболочка любого семейства столбцов (см. пример 8.1).

Множество всех столбцов, у которых $x^1 = 1$, не является подпространством.

8.5. Определение. *Базисом* подпространства $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$ называется семейство векторов $X_1, \dots, X_s$, лежащих в $\mathcal{P}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) векторы $X_1, \dots, X_s$ линейно независимы;
- (ii) для любого вектора $X \in \mathcal{P}$ существует такой набор чисел $x^1, \dots, x^s$ из числового поля $\mathbb{K}$, что

$$X = x^1 X_1 + \dots + x^s X_s. \quad (8.1)$$

Соотношение (8.1) называется *разложением вектора X по базису $X_1, \dots, X_s$* , а числа $x^1, \dots, x^s$ — *координатами* вектора X в базисе $X_1, \dots, X_s$.

8.6. Теорема. В любом подпространстве $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$, отличном от нулевого подпространства, существует базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в $\mathcal{P}$ произвольный вектор $X_1 \neq 0$; если линейная оболочка $L(X_1)$ совпадает с подпространством $\mathcal{P}$,

доказательство завершено. В противном случае найдётся ненулевой вектор $X_2 \notin L(X_1)$; рассмотрим линейную оболочку $L(X_1, X_2)$ и т. д. $\square$

8.7. Единственность разложения произвольного вектора по произвольному базису доказывается точно так же, как теорема 4.39 (см. с. 57).

8.8. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ — заданная матрица. Рассмотрим отображение A пространства $\mathbb{K}^n$ в пространство $\mathbb{K}^m$, заданное формулой

$$A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto Y = AX.$$

Это отображение обладает свойством линейности:

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) &= A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \\ &= \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 = \alpha_1 A(X_1) + \alpha_2 A(X_2) \end{aligned}$$

и называется *матричным линейным оператором*, порождённым матрицей A .

8.9. Определение. Ядром $\ker A$ матричного линейного оператора $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ называется множество всех векторов пространства $\mathbb{K}^n$, которые при действии оператора превращаются в нулевой вектор пространства $\mathbb{K}^m$:

$$\ker A = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = O \in \mathbb{K}^m \right\}.$$

8.10. Определение. Образом $\operatorname{im} A$ матричного линейного оператора $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ называется множество всех векторов пространства $\mathbb{K}^m$, которые могут быть получены из векторов пространства $\mathbb{K}^n$ при действии оператора:

$$\operatorname{im} A = \left\{ Y \in \mathbb{K}^m \mid Y = AX, X \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Иными словами, образ оператора — это его множество значений.

8.11. Теорема. Ядро и образ матричного линейного оператора $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ являются подпространствами в $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$ соответственно:

$$\ker A \in \mathbb{K}^n, \quad \operatorname{im} A \in \mathbb{K}^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_1, X_2 \in \ker A$, т.е. выполняются соотношения $AX_1 = O$ и $AX_2 = O$. Тогда для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ имеем

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) &= A \cdot (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \\ &= \alpha_1 \cdot AX_1 + \alpha_2 \cdot AX_2 = O, \end{aligned}$$

т.е. $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in \ker A$.

$$AX = B, \quad A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n = B.$$

8.15. Упорядоченный набор чисел $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ (или, в матричной записи, столбец $X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^T$) называется *решением* системы, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получается верное числовое равенство (при подстановке столбца в матричное уравнение получается верное матричное равенство).

Две совместные системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Ясно, что эквивалентные системы содержат одинаковое число неизвестных; число же уравнений в них может быть различным.

8.17. Система линейных уравнений называется *однородной*, если правые части всех уравнений равны нулю:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = 0, \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = 0; \end{cases}$$

$$AX = O \quad \text{или} \quad A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = O.$$

8.18. Однородная система всегда совместна: набор чисел $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $\dots$, $x^n = 0$ (или, что то же, нулевой столбец) образует её решение, называемое *тривиальным*. Однако однородная система может иметь и нетривиальные (т.е. ненулевые) решения. Например, одним из решений однородной системы $x^1 + x^2 = 0$ с двумя неизвестными, состоящей из одного уравнения, является пара чисел $x^1 = c$, $x^2 = -c$, где c — произвольное число.

8.19. Теорема (принцип линейной суперпозиции для однородных систем). *Если X_1, X_2 — два решения однородной системы $AX = O$, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть столбцы X_1, X_2 являются решениями системы, т.е.

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O,$$

и пусть c^1, c^2 — произвольные числа. Для линейной комбинации $c^1 X_1 + c^2 X_2$ имеем

$$A(c^1 X_1 + c^2 X_2) = c^1 AX_1 + c^2 AX_2 = O,$$

т.е. линейная комбинация $c^1 X_1 + c^2 X_2$ также является решением данной системы. $\square$

8.20. Теорема 8.19 означает, что множество всех решений однородной системы является подпространством в пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$ (см. определение 8.3).

8.21. Нетривиальная совместность однородной системы означает существование такого набора чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$, среди которых имеется хотя бы одно ненулевое, что выполняется соотношение

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = O,$$

т.е. факт линейной зависимости столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$ основной матрицы. Таким образом, решение однородной системы эквивалентно исследованию линейной зависимости (независимости) заданных столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$.

8.22. Вектор $X \in \mathbb{K}^n$, для которого $AX = O$, принадлежит ядру линейного оператора $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, заданного формулой $A(X) = AX$ (см. п. 8.9. Таким образом, процесс решения однородной системы эквивалентен нахождению ядра матричного линейного оператора. Поэтому теорема 8.19 вытекает из теоремы 8.11.

8.23. Определение. *Фундаментальное семейство решений* (сокращённо ФСР) однородной системы — это такое семейство линейно независимых решений $X_1, X_2, \dots, X_s$, что любое решение данной системы можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + \dots + c^s X_s, \quad (8.2)$$

где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — произвольные числа. Выражение (8.2), позволяющее с помощью надлежащего выбора чисел $c^1, c^2, \dots, c^s$ получить любое решение однородной системы, называется *общим решением* данной системы.

8.24. Согласно определению 8.5 фундаментальное семейство решений однородной системы линейных уравнений является *базисом* в подпространстве пространства $\mathbb{K}^n$, состоящем из всех решений этой системы.

8.25. Матрица Φ , столбцами которой являются столбцы ФСР, называется *фундаментальной матрицей* данной системы:

$$\Phi = \left\| X_1, X_2, \dots, X_s \right\|.$$

Общее решение системы выражается через фундаментальную матрицу по формуле

$$X = \Phi \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — произвольные постоянные. Формула (8.3) определяет отображение $\Phi : \mathbb{K}^s \rightarrow \mathbb{K}^n$, которое каждому вектору $C = (c^1, c^2, \dots, c^s)^T \in \mathbb{K}^s$ ставит в соответствие некоторое решение однородной системы $AX = O$:

$$\Phi : \mathbb{K}^s \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad C \mapsto X = \Phi C,$$

т.е. определяет *вложение* пространства $\mathbb{K}^s$ в пространство $\mathbb{K}^n$ — изоморфизм $\mathbb{K}^s \rightarrow \Phi(\mathbb{K}^s) \subseteq \mathbb{K}^n$, отображающий векторы стандартного базиса $e_1, \dots, e_s$ пространства $\mathbb{K}^s$ в векторы фундаментального семейства решений $X_1, \dots, X_s$ соответствующей системы. При этом числа $c^1, \dots, c^s$, фигурирующие в формуле (8.3), представляют собой координаты вектора X — решения однородной системы — в базисе $X_1, \dots, X_s$ пространства решений, состоящем из векторов ФСР.

