Краевая задача для сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения с сингулярно возмущенным условием Неймана

Н. Н. Нефедов, А. Г. Никитин, Никулин Е. И.
кафедра математики физического факультета МГУ

1. Постановка задачи

В работе изучается краевая задача для сингулярно возмущенного обыкновенного интегродифференциального уравнения с сингулярно возмущенным краевым условием Неймана:

$$\varepsilon^2 u'' = L(u, u, x, \varepsilon), 0 < x < 1, \tag{1}$$

где интегральный оператор $L(u, u, x, \varepsilon)$ имеет следующий вид $L(u, v, x, \varepsilon) \equiv \int\limits_0^1 g(u(x), v(s), x, s, \varepsilon) ds$,

$$\varepsilon u'(0, \varepsilon) = a, u'(1, \varepsilon) = b. \tag{2}$$

Периодическая параболическая задача с сингулярно возмущенным краевым условием Неймана, не содержащая интегральный член в нелинейности, рассмотрена в [4]. Наличие малого параметра в условии Неймана приводит к существенному изменению вида асимптотики решения и интересно с точки зрения приложений [2]. Задача Неймана с невозмущенным левым условием вида $u'(0, \varepsilon) = a$, то есть когда заданный поток через границу не асимптотически велик, была изучена нами работе [1]. В работе [9] рассмотрена нелинейная интегропараболическая задача для уравнения вида (1), возникающая при моделировании динамики процессов в системах активатор-ингибитор [2], с краевыми условиями изоляции на концах отрезка. Асимптотика задачи (1), (2) строится с помощью модификации метода пограничных функций А.Б. Васильевой [5] для интегродифференциальных уравнений, обусловленной наличием интегрального члена в уравнении, в виде разложения

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + \Pi_i^1(\tau) + \Pi_i^2(\tau_*)) \equiv \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi^1(\tau, \varepsilon) + \Pi^2(\tau_*, \varepsilon), \tag{3}$$

где $\bar{u}_i(x)$ – члены регулярной части асимптотики, $\Pi_i^{1,2}$ – погранслойные члены асимптотики соответственно на левом и правом концах отрезка $[0, 1]$, где $\tau = x/\varepsilon$, $\tau_* = (1-x)/\varepsilon$ – погранслойные переменные. Сформулируем требования на нелинейности, входящие в интегродифференциальный оператор, которые понадобятся для построения асимптотического разложения решения и его обоснования.

Условие 1. Функция g являются достаточно гладкими (при построении асимптотики с остаточным членом порядка $\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1})$ достаточно потребовать, чтобы она была $n+2$ раза непрерывно дифференцируема).
Условие 2. Пусть вырожденное уравнение

$$L(u,u,x,0)=0,\ x\in[0,1], \tag{4}$$

имеет изолированный корень $u=\varphi(x)$ на отрезке $[0,1]$, причем

$$L_u(\varphi,\varphi,x,0)>0,\ x\in[0,1], \tag{5}$$

где

$$L_u(\varphi,\varphi,x,0)\equiv\int\limits_0^1 g_u(\varphi(x),\varphi(s),x,s,0)ds$$

(условие разрешимости и устойчивости).
Условие 3. Пусть функция $g(u,v,x,s,\varepsilon)$ будет монотонно невозрастающей по переменной v в некоторой области изменения этой переменной при любом фиксированном значении переменной u из той же области изменения, что и для второй переменной, при $(x,s)\in[0,1]\times[0,1]$ и достаточно малых ε (область, о которой идет речь в данном условии, будет уточнена в п. 3 при обосновании асимптотики решения).
Условие 4. Пусть следующее интегральное неравенство имеет положительное решение $y(x)$:

$$y(x)-\int\limits_0^1 K(x,s)y(s)ds>0, 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{6}$$

где

$$K(x,s)=-g_v(\varphi(x),\varphi(s),x,s,0)/L_u(\varphi,\varphi,x,0)$$

(g_v -частная производная функции g по второму аргументу). Заметим, что ядро данного интегрального неравенства неотрицательно в силу условий 2 и 3.
Замечание 1. Нетрудно показать, что при выполнении условий 3 и 4 неравенство (6) имеет положительное постоянное решение.

