ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯТОРА В СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ С ДВУМЯ ТЕМПАМИ ДВИЖЕНИЙ

М.Г. Дмитриев[a],Д.А. Макаров[a]

[a]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН)

02.06.2022, МГУ

Введение

- В литературе большое внимание уделяется проблеме нахождения законов рационального управления в форме обратной связи для нелинейных управляемых систем в реальном времени с достаточной точностью. При этом достижение приемлемой точности достигается зачастую за счет повышения размерности уравнений динамики и учета так называемых быстрых движений.
- Математические модели динамики при этом могут описываться сингулярно возмущенными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Исследованию сингулярно возмущенных задач оптимального управления и их приложениям посвящены многочисленные статьи (см., например, [1–3]).
- Один из приближенных подходов к решению сингулярно возмущенных задач с заданной точностью связан с построением итерационных процедур, использующих декомпозицию уравнений динамики.

---

[1] A. B. Vasil'eva, M. G. Dmitriev, "Singular perturbations in optimal control problems," J. Math. Sci., vol. 34, pp. 1579–1629, 1986.

[2] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design", SIAM: Philadelphia, 1999.

[3] Dmitriev M.G. and Kurina G.A., "Singular perturbations in control problems", Automation and Remote Control, vol. 67(1), pp. 1-43, 2006.

Введение

- Итерационные последовательные и параллельные схемы нахождения экстремалей Понтрягина для сингулярно возмущенных задач оптимального управления впервые были предложены в работах [4,5].
- Аналогичные приемы решения уравнений Риккати, возникающих в линейно квадратичных задачах оптимального управления для сингулярно возмущенных систем на конечном интервале, рассматривались в работах [4,5], а на полуоси в [6].
- В настоящей работе, используя технику подхода SDRE (см., например, обзор [7]), развивается последовательный итерационный алгоритм решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления из [4,5] и приводится итерационный последовательный метод построения обратной связи в задаче на конечном интервале на случай слабо нелинейных систем.

---

[4] Dmitriev M.G. and Klishevich A.M., "Iterative solution of optimal control problems with fast and slow motions", Systems and Control Letters, vol. 4(4), pp. 223-226, 1984.

[5] Клишевич А.М. "Равномерные приближения в сингулярно возмущенных задачах и их применение в теории оптимального управления", диссертация на соиск. учен. ст. к.ф.-м.н. по спец. 01.01.02. ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске, 148 с., 1985.

[6] Z. Gajic and Xu. Shen, "Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems", London: Springer, 1993.

[7] Cimen T., "State-dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey", IFAC Proceedings Volumes, №. 2, pp. 3761–3775, 2008.

Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления для слабо нелинейной сингулярно возмущенной системы

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = A_1(x,\varepsilon)x + A_2(x,\varepsilon)y + B_1(x,\varepsilon)u, \ \ x(0) = x^0, \\
\varepsilon\,\frac{dy}{dt} = A_3(x,\varepsilon)x + A_4(x,\varepsilon)y + B_2(x,\varepsilon)u, \ \ y(0) = y^0, \\
J\,(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(w^TQ(x,\varepsilon)w + u^TRu\right)dt \to \min_u, \\
x \in X \subset \mathrm{R}^{n_x}, \ y \in Y \subset \mathrm{R}^{n_y}, \ u \in \mathrm{R}^r, \ \ Q(x,\varepsilon) \geq 0, \ R > 0, \\
w = \left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]^T \in W \subset \mathrm{R}^n, W = X \times Y, \ t \in [0, t_f]\,, \ 0 < \varepsilon \ll 1,
\end{gathered} \tag{1}$$

где x, y – соответственно медленные и быстрые координаты; X, Y – ограниченные множества, включающие 0; w – совокупный вектор переменных состояния; матрицы системы имеют вид $A_i(x,\varepsilon) = A_{i,0} + \varepsilon A_{i,1}(x)$, $i = \overline{1,4}$; $B_j(x,\varepsilon) = B_{j,0} + \varepsilon B_{j,1}(x)$, $j = 1,2$; u – управление; ε – малый параметр; $n = n_x + n_y$; Q и R – весовые матрицы критерия.

Введем некоторые условия.