Г. Неоднородные системы.

8.26. Система $AX = B$ называется *неоднородной*, если $B \neq O$. Часто неоднородную систему $AX = B$ рассматривают вместе с однородной системой $AX = O$, которую называют *сопутствующей*.

8.27. Теорема. Если X_1, X_2 — два решения неоднородной системы $AX = B$, то их разность $X_1 - X_2$ является решением сопутствующей однородной системы $AX = O$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $AX_1 = B, AX_2 = B$. Тогда

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O,$$

что и требовалось. □

8.28. Таким образом, любое решение неоднородной системы (т.е. выражение для общего решения, ОРНС) можно представить в виде суммы некоторого частного решения этой неоднородной системы (ЧРНС) и подходящего решения однородной системы (т.е. выражения для её общего решения, ОРОС):

$$\text{ОРНС} = \text{ЧРНС} + \text{ОРОС}.$$

Это утверждение называется *принципом линейной суперпозиции*.

8.29. Итак, общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X = X_0 + c^1 X_1 + \dots + c^s X_s, \quad (8.4)$$

где X_0 — какое-либо частное решение этой системы, а $X_1, \dots, X_s$ — ФСР сопутствующей однородной системы.

8.30. Записав неоднородную систему $AX = B$ в «полуматричной» форме

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = B,$$

видим, что решение существует тогда и только тогда, когда вектор B может быть линейно выражен через векторы $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е. $B \in \text{im } A$, где A — матричный линейный оператор, порождённый основной матрицей системы A . Таким образом, решение неоднородной системы линейных уравнений эквивалентно исследованию вопроса о том, лежит ли вектор B правой части системы в образе $\in A$ оператора A , т.е. в линейной оболочке столбцов основной матрицы A (см. п. 8.12).

Д. Системы упрощённого вида.

8.31. Незвестная x^k называется *базисной*, если она входит только в одно уравнение системы.

8.32. Система называется *системой упрощённого вида*, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная; в случае, если некоторое уравнение содержит более одной неизвестной, входящей только в это уравнение, в качестве базисной неизвестной выбирается одна (любая) из них¹. Итак, в системе упрощённого вида

¹Например, в системе

$$\begin{cases} x^1 + x^2 & + x^4 = 0 \\ & x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$$

неизвестные x^1 и x^2 входят только в первое уравнение, а x^3 — только во второе; в этом случае лишь одну из неизвестных x^1 или x^2 будем относить к числу базисных. Таким образом, в этой системе базисными неизвестными можно считать либо x^1 и x^3 , либо x^2 и x^3 .

8.35. Обозначив произвольные значения свободных неизвестных $x^{r+1}, \dots, x^n$ через $c^1, \dots, c^{n-r}$, представим общее решение системы в виде

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a_{r+1}^1 c^1 - \dots - a_n^1 c^{n-r} \\ -a_{r+1}^2 c^1 - \dots - a_n^2 c^{n-r} \\ \vdots \\ -a_{r+1}^r c^1 - \dots - a_n^r c^{n-r} \\ c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} = \\
 &= c^1 \begin{pmatrix} -a_{r+1}^1 \\ -a_{r+1}^2 \\ \vdots \\ -a_{r+1}^r \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -a_n^1 \\ -a_n^2 \\ \vdots \\ -a_n^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Столбцы, фигурирующие в последнем выражении, образуют фундаментальное семейство решений данной однородной системы, которое называется *нормальным ФСР (НФСР)*, соответствующим базисным неизвестным $x^1, \dots, x^r$ и свободным неизвестным $x^{r+1}, \dots, x^n$. Каждый столбец, входящий в НФСР, получается, если значение одной из свободных неизвестных взять равным 1, а остальные положить равными нулю (соответствующие элементы столбцов выделены). Линейная независимость этих столбцов очевидна.

Согласно принципу линейной суперпозиции для неоднородных систем (см. п. 8.28) общее решение можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{r+1}^1 \\ -a_{r+1}^2 \\ \vdots \\ -a_{r+1}^r \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}} + \dots + c^{n-r} \underbrace{\begin{pmatrix} -a_n^1 \\ -a_n^2 \\ \vdots \\ -a_n^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}}$$

(выделены свободные неизвестные).

Е. Элементарные преобразования системы уравнений.

8.38. Очевидно, следующие преобразования системы уравнений переводят её в эквивалентную систему:

- (i) перестановка двух уравнений местами;
- (ii) умножение любого уравнения системы на ненулевое число;
- (iii) прибавление к любому уравнению системы другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти преобразования систем линейных уравнений называются *элементарными преобразованиями*. Иногда к элементарным преобразованиям причисляют

- (4) удаление из системы уравнения вида

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = 0.$$

8.39. Вместо преобразований самой системы удобно выполнять преобразования расширенной матрицы этой системы; ясно, что при этом элементарным преобразованиям системы соответствуют следующие элементарные преобразования строк расширенной матрицы:

- (i) перестановка двух строк местами;
- (ii) умножение любой строки на ненулевое число;
- (iii) прибавление к любой строке другой строки, умноженной на произвольное число;
- (iv) [удаление из матрицы нулевых строк].

8.40. Будем называть *ведущим элементом строки* первый ненулевой элемент этой строки (при отсчёте слева направо).

8.41. Говорят, что матрица имеет *упрощённый вид*, если она является расширенной матрицей линейной системы упрощённого вида¹. Матрица упрощённого вида имеет следующую структуру:

- (1) все нулевые строки располагаются ниже всех ненулевых;
- (2) *ведущий элемент* каждой строки располагается строго правее ведущего элемента строки, лежащей выше;
- (3) ведущий элемент каждой ненулевой строки равен единице и является единственным ненулевым элементом в своём столбце; соответствующие строки и столбцы называются *базисными*.

Таким образом, матрица упрощённого вида выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

базисные столбцы и ведущие элементы выделены.

8.42. Очевидны следующие свойства матриц упрощённого вида:

- (1) некоторые столбцы матрицы являются последовательными столбцами единичной матрицы; эти столбцы, являющиеся не чем иным, как базисными столбцами, отвечают базисным неизвестным системы линейных уравнений;
- (2) любой столбец, не являющийся базисным, представляет собой линейную комбинацию *предшествующих* базисных столбцов.

¹В англоязычной литературе такой вид матрицы называется «reduced row echelon form». В отечественной литературе устоявшегося названия нет: используются термины «упрощённый вид», «ступенчатый вид», «приведённый ступенчатый вид по строкам» и т. п.

Ж. Алгоритм Гаусса—Жордана.

8.43. Алгоритм приведения произвольной матрицы к упрощённому виду при помощи элементарных преобразований строк называется *алгоритмом Гаусса*¹—*Жордана*². Он позволяет получить матрицу упрощённого вида из исходной матрицы, содержащей t строк, не более чем за t шагов; один шаг алгоритма описан ниже.

8.44. Шаг № k .