Из замечания 1 следует, что выполняется следующее неравенство

$$\min_{[0,1]}[L_u(\varphi,\varphi,x,0)+L_v(\varphi,\varphi,x,0)]>0 \tag{7}$$

Неравенство (7) использовалось ранее в работе [1], как одно из достаточных условий для построения и обоснования асимптотики. Если выполнено неравенство (7), то положительным решением в условии 4 будет постоянная. Таким образом, условие 4 и неравенство (7) эквивалентны при выполнении условия 3. Приведем еще оно достаточное условие для выполнения Условия 4:

Замечание 2. Достаточным условием для выполнения условия 4 является требование на собственные значения следующего интегрального уравнения Фредгольма с неотрицательным ядром $K(t,s)$

$$\Lambda y(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)y(s)ds,$$

а именно, требуется, чтобы главное позитивное собственное значение Λ_0 было меньше единицы (см. [6] стр.83, теорема 2.1).

В разделе 2. строится формальная асимптотика решения задачи (1), (2), в разделе 3. проводится обоснование асимптотики с помощью развиваемого для нового класса задач асимптотического метода дифференциальных неравенств.

2. Формальная асимптотика решения

Подставим формальное разложение (3) в задачу (1), (2) и приравняем слева и справа члены одного порядка малости по степеням ε, зависящие соответственно от x, τ и τ_*. Оператор L нужно представить в виде, аналогичном (3)

$$L \equiv \bar{L} + \Pi^1 L + \Pi^2 L.$$

Подробная схема такого представления приведена в [1]. Так как погранслойные члены асимптотики, как будет показано ниже, экспоненциально убывают по погранслойным переменным, то вблизи левого конца отрезка $[0,1]$ существенными будут функции с верхним индексом 1, а функции с индексом 2 вносят экспоненциально малую невязку. Вблизи правого конца отрезка будет обратная ситуация.

Определим сначала нулевые члены асимптотики. Для члена нулевого порядка регулярной части асимптотики $\bar{u}_0(x)$ получим нелинейное интегральное уравнение, имеющего вид (4)

$$L(\bar{u}_0, \bar{u}_0, x, 0) = 0,\ 0 < x < 1. \tag{8}$$

Выберем в качестве его решения $\bar{u}_0 = \varphi(x)$ из условия 2. Погранслойный член нулевого порядка на левом конце отрезка определяется из нелинейного интегродифференциального уравнения (верхний индекс здесь и далее будем опускать)

$$\Pi_0'' = L(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), \varphi(s), 0, 0), \tag{9}$$

(здесь учтено равенство (8)) с дополнительными условиями

$$\Pi_0'(0) = a, \Pi_0(+\infty) = 0 \tag{10}$$

В интегральном операторе $L(\varphi(0)+\Pi_0(\tau), \varphi(s), 0, 0)$ неизвестная функция $\Pi_0(\tau)$ не входит во второй аргумент, поэтому уравнение (9) фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением. Так как $L_u(\varphi(0), \varphi(s), 0, 0) > 0$ в силу (4), то точка (0, 0) фазовой плоскости (Π_0, Π_0') автономного дифференциального уравнения (9) является точкой покоя типа седла. Это означает, что задача (9)-(10) будет иметь решение, если горизонтальная прямая $\Pi_0' = a$ имеет хотя бы одну точку пересечения с входящей в точку покоя сепаратрисой. Если же таких точек несколько, то введем следующее правило отбора.

Условие 5. Пусть существует монотонное решение задачи (9) - (10), удовлетворяющее неравенствам

$$\Pi_0''(0) = L(\varphi(0)+\Pi_0(0), \varphi(s), 0, 0) > 0\,(<0),\ \Pi_0(0) > 0\,(<0).$$

Может существовать несколько решений, удовлетворяющих Условию 5. Ясно, что если модуль $|a|$ достаточно (но не асимптотически) мал, то хотя бы одно такое решение существует. Условие 2 гарантирует экспоненциальное убывание пограничной функции (см, например, [3])

$$|\Pi_0(\tau)| \leqslant e^{-\kappa\tau},$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные. На правом конце отрезка, как это показано в [1], погранслой в нулевом порядке асимптотики отсутствует $\Pi_0(\tau_*) \equiv 0$, что характерно для невозмущенных краевых условий Неймана.