I. Коэффициенты в матрицах (1) являются ограниченными и гладкими функциями своих аргументов в области $G = \{x \in X, 0 \leq t \leq t_f, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$, где ε_0 - достаточно малый положительный параметр, и становятся константами при $\varepsilon = 0$. Ограниченная область W включает начало координат. Все траектории системы (1) существуют, единственны и принадлежат W для любого допустимого управления $u(t)$ при $t \in [0, t_f]$

Вид оптимального управления

Субоптимальная обратная связь для задачи (1) принимает вид[8]

$$u(w,t,\varepsilon) = -R^{-1}B^T(x,\varepsilon)(P(w,t,\varepsilon)w + \Pi(w,t,\varepsilon)), \tag{2}$$

где

$$\Pi(w,t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} w^T\frac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_1}w & w^T\frac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_2}w & \ldots & w^T\frac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_n}w \end{bmatrix}^T,$$

матрица $P(w,t,\varepsilon)$ является решением следующей задачи Коши для матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\frac{dP}{dt} + PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q + \Omega = 0,\; P(w(t_f),t_f,\varepsilon) = 0, \tag{3}$$

в котором $\frac{dP}{dt}$ - полная производная по времени от $P(w,t,\varepsilon)$,

$$P(w,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} P_1(w,t,\varepsilon) & \varepsilon P_2(w,t,\varepsilon) \\ \varepsilon {P_2}^T(w,t,\varepsilon) & \varepsilon P_3(w,t,\varepsilon) \end{pmatrix},\; B(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1(x,\varepsilon) \\ \frac{B_2(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$A(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1(x,\varepsilon) & A_2(x,\varepsilon) \\ \frac{A_3(x,\varepsilon)}{\varepsilon} & \frac{A_4(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \end{pmatrix},\; Q(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} Q_1(x,\varepsilon) & Q_2(x,\varepsilon) \\ {Q_2}^T(x,\varepsilon) & Q_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\Omega(w,t,\varepsilon) = \frac{1}{4}\widehat{P}_w^{\,T} BR^{-1}B^T\widehat{P}_w,\; \widehat{P}_w(w,t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial w_1}w & \ldots & \frac{\partial P}{\partial w_n}w \end{bmatrix}^T.$$

$$Q_i(x,\varepsilon) = Q_{i,0} + \varepsilon Q_{i,1}(x),\quad i = \overline{1,3}.$$

[8] Heydari A. and Balakrishnan S.N., “Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems” Intern. Journ. of Rob. and Nonlin. Contr., vol. 25, №.15, pp. 2687-2704, 2015

Блочная форма матричного уравнения типа Риккати

Учитывая блочную форму матриц в (3), последнее можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}P_1 &= N_1(x,y,t,\varepsilon), \quad P_1(w(t_f),t,\varepsilon) = 0,\\
\varepsilon\tfrac{d}{dt}P_2 &= N_2(x,y,t,\varepsilon), \quad P_2(w(t_f),t,\varepsilon) = 0,\\
\varepsilon\tfrac{d}{dt}P_3 &= N_3(x,y,t,\varepsilon), \quad P_3(w(t_f),t,\varepsilon) = 0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&N_1(w,t,\varepsilon) = -P_1A_1 - A_1{}^TP_1 - P_2A_3 - A_3{}^TP_2{}^T +\\
&P_1S_1P_1 + P_1SP_2{}^T + P_2S^TP_1 + P_2S_2P_2{}^T - Q_1 - \Omega_1,\\
&N_2(w,t,\varepsilon) = -P_1A_2 - P_2A_4 - \varepsilon A_1{}^TP_2 - A_3{}^TP_3 +\\
&\varepsilon P_1S_1P_2 + P_1SP_3 + \varepsilon P_2S^TP_2 + P_2S_2P_3 - Q_2 - \Omega_2,\\
&N_3(w,t,\varepsilon) = -\varepsilon P_2{}^TA_2 - \varepsilon A_2{}^TP_2 - P_3A_4 - A_4{}^TP_3 +\\
&\varepsilon^2P_2{}^TS_1P_2 + \varepsilon P_2{}^TSP_3 + \varepsilon P_3S^TP_2 + P_3S_2P_3 - Q_3 -\\
&\Omega_3, S_1 = B_1R^{-1}B_1{}^T, S_2 = B_2R^{-1}B_2{}^T, S = B_1R^{-1}B_2{}^T.
\end{aligned}
$$