1. Среди строк матрицы с номерами $k, \dots, t$ выберем строку, ведущий элемент которой расположен *не правее* ведущих элементов остальных рассматриваемых строк. Выбранную строку назовём *ведущей строкой*; *ведущим столбцом* назовём столбец, в котором располагается ведущий элемент ведущей строки.
2. Разделим ведущую строку на её ведущий элемент; в полученной новой (k -й) ведущей строке ведущий элемент будет равен 1.
3. Переставим ведущую строку на k -е место.
4. Вычтем из каждой строки матрицы ведущую строку, умноженную на коэффициенты, подобранные таким образом, чтобы все элементы ведущего столбца (кроме самого ведущего элемента) обратились в нуль. После этого ведущий столбец будет представлять собой k -й столбец единичной матрицы.

Процесс завершается, когда каждая строка матрицы уже побывала в роли ведущей строки или когда ведущую строку выбрать невозможно.

Отметим следующее интересное свойство однородных систем.

8.45. Предложение (достаточное условие нетривиальной разрешимости однородной системы). *Если в однородной системе число неизвестных больше числа уравнений, то она имеет нетривиальное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После приведения системы к упрощённому виду в ней обязательно образуется хотя бы одна свободная неизвестная, так как количество *всех* неизвестных по условию больше количества уравнений, т.е. больше количества *базисных* неизвестных. Придав этой свободной неизвестной произвольное ненулевое значение, получим нетривиальное решение системы. $\square$

¹Карл Фридрих Гаусс (Carl Friedrich Gauß; 1777–1855) — великий немецкий математик, механик, физик, астроном, геодезист.

²Вильгельм Йордан (Wilhelm Jordan; 1842–1899) — немецкий геодезист. В русском языке распространена ошибочная транслитерация фамилии («Жордан»). М. Жордан (M. Jordan) — французский математик (1838–1922); к методу Гаусса—Жордана не имеет отношения.

3. «Правило прямоугольников».

8.46. В примере 8.4 (см. ниже с. 165) вычисления с дробями доставляли определённые неудобства, которых можно избежать, если применить следующую модификацию алгоритма¹, которая позволяет обратить в нуль все элементы ведущего столбца (кроме ведущего элемента). Разъясним эту модификацию на следующем примере. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Проведём один шаг алгоритма Гаусса—Жордана с ведущим элементом c ; задачей является обращение в нуль всех элементов ведущего столбца (разумеется, кроме ведущего элемента). Для уничтожения элемента r (при условии $r \neq 0$ — в противном случае соответствующая строка не требует обработки) выполним предварительно следующие вспомогательные элементарные преобразования:

- (а) первую строку матрицы умножим на ведущий элемент c ;
- (б) вторую (ведущую) строку умножим на r ;

в результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} cp & cq & \mathbf{cr} & cs \\ ra & rb & \mathbf{rc} & rd \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Вычитая теперь из первой строки вторую (ведущую) и после этого возвращая ведущей строке её первоначальный вид (т.е. деля её на r), получим

$$\begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ ra & rb & \mathbf{rc} & rd \\ x & y & z & u \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Аналогично уничтожаем элемент z (если $z \neq 0$), для чего сначала выполняем вспомогательные преобразования:

- (а) третью строку матрицы умножим на ведущий элемент c ;
- (б) вторую (ведущую) строку умножим на z ;

¹В англоязычной литературе она называется «fraction-free Gaussian elimination».

в результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} cp - ra & cq - rb & 0 & cs - rd \\ za & zb & \mathbf{zc} & zd \\ cx & cy & \mathbf{cz} & cu \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки вторую (ведущую) и после этого возвращая ведущей строке её первоначальный вид, получим

$$\begin{pmatrix} cp - ra & cq - rb & 0 & cs - rd \\ za & zb & \mathbf{zc} & zd \\ cx - za & cy - zb & 0 & cu - zd \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} cp - ra & cq - rb & 0 & cs - rd \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ cx - za & cy - zb & 0 & cu - zd \end{pmatrix}.$$

Цель достигнута: все элементы ведущего столбца, кроме ведущего элемента, равны нулю. Если все элементы исходной матрицы были целыми числами, то и в процессе вычислений нам не придётся работать с дробями.

8.47. Сформулируем теперь правило, по которому вычисляются элементы преобразованной матрицы:

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} cp - ra & cq - rb & 0 & cs - rd \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ cx - za & cy - zb & 0 & cu - zd \end{pmatrix}.$$

Например, элемент p превращается в элемент $cp - ra$; отметим участвующие в этом выражении элементы исходной матрицы:

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Выражение $cp - ra$ представляет собой разность произведения преобразуемого элемента p на ведущий элемент c , расположенных в противоположных углах воображаемого прямоугольника, и произведения пары элементов матрицы, r и a , расположенных в двух других противоположных углах того же прямоугольника. Для остальных элементов ситуация аналогична:

$$q \mapsto cq - rb : \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}, \quad s \mapsto cs - rd : \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix},$$

Полученное правило пересчёта элементов будем называть *правилом прямоугольников*; оно может быть сформулировано следующим образом:

- (а) в матрице выбирается ведущий элемент a_t^s ;
- (б) ведущая строка (строка A^s) переписывается без изменений;
- (в) все элементы ведущего столбца (столбца A_t), кроме ведущего элемента, заменяются нулями;
- (г) каждый элемент a_j^i матрицы, не принадлежащий ведущей строке или ведущему столбцу, заменяется на число $a_j^i a_t^s - a_t^i a_j^s$.

Схематическая иллюстрация:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & & \\ \cdots & a_j^i & \cdots & a_t^i & \cdots & & \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ \cdots & a_j^s & \cdots & a_t^s & \cdots & & \\ & \vdots & & \vdots & & & \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & & \\ \cdots & a_j^i a_t^s - a_t^i a_j^s & \cdots & 0 & \cdots & & \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ \cdots & a_j^s & \cdots & a_t^s & \cdots & & \\ & \vdots & & \vdots & & & \end{array} \right).$$

И. Алгоритм Гаусса.

8.48. Алгоритм Гаусса¹ отличается от алгоритма Гаусса—Жордана тем, что при выполнении элементарных преобразований на каждом шаге обращают в нуль не *все* элементы ведущего столбца (за исключением, разумеется, ведущего элемента), а только элементы, лежащие *ниже* ведущего элемента. В результате матрица приводится к так называемому *ступенчатому виду по строкам*²:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} * & * & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

¹Первое известное упоминание алгоритма Гаусса (см. ниже п. И) содержится в древнекитайском математическом трактате «Математика в девяти книгах», скомпилированном из трудов разных авторов X в. до н. э. — II в. до н. э. Алгоритм Гаусса—Жордана — модификация алгоритма Гаусса, предложенная В. Йорданом.

²В англоязычной литературе он называется «row echelon form».

Матрица ступенчатого вида имеет следующую структуру:

- (а) все нулевые строки располагаются ниже всех ненулевых;
- (б) ведущий элемент каждой строки располагается строго правее ведущего элемента строки, лежащей выше.

В отличие от определения матрицы упрощённого вида здесь отсутствует требование, чтобы ведущий элемент каждой ненулевой строки был равен единице и являлся единственным ненулевым элементом в своём столбце. Очевидно, объём вычислений при использовании алгоритма Гаусса несколько меньше, чем при использовании алгоритма Гаусса—Жордана, однако он не позволяет непосредственно выписывать решение системы линейных уравнений и указывать линейные зависимости между столбцами матрицы.