Перейдем к построению членов асимптотики первого порядка. Регулярный член первого порядка находится из линейного интегрального уравнения

$$\bar{u}_1(x) - \int\limits_0^1 K(x,s)\bar{u}_1(s)ds = -L_\varepsilon(\varphi, \varphi, x, 0) - \int\limits_0^\infty Q_0^1 g d\xi - \int\limits_0^\infty Q_0^2 g d\xi_* L_u(\varphi, \varphi, x, 0), \qquad (11)$$

где

$$Q_0^{1,2} g = g(\varphi(x), \varphi(0) + \Pi_0^{1,2} u(\xi^{1,2}), x, 0, 0) - g(\varphi(x), \varphi(0), x, 0, 0),$$

$\xi^1 = s/\varepsilon, \xi^2 = (1-s)/\varepsilon$.

В силу требования 4 и неотрицательности ядра $K(x,s)$ это уравнение имеет единственное решение $\bar{u}_1(x)$ (см. [6] стр.83, теорема 2.2). Регулярные члены разложения более высокого порядка определяются из линейных интегральных уравнений с таким же интегральным оператором как в левой части уравнения (11), а неоднородность в правой части выражается через уже известные члены асимптотики.

Погранслойный член первого порядка вблизи точки $x = 0$ определяется из линейного дифференциального уравнения

$$\Pi_1'' = L_u(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), \varphi, 0, 0)\Pi_1 + \pi_1(\tau),\ \tau > 0, \qquad (12)$$

где функция $\pi_1(\tau)$ выражается через уже определенные члены асимптотики.

Краевые условия для уравнения (2.5) имеют следующий вид

$$\Pi_1'(0) = -\varphi'(0),\ \Pi_1(+\infty) = 0.$$

Можно выписать явный вид решения этой краевой задачи, и показать, что Π_1 также экспоненциально убывает при $\tau \to +\infty$.

Погранслойные члены более высоких порядков определяются из неоднородных линейных дифференциальных уравнений, имеющих такой же дифференциальный оператор, что и в уравнении (12). Причем, неоднородности в этих уравнениях выражаются через уже известные члены асимптотики и экспоненциально убывают по погранслойной переменной τ. Поэтому эти члены так же экспоненциально малы при $\tau \to +\infty$, как и $\Pi_1 u$. На правом конце погранслой отсутствует в нулевом порядке разложения $\Pi_0^2(\tau) \equiv 0$, а погранслойные члены более высоких порядков определяются из линейных уравнений и экспоненциально убывают по погранслойной переменной τ_* [1].

Таким образом, можно утверждать, что построена формальная асимптотика с остаточным членом порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, где n – произвольное натуральное число.

3. Обоснование асимптотического решения

Для доказательства существования решений задачи (1), (2), имеющих асимптотическое поведение, описанное в 2., используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [7] и его модификацию, подробно описанную в работе [1]. Основной идеей метода является конструктивное построение верхнего и нижнего решения для задачи (1), (2) на базе формальной асимптотики решения. Выпишем верхнее $\beta(x,\varepsilon)$ и нижнее $\alpha(x,\varepsilon)$ решение для асимптотики нулевого порядка точности, для первого и следующих порядков оно будет очевидным обобщением

$$\beta(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon(\bar{u}_1(x) + A + \Pi_1(\tau) + \Pi_\beta(\tau) + \exp(-k\tau_*)),$$

$$\alpha(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon(\bar{u}_1(x) - A + \Pi_1(\tau) + \Pi_\alpha(\tau) - \exp(-k\tau_*)),$$

где постоянная $A > 0$ обеспечивает выполнение нужного знака дифференциального неравенства на интервале $(0,1)$. Функция $\Pi_\beta(\tau)$ определяется из задачи

$$\Pi_\beta'' = L_u(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), \varphi, 0, 0)\Pi_\beta + \pi_\beta(\tau),\ \tau > 0,$$

$$\Pi_\beta'(0) = -\delta,\ \Pi_1(+\infty) = 0,$$

где $\delta > 0$ - некоторая постоянная, а

$$\pi_\beta(\tau) = A\left(L_u(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), \varphi, 0, 0)\right) - \left(L_u(\varphi(0), \varphi, 0, 0)\right) - M\exp(-k\tau).$$