Структура матрицы Ω

Блоки матрицы Ω имеют сложную и громоздку структуру. Например,

$$
\begin{aligned}
&4\Omega_1(P_1, P_2, \varepsilon) = \overset{\frown}{P}_{w,2,1} S_{2,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \\
&\varepsilon \Big[\overset{\frown}{P}_{w,2,1} S^T_{12,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,1,1} + \overset{\frown}{P}_{w,1,1} S_{12,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \overset{\frown}{P}_{w,2,1} S_{2,1} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \overset{\frown}{P}_{w,2,2} S_{2,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \\
&\overset{\frown}{P}_{w,2,1} S_{2,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,2} \Big] + \\
&\varepsilon^2 \Big[\overset{\frown}{P}_{w,1,1} S_{1,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,1,1} + \overset{\frown}{P}_{w,2,1} S^T_{12,1} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,1,1} + \overset{\frown}{P}_{w,2,2} S^T_{12,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,1,1} + \overset{\frown}{P}_{w,2,1} S^T_{12,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,1,2} + \\
&\overset{\frown}{P}_{w,1,1} S_{12,1} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \overset{\frown}{P}_{w,1,2} S_{12,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \overset{\frown}{P}_{w,2,1} S_{2,2} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \overset{\frown}{P}_{w,2,2} S_{2,1} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,1} + \\
&\overset{\frown}{P}_{w,1,1} S_{12,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,2} + \overset{\frown}{P}_{w,2,1} S_{2,1} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,2} + \overset{\frown}{P}_{w,2,2} S_{2,0} \overset{\frown}{P}{}^T_{w,2,2} \Big] + \\
&\varepsilon^3 [\ldots] + \varepsilon^4 [\ldots] + \varepsilon^5 [\ldots],
\end{aligned}
$$

где

Структура матрицы Ω

$$P_i(x,\varepsilon) = P_{i,0} + \varepsilon P_{i,1}(x), \quad i = 1,2,3;$$

$$\widehat{P}_{w,1,1} = \begin{bmatrix} p^s_{x_1,1} & \dots & p^s_{x_{n_x},1} \end{bmatrix}_{n_x \times n_x}, \quad p^s_{x_1,1\text{‘}} = \frac{\partial}{\partial x_1} P_{1,1}x, \ \dots, p^s_{x_{n_x},1\text{‘}} = \frac{\partial}{\partial x_{n_x}} P_{1,1}x,$$

$$\widehat{P}_{w,1,2} = \begin{bmatrix} p^s_{x_1,2} & \dots & p^s_{x_{n_x},2} \end{bmatrix}_{n_x \times n_x}, \quad p^s_{x_1,2} = \frac{\partial}{\partial x_1} P_{2,1}y, \ \dots, p^s_{x_{n_x},2} = \frac{\partial}{\partial x_{n_x}} P_{2,1}y,$$

$$\widehat{P}_{w,2,1} = \begin{bmatrix} p^s_{y_1,1} & \dots & p^s_{y_{n_y},1} \end{bmatrix}_{n_x \times n_y}, \quad p^s_{y_1,1\text{‘}} = \frac{\partial}{\partial y_1} P_{1,1}x, \ \dots, p^s_{y_{n_y},1\text{‘}} = \frac{\partial}{\partial y_{n_y}} P_{1,1}x,$$

$$\widehat{P}_{w,2,2} = \begin{bmatrix} p^s_{y_1,2} & \dots & p^s_{y_{n_y},2} \end{bmatrix}_{n_x \times n_y}, \quad p^s_{y_1,2} = \frac{\partial}{\partial y_1} P_{2,1}y, \ \dots, p^s_{y_{n_y},2} = \frac{\partial}{\partial y_{n_y}} P_{2,1}y,$$

$$\widehat{P}_{w,3,2} = \begin{bmatrix} p^f_{x_1,2} & \dots & p^f_{x_{n_x},2} \end{bmatrix}_{n_y \times n_x}, \quad p^f_{x_1,2} = \frac{\partial}{\partial x_1} P_{2,1}{}^T x + \frac{\partial}{\partial x_1} P_{3,1}y, \dots, p^f_{x_{n_x}2} =$$
$$\frac{\partial}{\partial x_{n_x}} P_{2,1}{}^T x + \frac{\partial}{\partial x_{n_x}} P_{3,1}y,$$

$$\widehat{P}_{w,4,2} = \begin{bmatrix} p^f_{y_1,2} & \dots & p^f_{y_{n_y},2} \end{bmatrix}_{n_y \times n_y}, \quad p^f_{y_1,2} = \frac{\partial}{\partial y_1} P_{2,1}{}^T x + \frac{\partial}{\partial y_1} P_{3,1}y, \dots, p^f_{y_{n_y}2} =$$
$$\frac{\partial}{\partial y_{n_y}} P_{2,1}{}^T x + \frac{\partial}{\partial y_{n_y}} P_{3,1}y,$$