К. Восстановление однородной системы по заданному фундаментальному семейству решений.

8.49. Пусть имеется семейство линейно независимых столбцов $X_1, \dots, X_p \in \mathbb{K}^n$, $p < n$. Требуется составить однородную систему $AX = O$, для которой данный набор столбцов образует фундаментальное семейство решений. (Случай $p = n$ не представляет интереса, поскольку тогда столбцы $X_1, \dots, X_n$ образуют базис в $\mathbb{K}^n$, т.е. любой вектор пространства $\mathbb{K}^n$ удовлетворяет системе и, стало быть, система тривиальна: $A = O$.)

8.50. Число уравнений в искомой системе не может быть менее $n - p$. Действительно, число p столбцов, составляющих ФСР, равно числу *свободных* неизвестных в системе, которое, в свою очередь, равно разности числа n *всех* неизвестных и числа *базисных* неизвестных, равного числу линейно независимых уравнений. Будем искать именно такие *минимальные* системы, т.е. системы, состоящие из $n - p$ линейно независимых уравнений.

8.51. Рассмотрим систему линейно независимых уравнений

$$\begin{matrix} A & X & = & O \\ m \times n & n \times 1 & & m \times 1 \end{matrix}$$

иными словами, строки матрицы A линейно независимы. Пусть $\Phi = \|X_1, \dots, X_p\|$ — фундаментальная матрица этой системы: столбцы $X_1, \dots, X_p$ линейно независимы и $AX_j = O$ для любого $j = 1, \dots, p$. Последние уравнения можно объединить в матричное уравнение

$$\begin{matrix} A & \Phi & = & O \\ m \times n & n \times p & & m \times p \end{matrix}$$

Транспонируем обе части это уравнения:

$$\begin{matrix} \Phi^T & A^T & = & O \\ p \times n & n \times m & & p \times m \end{matrix}$$

Таким образом, столбцы матрицы A^T (т.е. транспонированные строки матрицы A) являются решениями однородной системы

$$\begin{matrix} \Phi^T & Y \\ p \times n & n \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} O \\ p \times 1 \end{matrix}.$$

Фундаментальное семейство решений этой системы состоит из $n - p \stackrel{\text{def}}{=} m$ столбцов, которые после транспонирования становятся строками основной матрицы A искомой системы $AX = O$.

2. Примеры решения задач

Пример 8.1. Докажите, что линейная оболочка любого семейства векторов $Z_1, \dots, Z_p$ пространства $\mathbb{K}^n$ является подпространством в $\mathbb{K}^n$.

Решение. Рассмотрим произвольные векторы $X, Y \in L(Z_1, \dots, Z_p)$, составим из них линейную комбинацию $\alpha X + \beta Y$ с произвольными коэффициентами α и β и убедимся, что она принадлежит линейной оболочке $L(Z_1, \dots, Z_p)$. Действительно,

$$\begin{aligned} X \in L(Z_1, \dots, Z_p) &\iff X = \alpha_1 Z_1 + \dots + \alpha_p Z_p \\ Y \in L(Z_1, \dots, Z_p) &\iff Y = \beta_1 Z_1 + \dots + \beta_p Z_p \\ \Rightarrow \alpha X + \beta Y &= \alpha(\alpha_1 Z_1 + \dots + \alpha_p Z_p) + \beta(\beta_1 Z_1 + \dots + \beta_p Z_p) = \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)Z_1 + \dots + (\alpha\alpha_p + \beta\beta_p)Z_p \in L(Z_1, \dots, Z_p). \end{aligned}$$

Пример 8.2. Решите однородную систему

$$\begin{cases} x^1 & + 3x^3 & + x^5 = 0, \\ & x^2 + 4x^3 & + 2x^5 = 0, \\ & & x^4 + 2x^5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Данная система имеет упрощённый вид: базисными неизвестными являются x^1, x^2, x^4 , свободными — x^3, x^5 . Перепишем систему, оставив базисные неизвестные (они выделены) в левых частях уравнений и перенося свободные неизвестные в правые части:

$$\begin{cases} x^1 & + 3x^3 & + x^5 = 0, \\ x^2 & + 4x^3 & + 2x^5 = 0, \\ x^4 & + 2x^5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -2x^5. \end{cases}$$

Если вместо свободных неизвестных x^3 и x^5 подставлять произвольные числа, $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, и вычислять x^1 , x^2 , x^4 по указанным формулам, то получим общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c^1 - c^2 \\ -4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ -c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормальное фундаментальное семейство решений (X_1, X_2) и нормальная фундаментальная матрица Φ данной системы имеют вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь выделены элементы матрицы, в которых находятся значения свободных неизвестных; матрица, составленная из выделенных элементов, является единичной матрицей порядка 2. Общее решение системы представляется через нормальное фундаментальное семейство решений и через нормальную фундаментальную матрицу по формулам

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 = c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.3. Решите неоднородную систему

$$\begin{cases} x^1 + 3x^3 + x^5 = 1, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 2, \\ x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases}$$

Решение. Данная система имеет упрощённый вид, базисными неизвестными являются x^1, x^2, x^4 , свободными — x^3, x^5 . Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^1 + 3x^3 + x^5 = 1, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 2, \\ x^4 + 2x^5 = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5; \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}}$$

(здесь выделены значения свободных неизвестных). Базисное решение неоднородной системы представляет собой её частное решение, отвечающее нулевым значениям свободных неизвестных.

Пример 8.4. При помощи алгоритма Гаусса—Жордана приведите к упрощённому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Шаг 1. В качестве ведущей строки можно выбрать вторую или четвёртую строку; выберем вторую. Ведущий элемент равен 2; делим ведущую строку на 2 и переставляем на первое место:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущей строкой теперь является первая строка, а ведущим столбцом — первый столбец.

Обратим в нуль все элементы ведущего (первого) столбца, кроме ведущего элемента; единственный такой элемент — это 3 в четвёртой строке (этот элемент выделен жирным шрифтом). Выполним следующее элементарное преобразование: к четвёртой строке прибавим ведущую (первую), умноженную на (-3) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \mathbf{3} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Первый столбец полученной матрицы теперь является первым столбцом единичной матрицы порядка 4.

Шаг 2. На втором шаге в качестве ведущей строки можно выбрать вторую, третью или четвёртую строку. Выберем третью, разделим её на ведущий элемент (-1) (он выделен) и переставим на второе место:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ведущей строкой теперь является вторая строка, а ведущим столбцом — второй столбец.

Обратим в нуль все элементы ведущего (второго) столбца, кроме ведущего элемента (они выделены жирным шрифтом). Выполним следующие элементарные преобразования:

- к первой строке прибавляем ведущую (вторую) строку, умноженную на $(-1/2)$;
- к третьей строке прибавляем ведущую (вторую) строку, умноженную на 2;
- к четвёртой строке прибавляем ведущую (вторую) строку, умноженную на $1/2$.

Результат выполнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец полученной матрицы теперь является вторым столбцом единичной матрицы порядка 4.

Шаг 3. В качестве ведущей строки можно выбрать только четвёртую строку. Делим её на ведущий элемент $-1/2$ (он выделен) и переставляем на третье место:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущей строкой теперь является третья строка, а ведущим столбцом — четвёртый столбец.