В свою очередь, функция $\Pi_\alpha(\tau)$ определяется из задачи

$$\Pi''_\alpha = L_u(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), \varphi, 0, 0)\Pi_\alpha + \pi_\alpha(\tau), \ \tau > 0,$$

$$\Pi'_\beta(0) = \delta, \ \Pi_\alpha(+\infty) = 0,$$

где

$$\pi_\alpha(\tau) = A\left(L_u(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), \varphi, 0, 0)\right) - \left(L_u(\varphi(0), \varphi, 0, 0)\right) + M\exp(-k\tau).$$

Условие упорядоченности верхнего и нижнего решения $\alpha(x,\varepsilon) < \beta(x,\varepsilon)$ проверяется явным образом. Выбирая постоянную δ достаточно большой, получим необходимый знак дифференциального неравенства для условий Неймана на левом краю отрезка $[0,1]$

$$\varepsilon\beta'(0,\varepsilon) \leqslant a \leqslant \varepsilon\alpha(x,\varepsilon).$$

Кроме того, $\Pi_\alpha(\tau)$ и $\Pi_\beta(\tau)$ компенсируют в пограничном слое изменения, вносимые постоянной A. Дифференциальное неравенство для правого краевого условия

$$\beta'(1,\varepsilon) \geqslant b \geqslant \alpha'(1,\varepsilon)$$

обеспечивают экспоненты, зависящие от τ_*. Подставляя верхнее решение в интегродифференциальный оператор задачи, имеем

$$\varepsilon^2\beta'' - L(\beta,\beta,x,\varepsilon) = -\varepsilon\left(L_u(\varphi,\varphi,x,0)A + M\exp(-k\tau)\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \leqslant 0$$

для достаточно малых ε. Подобное неравенство с обратным знаком выполняется для $\alpha(x,\varepsilon)$. Итак, прямая проверка условий теоремы о дифференциальных неравенствах (см., например, теорему 3.1 в [1]) позволяет утверждать, что справедливо следующее утверждение

Теорема. Пусть выполнены условия 1-5, тогда при достаточно малых ε и любого, удовлетворяющего условию 5 решения $\Pi_0(\tau)$ задачи (9), (10), существует решение задачи (1), (2), имеющее оценку

$$\left| u(x,\varepsilon) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i(\bar{u}_i(x) + \Pi_i^1(\tau) + \Pi_i^2(\tau_*)) \right| = \mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}). \tag{13}$$

Замечание 3. Также как в [8] можно доказать локальную единственность решения задачи (1), (2) и асимптотическую устойчивость по Ляпунову построенного асимптотического решения, как стационарного решения соответствующей интегропараболической краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L(u,u,x,\varepsilon)\,, \ t > 0,$$

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(0,\varepsilon) = a, \ \frac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon) = b,$$

с начальными условиями, лежащими в окрестности построенного асимптотического решения.

Список литературы

1. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г.*//Дифференциальные уравнения. 2000. **36**, №. 10. С. 1398.

2. *Raquepas J., Dockery J.* // Physica D. 1999. **134**, P. 94.

   //No. 100014. **0**, № 0.

3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. **4**, №. 3. С. 799.

4. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* //Вестник МГУ. серия 3. Физика. Астрономия. 2020., № 2. С. 15.

5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. //Высш. школа. М., 1990.

6. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др.*// Интегральные уравнения. Наука. М., 1968.

7. *Нефедов Н.Н.* //Дифференциальные уравнения. 1995. **31**, №. 4. С.719.

8. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г.* //Дифференциальные уравнения. 2006. **42**, №. 5. С. 690.

9. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г.* //Журнал вычислительной математики и математической физизики. 2011. **51**, №. 6. С. 1081 (Comput. Math. Math. Phys., 2011 **51**, № 6, p. 1011.)