$$S_{12,0} = B_{1,0}R^{-1}B_{2,0}{}^T, \quad S_{2,0} = B_{2,0}R^{-1}B_{2,0}{}^T, \quad S_{12,2}(x) = B_{1,1}(x)R^{-1}B_{2,1}{}^T(x),$$

$$S_{12,1}(x) = B_{1,0}R^{-1}B_{2,1}{}^T(x) + B_{1,1}(x)R^{-1}B_{2,0}{}^T, \quad S_{2,2}(x) = \varepsilon^2 B_{2,1}(x)R^{-1}B_{2,1}{}^T(x),$$

$$S_{2,1}(x) = B_{2,0}R^{-1}B_{2,1}{}^T(x) + B_{2,1}(x)R^{-1}B_{2,0}{}^T.$$

Итерационный алгоритм

Далее решение начальной задачи (3) раскладывается в ряд по целым положительным степеням параметра ε по методу пограничных функций А.Б. Васильевой[9]. Затем с помощью решения предельной задачи и правых пограничных функций в нулевом приближении, а также с помощью приведенной в [4,5] замены переменных, формируются сингулярно возмущенные начальные задачи для невязок блоков матрицы P.

В работе использовался вариант метода последовательных приближений, когда сначала находились «быстрые» блоки невязок для P, а затем - «медленные». При доказательстве предложенного алгоритма предполагается выполнение ряда дополнительных условий, среди которых требования к управляемости и наблюдаемости некоторых матриц, например,

$$II. \quad rank[B_{2,0}, A_{4,0}B_{2,0}, ..., A_{4,0}^{n_y-1}B_{2,0}] = n_y,$$
$$rank[C_{3,0}^T, A_{4,0}^T C_{3,0}^T, ..., {A_{4,0}^T}^{n_y-1} C_{3,0}^T]^T = n_y, C_{3,0}^T C_{3,0} = Q_{3,0}.$$

---

[4] Dmitriev M.G. and Klishevich A.M., "Iterative solution of optimal control problems with fast and slow motions", Systems and Control Letters, vol. 4(4), pp. 223-226, 1984.

[5] Клишевич А.М. "Равномерные приближения в сингулярно возмущенных задачах и их применение в теории оптимального управления", диссертация на соиск. учен. ст. к.ф.-м.н. по спец. 01.01.02. ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске, 148 с., 1985.

[9] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., "Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений", М.-Наука, 273 с, 1973.

Система и критерий качества

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \quad x(0) = -3, y(0) = 5, \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= (1 + \varepsilon \sin(x))\, x + (-1 + \varepsilon \cos(x))\, y + \\ & \left(2 + 3\varepsilon e^{-0.1x^2}\right) u. \end{aligned} \tag{5}$$

Матрицы критерия и временной интервал в (1) были определены следующим образом $R = 1,\ Q = diag\{1, 1\}, t \in [0, 5]$

Далее в таблице для нескольких значений параметра ε представлены значения критерия качества вдоль траекторий замкнутой системы (5),(2).

Результаты численных экспериментов

Управление (2) было получено для различного числа итераций предложенного алгоритма. Нулевая итерация соответсвует линейному управлению, полученному на основе решения вырожденной задачи оптимального управления и решений задач для правых погранслоев, соответсвующих быстрым блокам уравнения типа Риккати.

Таблица: Значения критерия качества для различных параметров ε и числа итераций алгоритма

	Iteration			
ε	*0*	*1*	*2*	*3*
5	15.58933	35.39225	5.097274	5.064529
1	8.543210	4.906988	5.256568	5.135998
0.1	6.435992	6.308513	6.301343	6.276599
0.01	6.695111	6.700553	6.693363	6.692953
0.001	6.744451	6.745238	6.744429	6.744425

Как видно из таблицы, для проведенных экспериментов наблюдается постепенное улучшение значения критерия с увеличением числа итераций, хотя оно и не является монотонным. Также отметим, что даже первые итерации могут привести к значительному улучшению критерия.

Заключение

Предложен итерационный метод построения регулятора в задаче управления на конечном интервале времени слабо нелинейной сингулярно возмущенной системой и найдены условия его применимости, естественные для близости решений возмущенных вариационных задач и решений их предельных задач.

Регулятор строится путем решения вспомогательного матричного нелинейного дифференциального уравнения, формирующего матрицу коэффициентов усиления.

Численные эксперименты демонстрируют стабилизирующие свойства предложенного регулятора.