Обратим в нуль элементы ведущего (четвёртого) столбца, кроме ведущего элемента (они выделены жирным шрифтом), для чего выполним следующие элементарные преобразования:

- (а) к первой строке прибавим ведущую (третью) строку, умноженную на $-1/2$;
- (б) к первой строке прибавляем ведущую (третью) строку.

Результат выполнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвёртый столбец полученной матрицы теперь является третьим столбцом единичной матрицы порядка 4.

Ещё один шаг выполнить невозможно, так как четвертую строку нельзя выбрать в качестве ведущей: в ней нет ненулевых элементов. Процедура закончена, а полученная матрица имеет упрощённый вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её первый, второй и четвёртый столбцы (A'_1 , A'_2 , A'_4) являются базисными (они представляют соответственно собой первый, второй и третий столбцы единичной матрицы размера порядка 4), а остальные столбцы являются линейными комбинациями базисных:

$$\begin{aligned} A'_3 &= 2A'_1 - 3A'_2, \\ A'_5 &= A'_1 - 2A'_2 + 2A'_4, \end{aligned}$$

$$A'_6 = -A'_1 + 3A'_2 + 2A'_4.$$

Коэффициенты этих линейных комбинаций — это элементы соответствующих столбцов преобразованной матрицы.

Отметим, что указанные зависимости имеют место не только для столбцов преобразованной матрицы, но и для столбцов исходной:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A_1 - 3A_2,$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 - 2A_2 + A_4,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -A_1 + 3A_2 + 2A_4.$$

Разумеется, этот факт не случаен; он будет объяснён позже (см. теорему ??2, с. ??).

Пример 8.5. Приведите к упрощённому виду матрицу A из примера 8.4, используя при необходимости правило прямоугольников, и решите однородную систему $AX = O$.

Шаг 1. В качестве ведущей выберем вторую строку и переставим её на первое место:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге требуется все элементы ведущего (первого) столбца, кроме самого ведущего элемента, сделать равными нулю. Два из них (во второй и третьей строках) и так равны нулю, поэтому соответствующие строки преобразовывать не требуется (впрочем, можно разделить их на (-2) и (-1) соответственно), а элементы

третьей строки преобразуем по правилу прямоугольников (показано вычисление элемента последней строки второго столбца):

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & \boxed{3} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & \mathbf{3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 3} & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве ведущей выберем вторую строку. Вычтя из третьей строки матрицы вторую, получим нулевую строку, которую сразу переставим на последнее место:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге нужно обратить в нуль все элементы ведущего (второго) столбца (кроме самого ведущего элемента). В данной ситуации, по-видимому, вместо правила прямоугольников удобнее просто ведущую строку вычесть из первой строки и прибавить к третьей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве ведущей строки выберем третью; после преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в последней матрице выделены базисные столбцы.

Однородная система, основной матрицей которой является полученная матрица, имеет вид

$$\begin{cases} x^1 + 2x^3 + x^5 - x^6 = 0, \\ x^2 - 3x^3 - 2x^5 + 3x^6 = 0, \\ x^4 + 2x^5 + 2x^6 = 0. \end{cases}$$

Перенесём свободные неизвестные x^3, x^5, x^6 в правые части уравнений, оставив базисные неизвестные x^1, x^2, x^4 в левых частях:

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 - x^5 + x^6, \\ x^2 = 3x^3 + 2x^5 - 3x^6, \\ x^4 = -2x^5 - 2x^6. \end{cases}$$

Придав свободным неизвестным произвольные значения: $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, $x^6 = c^3$, и выразив значения базисных неизвестных x^1, x^2, x^4 через свободные, запишем ответ (общее решение системы):

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c^1 - c^2 + c^3 \\ 3c^1 + 2c^2 - 3c^3 \\ c^1 \\ -2c^2 - 2c^3 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_2} + c^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_3}.$$

Векторы X_1, X_2, X_3 образуют нормальное фундаментальное семейство решений системы, а составленная из них матрица

$$\Phi = \|X_1, X_2, X_3\| = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является нормальной фундаментальной матрицей. Общее решение системы выражается через неё формулой

$$X = \Phi C,$$

где $C \in \mathbb{K}^3$ — произвольный трёхэлементный столбец.

Пример 8.6. Решите однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x^1 - 5x^2 + 3x^3 - 6x^4 = 0, \\ -11x^1 + 8x^2 - 6x^3 + 9x^4 = 0. \end{cases}$$

Запишите фундаментальную совокупность решений и фундаментальную матрицу системы.

Решение. Выпишем основную матрицу системы и приведём её к упрощённому виду при помощи метода Гаусса—Жордана (комментарии опущены, ведущие строки и столбцы выделены):

$$\begin{pmatrix} \boxed{8} & -5 & 3 & -6 \\ -11 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 9 & -15 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{8} & -5 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{3} & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^3 - x^4 = 0, \\ 3x^2 - 5x^3 + 2x^4 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^1 = \frac{1}{3}(2x^3 + x^4), \\ x^2 = \frac{1}{3}(5x^3 - 2x^4). \end{cases}$$

Неизвестные x^1 и x^2 являются базисными, x^3 и x^4 — свободными. Придавая свободным неизвестным произвольные значения $x^3 = 3c^1$ и $x^4 = 3c^2$, получаем

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c^1 + c^2 \\ 5c^1 - 2c^2 \\ 3c^1 \\ 3c^2 \end{pmatrix} = c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{X_2}.$$

Столбцы $X_1 = (2; 5; 3; 0)^T$ и $X_2 = (1; -2; 0; 3)^T$ образуют фундаментальную совокупность решений (ФСР), т.е. базис в пространстве решений исходной однородной линейной системы: любое решение X системы можно представить в виде $X = c^1 X_1 + c^2 X_2$. Матрица

$$\Phi = \|X_1, X_2\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

состоящая из этих столбцов, называется фундаментальной матрицей исходной системы; любое решение системы выражается через

фундаментальную матрицу формулой $X = \Phi C$, где $C = (c^1, c^2)^T$ — столбец, состоящий из произвольных постоянных.

Пример 8.7. Решите две неоднородные системы $AX = B_1$ и $AX = B_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку системы имеют одну и ту же основную матрицу, процесс приведения расширенных матриц $\|A \mid B_1\|$ и $\|A \mid B_2\|$ к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана можно проводить одновременно (вычисления опущены):

$$\begin{aligned} & \|A \mid B_1 \mid B_2\| = \\ & = \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 & -1 & 8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Для первой системы преобразованная расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

ей соответствует система

$$\begin{cases} x^1 + 2x^3 + x^5 = 0, \\ x^2 - 3x^3 + 2x^5 = 0, \\ x^4 - 3x^5 = 0, \\ 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 = 1; \end{cases}$$

последнее уравнение, а с ним и вся система несовместны.

Для второй системы имеем преобразованную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

и соответствующую систему

$$\begin{cases} x^1 & + 2x^3 & + x^5 = 3, \\ & x^2 - 3x^3 & + 2x^5 = 2, \\ & & x^4 - 3x^5 = 1, \\ 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x^1, x^2, x^4 являются базисными, x^3, x^5 — свободными. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = 3 - 2x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 + 3x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 1 + 3x^5 \end{cases}$$

и придавая свободным переменным произвольные значения $x^3 = c^1$ и $x^5 = c^2$, получаем выражение для произвольного решения системы $AX = B_2$:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2c^1 - c^2 \\ 2 + 3c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 1 + 3c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0} + c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2}.$$

Здесь столбец X_0 представляет собой частное решение исходной неоднородной системы $AX = B_2$, соответствующее нулевым значениям свободных неизвестных, а столбцы X_1 и X_2 образуют фундаментальную совокупность решений (ФСР) сопутствующей однородной системы $AX = O$.

Пример 8.8. Составьте однородную систему уравнений, для которой столбцы $X_1 = (1; 2; 3; 4)^T$ и $X_2 = (5; 6; 7; 8)^T$ образуют фундаментальную совокупность решений.

Решение. Если Φ — фундаментальная матрица однородной системы $AX = O$, то выполняется соотношение $A\Phi = O$. Транспонируя это уравнение, получаем $\Phi^T A^T = O^T$; если матрица Φ задана, то $\Phi^T A^T = O^T$ — уравнение для нахождения матрицы A^T : каждый столбец, удовлетворяющий этому матричному уравнению, после транспонирования становится строкой коэффициентов однородного линейного уравнения, которому удовлетворяет каждый столбец матрицы Φ .

Итак, требуется решить однородную систему с матрицей

$$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

линейно независимыми решениями однородной системы с такой основной матрицей будут, например, столбцы $(1; -2; 1; 0)^T$ и $(2; -3; 0; 1)^T$. Транспонируя эти столбцы, находим строки матрицы искомой системы и выписываем саму систему:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \\ 2x^1 - 3x^2 + x^4 = 0. \end{cases}$$

3. Задачи для самостоятельного решения

8.1. Для следующих однородных систем упрощённого вида укажите базисные и свободные неизвестные, найдите ФСР и запишите общее решение:

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & x^1 + x^2 = 0; \\ \text{(б)} & x^1 + x^2 + x^3 = 0; \\ \text{(в)} & \begin{cases} x^1 + x^3 = 0, \\ x^2 + x^3 = 0; \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(г)} \quad \begin{cases} x^1 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0; \end{cases} \\ \text{(д)} \quad \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

8.2. Для следующих неоднородных систем упрощённого вида укажите базисные и свободные неизвестные, запишите общее решение:

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & x^1 + x^2 = 1; \\ \text{(б)} & x^1 + x^2 + x^3 = 1; \\ \text{(в)} & \begin{cases} x^1 + x^3 = 1, \\ x^2 + x^3 = 2; \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(г)} \quad \begin{cases} x^1 + x^3 + x^4 = 1, \\ x^2 + x^3 + x^4 = 2; \end{cases} \\ \text{(д)} \quad \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 - x^2 + x^4 = 2. \end{cases} \end{array}$$

8.3. Решите следующие однородные системы при помощи алгоритма Гаусса—Жордана:

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 + 5x^4 = 0, \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 = 0; \end{cases} \\ \text{(б)} & \begin{cases} 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 13x^5 = 0, \\ 2x^2 - 4x^3 + 4x^4 - 4x^5 = 0, \\ 5x^1 + x^2 + 13x^3 - 3x^4 + 8x^5 = 0; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{в}) \quad & \begin{cases} 4x^1 - x^2 - 7x^3 + 5x^5 - x^6 + 4x^7 = 0, \\ -2x^1 + 3x^2 + 11x^3 - 3x^4 - 11x^5 - 6x^6 + 4x^7 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + x^4 + x^5 + 5x^6 - x^7 = 0; \end{cases} \\
 (\text{г}) \quad & \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 4x^3 + x^4 - x^5 + 5x^6 + x^7 = 0, \\ -x^1 + 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 10x^5 + 2x^6 - 5x^7 = 0, \\ 3x^1 + 9x^3 + x^4 - 4x^5 + 8x^6 + x^7 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5 + 9x^6 - 3x^7 = 0, \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + x^4 - 3x^5 + 7x^6 + 2x^7 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

8.4. Решите следующие неоднородные системы при помощи алгоритма Гаусса—Жордана (ср. задачу 8.3):

$$\begin{aligned}
 (\text{а}) \quad & \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 5, \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 = 7; \end{cases} \quad (\text{б}) \quad \begin{cases} 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 3x^4 = 13, \\ 2x^2 - 4x^3 + 4x^4 = -4, \\ 5x^1 + x^2 + 13x^3 - 3x^4 = 8; \end{cases} \\
 (\text{в}) \quad & \begin{cases} 4x^1 - x^2 - 7x^3 + 5x^5 - x^6 = 4, \\ -2x^1 + 3x^2 + 11x^3 - 3x^4 - 11x^5 - 6x^6 = 4, \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + x^4 + x^5 + 5x^6 = -1; \end{cases} \\
 (\text{г}) \quad & \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 4x^3 + x^4 - x^5 + 5x^6 = 1, \\ -x^1 + 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 10x^5 + 2x^6 = -5, \\ 3x^1 + 9x^3 + x^4 - 4x^5 + 8x^6 = 1, \\ 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5 + 9x^6 = -3, \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + x^4 - 3x^5 + 7x^6 = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

8.5. При помощи метода Гаусса—Жордана решите однородные системы уравнений, заданные основными матрицами:

$$(\text{а}) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -5 & -6 & -10 \\ -2 & 5 & 16 & 12 & 15 & 24 \\ -5 & 12 & 39 & 30 & 37 & 59 \\ 6 & -15 & -48 & -38 & -47 & -74 \end{pmatrix}; \quad (\text{б}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & -7 & -10 & -13 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Запишите фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу и формулу, выражающую произвольное решение через фундаментальную матрицу.

8.6. Дана блочная матрица $\|A \mid B_1 \mid B_2\|$. При помощи метода Гаусса—Жордана решите две неоднородные системы $AX = B_1$ и

$$AX = B_2.$$

$$\|A \mid B_1 \mid B_2\| = \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 24 \\ 2 & 5 & 11 & 5 & -7 & 8 & 57 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -5 & 3 & 28 \\ 2 & 5 & 11 & 5 & -7 & 9 & 57 \end{array} \right).$$

8.7. Даны столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составьте однородную систему, фундаментальное семейство решений которой состоит из столбцов (а) X_1 ; (б) X_1, X_2 ; (в) X_1, X_2, X_3 .

8.8. Даны столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составьте однородную систему, фундаментальная совокупность решений которой состоит из столбцов (а) X_1 ; (б) X_1, X_2 ; (в) X_1, X_2, X_3 ; (г) X_1, X_2, X_3, X_4 .

Указания и решения

1.1.

$$\begin{aligned}
 \text{(в)} \quad \sum_{j=1}^N \frac{1}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \\
 &= \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{1}{j}}_{\text{переобозначение } j \rightarrow k} - \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{1}{j+1}}_{\text{замена } k = j+1} = \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = \left(1 + \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=2}^N \frac{1}{k} + \frac{1}{N+1} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{N+1}.
 \end{aligned}$$

1.7. В случае $x_1 \dots x_n = 0$ неравенство очевидно. Если $x_1 \dots x_n \neq 0$, положите $y_k = x_k / \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ и воспользуйтесь результатом примера 1.5.

1.8. Используйте принцип полной математической индукции.

1.9. Воспользуйтесь соотношениями $\varphi^2 = 1 + \varphi$, $(1 - \varphi)^2 = 2 - \varphi$, предварительно доказав их.

2.1. (а) Предположим, что требуется из r человек выбрать комиссию в составе m человек, а внутри неё — штаб из k человек. Если сначала выбрать членов комиссии, а из них выбирать штаб, то подсчёт числа способов это сделать приведёт к левой части равенства. Если же сначала выбрать штаб, а затем из оставшихся $r - k$ человек выбрать $m - k$ рядовых членов комиссии, то подсчёт приведёт к правой части равенства.

(б) Рассмотрим набор из m чёрных и n белых шаров. При каждом p от 0 до k число способов выбрать p белых и $k - p$ чёрных шаров равно $C_n^p C_m^{k-p}$. Складывая, получим общее число способов выбрать k шаров из $m + n$, то есть C_{m+n}^k .

(г) Рассмотрим множество $\{a_1, \dots, a_n\}$, состоящее из n элементов. Вместо того, чтобы сразу найти число способов выбрать из него k элементов, найдём сначала количество k -элементных множеств, содержащих a_1 (их будет C_{n-1}^{k-1}); затем не содержащих a_1 , но содержащих a_2 (их C_{n-2}^{k-1}) и т. д.; в результате получим правую часть.

2.2. Воспользуйтесь очевидной формулой $n! = (n-1)!! \cdot n!!$.

2.3. Положите в формуле бинома Ньютона (а) $a = b = 1$; (б) $a = 1$, $b = -1$; (с) $a = 2$, $b = 1$.

2.4. Если положить $f(x) = (1+x)^n$ (ср. пример 2.3), то искомая сумма будет равна значению функции $(xf'(x))'$ при $x = 1$.

3.9. Рассмотрите $(1+i)^n$.

3.10. Разложите по формуле бинома Ньютона $(1+i/\sqrt{3})^n$.

3.11. Рассмотрите выражение $C + iS$.

3.12. Умножьте сумму на $1 - \varepsilon$.

4.5. См. решение примера 4.4.

5.14. Найдите следы матриц в левой и правой частях соотношения.

5.16. Проверьте равенство для случая, когда $f(x) = x^k$.

5.17. Из данного уравнения вытекает равенство $A(A + \mathbf{1}) = -\mathbf{1}$.

5.19. Умножьте приведённое выражение на $(\mathbf{1} - A)$.

6.8. Воспользуйтесь результатами задачи 6.7.

6.9. Для системы (б) используйте результат задачи 6.6(h).

6.10. Одна матрица получается из другой умножением на -1 второй строки и второго столбца.

Ответы

1.1.

- (а) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$;
- (б) $\sum_{p=0}^m a^p = \begin{cases} 1 + a + a^2 + \dots + a^m = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}, & \text{если } a \neq 1, \\ \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m+1 \text{ слагаемых}} = m+1, & \text{если } a = 1; \end{cases}$
- (в) $\sum_{j=1}^N \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$.

2.4. $n(n+1) \cdot 2^{n-2}$.

3.1. (а) $11 + 13i$; (б) $17 - i$; (в) $18 - 13i$; (г) $17 + 7i$.

3.2. (а) 6; (б) $6 - 6i$; (в) $6 + i$; (г) $-1 + 5i$.

3.3. (а) Серединный перпендикуляр к отрезку с концами z_1 и z_2 ; (б) прямая, проходящая через точки z_1 и z_2 , из которой исключена точка z_2 ; (в) окружность, диаметром которой является отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2 , из которой исключена точка z_2 ; (г) окружности, касающиеся в начале координат мнимой оси, и сама мнимая ось; уравнение семейства $c(x^2 + y^2) = x$; (д) полоса $-1 < y < 0$; (е) парабола $2y = x^2 + 1$.

3.4. (а) $\exp i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; (б) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \exp \frac{i\alpha}{2}$; (в) $\exp i\alpha$; (г) $\exp i(\alpha - \beta)$; (д) $\sqrt{2(1 - \sin \alpha)} \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]$; (е) $\exp 2i\alpha$.

3.5. (а) $\pm(3 - i)$; (б) $\pm(5 - 2i)$; (в) $\pm(3 + 2i)$; (г) $\pm(1 - 2i)$.

3.6. (а) $2 + 2i$, $2 - 2i$; (б) $3 + i$, $3 - i$; (в) $1 + i$, $2 - 3i$; (г) i , $1 + i$.

3.7. (а) $\pm\sqrt{3} - i$, $2i$; (б) $1 \pm i\sqrt{3}$, -2 .

3.8. (а) $\pm(\sqrt{3} + i)$, $\pm(1 - i\sqrt{3})$; (б) $\pm(\sqrt{3} - i)$, $\pm(1 + i\sqrt{3})$.

3.9. (а) $2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}$; (б) $2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}$.

3.10. $2^n \cdot 3^{(1-n)/2} \sin \frac{n\pi}{6}$.

3.11. (а) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2}x$; (б) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2}x$.

3.12. $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, если $\varepsilon \neq 1$; $\frac{1}{2}n(n+1)$, если $\varepsilon = 1$.

3.13. (а) $-\frac{n}{2}$; (б) $-\frac{n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

4.1. $\overrightarrow{BC} = (1; 1)$, $\overrightarrow{CD} = (0; 1)$, $\overrightarrow{DE} = (-1; 0)$, $\overrightarrow{EF} = (-1; -1)$, $\overrightarrow{BD} = (1; 2)$, $\overrightarrow{CF} = (-2; 0)$, $\overrightarrow{CE} = (-1; 1)$.

4.2. $A(-1, -1)$; $B(0, -1)$; $C(1, 1)$; $D(0, 1)$.

4.3. $C(1/k, 1)$; $M(1/(k+1), k/(k+1))$; $S(0, k/(k-1))$.

4.4. $O(0, 0, 0)$; $A(-1, 1, 1)$; $B(1, -1, 1)$; $C(1, 1, -1)$.

4.6. (а) $2x + 5y = 29$; (б) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3}$; (в) $\frac{x-5}{0} = \frac{y-3}{-7}$; (г) $x = -2 + 2t$, $y = 4 - 5t$; (д) $x = 2t + 5$, $y = -2$; (е) $2x - 5y = 61$; (ж) $11x + 5y = -34$.

4.7. (а) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$; (б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$; (с) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

5.1. (а) $\begin{pmatrix} 25 & -16 & 13 \\ 9 & -5 & 10 \\ 140 & -87 & 91 \end{pmatrix}$, (б) $\begin{pmatrix} 34 & -91 \\ -19 & 77 \end{pmatrix}$, (в) $\begin{pmatrix} 34 & -19 \\ -91 & 77 \end{pmatrix}$.

5.2. Для произвольной матрицы B того же порядка, что рассматриваемая матрица $A = \lambda \mathbf{1}$, имеем:

$$AB = (\lambda \mathbf{1})B = \lambda(\mathbf{1}B) = \lambda B = \lambda(B\mathbf{1}) = B(\lambda \mathbf{1}) = BA.$$

5.3. (а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (б) $2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $n = 2$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $n = 3$, O при $n \geq 4$.

5.4. (а) $\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

5.5. $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 9 \\ -4 & 4 & 11 \\ -4 & 6 & -20 \end{pmatrix}$.

5.6. (а) O ; (б) O ; (в) $\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}$; (г) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$.

5.7.

(а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, (в) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

$$(г) \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (д) \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \quad (е) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$5.8. \quad (а) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}; \quad (в) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ -16 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.9.

$$(а) \quad 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(б) \quad 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(в) \quad -2(4, 3, 2, 3) - (-2, -2, -1, -3) - 3(3, 4, 1, 2);$$

$$(г) \quad 3(1, 2, 3) + 4(-2, -1, -3) + (3, -2, 1) + 2(1, -3, 2).$$

$$5.17. \quad A^{-1} = -(A + \mathbf{1}).$$

$$5.20. \quad \lambda = B^T A.$$

$$5.21. \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbf{1},$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3, \quad [\sigma_1, \sigma_2] = 2i \sigma_3,$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i \sigma_1,$$

$$\sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i \sigma_2.$$

5.22. (г): Произведение кососимметричных матриц A и B является кососимметричной матрицей тогда и только тогда, когда $AB + BA = O$.

$$6.1. \quad (а) 1; \quad (б) 0; \quad (в) -1; \quad (г) 4ab; \quad (д) 0; \quad (е) 0; \quad (ж) 2b^3; \quad (з) 1.$$

$$6.2. \quad (а) \left(\frac{37}{23}; \frac{29}{23} \right); \quad (б) \left(\frac{19}{7}; \frac{11}{14} \right); \quad (в) \left(\frac{7}{5}; -\frac{1}{5} \right); \quad (г) \left(\frac{5}{7}; \frac{5}{7} \right).$$

$$6.3. \quad (а) \text{ При } p \neq 2, p \neq 3 \text{ решение единственно: } \left(\frac{6}{3-p}; \frac{5}{p-3} \right).$$

При $p = 2$ решений бесконечно много: $(c; 1-c)$, где c — произвольное число. При $p = 3$ решений нет.

$$(б) \text{ При } p \neq 2, p \neq 6 \text{ решение единственно: } \left(\frac{p-5}{p-2}; \frac{1}{p-2} \right). \text{ При}$$

$p = 2$ решений нет. При $p = 6$ решений бесконечно много: $(2-5c; 3c)$, где c — произвольное число.

$$6.6. \quad (а) 0; \quad (б) -18; \quad (в) -42; \quad (г) a^3 - 3ab^2 + 2b^3; \quad (д) -c(a^2 + b^2); \quad (е) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc; \quad (ж) 0; \quad (з) (a-b)(b-c)(c-a); \quad (и) (a-b)(b-c)(c-a);$$

(к) $a^2 + b^2 + c^2 + 1$; (л) $6x^2 + 2$; (м) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)$;
 (н) 0.

$$6.7. \quad (a) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -13 & 1 & -11 \\ 11 & 1 & 7 \\ -7 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad (б) \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6.8. \quad (a) (2; 1; -1); \quad (б) (-1; -1; -1).$$

$$6.9. \quad (a) \left(\frac{-a+b+c}{2a}; \frac{a-b+c}{2b}; \frac{a+b-c}{2c} \right);$$

$$(б) \left(\frac{(p-b)(p-c)}{(a-b)(a-c)}; \frac{(p-a)(p-c)}{(b-a)(b-c)}; \frac{(p-a)(p-b)}{(c-a)(c-b)} \right).$$

$$7.3. \quad \overline{CH} = (\mathbf{a}^2 \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 \mathbf{a}) / (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2).$$

$$7.5. \quad |OD| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta + 2ab \cos \gamma}.$$

$$7.6. \quad V = abc \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}.$$

$$7.7. \quad V = \frac{1}{6} abc \frac{1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

$$7.14. \quad \frac{(\lambda \mu \nu - 1)^2}{(1 + \lambda + \lambda \mu)(1 + \mu + \mu \nu)(1 + \nu + \nu \lambda)}.$$

$$7.15. \quad \overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]^2} [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3].$$

$$8.1. \quad \text{ФСР: (а) } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T; \quad (б) \begin{pmatrix} -1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}^T;$$

$$(в) \begin{pmatrix} -1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}^T; \quad (г) \begin{pmatrix} -1 \\ -1, 1, 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 \\ -1, 0, 1 \end{pmatrix}^T;$$

$$(д) \begin{pmatrix} 1, 0, -1, -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0, 1, -1, 1 \end{pmatrix}^T.$$

8.2. ФСР сопутствующей однородной системы см. в ответе к задаче 8.1; базисное решение неоднородной системы: (а) $\begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix}^T$;
 (б) $\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$; (в) $\begin{pmatrix} 1, 2, 0 \end{pmatrix}^T$; (г) $\begin{pmatrix} 1, 2, 0, 0 \end{pmatrix}^T$; (д) $\begin{pmatrix} 0, 0, 1, 2 \end{pmatrix}^T$.

8.3. НФСР системы: (а) $\begin{pmatrix} -2, 1, 1, 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1, -2, 0, 1 \end{pmatrix}^T$;

(б) $\begin{pmatrix} -3, 2, 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -3, 4, 0, -1, 1 \end{pmatrix}^T$;

$$(в) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (г) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.4. Общее решение системы:

$$\begin{aligned}
 & \text{(а)} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\
 & \text{(в)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\
 & \text{(г)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

8.5. Преобразованные матрицы систем:

$$\text{(а)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ФСР систем: (а) $\mathbf{p}_1 = (3; -2; 1; 0; 0; 0)^T$, $\mathbf{p}_2 = (-1; -1; 0; -1; 1; 0)^T$, $\mathbf{p}_3 = (1; -2; 0; -1; 0; 1)^T$; (б) $\mathbf{p}_1 = (-1; 2; 1; 0; 0; 0)^T$, $\mathbf{p}_2 = (2; -3; 0; 1; 0; 0)^T$, $\mathbf{p}_3 = (3; -4; 0; 0; 1; 0)^T$, $\mathbf{p}_4 = (4; -5; 0; 0; 0; 1)^T$.

8.6. Первая система несовместна, вторая имеет общее решение

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = c^1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{8.7. (а)} \quad \begin{cases} x^1 + x^2 = 0, \\ -2x^1 + x^3 = 0, \\ -3x^1 + x^4 = 0; \end{cases} \quad \text{(б)} \quad \begin{cases} -4x^1 + 6x^2 + 5x^3 = 0, \\ -7x^1 + 8x^2 + 5x^4 = 0; \end{cases} \\
 & \text{(в)} \quad 13x^1 - 4x^2 + 38x^3 - 31x^4 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.8. \quad & \text{(a)} \begin{cases} x^1 - 2x^2 = 0, \\ x^2 - x^3 = 0, \\ x^4 = 0, \\ x^2 + x^5 = 0; \end{cases} \quad \text{(б)} \begin{cases} x^1 - 3x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - 2x^2 + x^4 = 0, \\ -3x^1 + 7x^2 + x^5 = 0; \end{cases} \\ & \text{(в)} \begin{cases} 4x^1 - 9x^2 + x^3 + 3x^4 = 0, \\ -10x^1 + 21x^2 - 7x^4 + x^5 = 0; \end{cases} \quad \text{(г)} 2x^1 - 3x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5 = 0. \end{aligned}$$