Существование и устойчивость стационарного решения с двухмасштабным переходным слоем системы двух сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с условиями квазимонотонности различных знаков

Левашова Н.Т.,Самсонов Д.С.

Физический факультет

02 июня 2022

Постановка задачи

$$\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u,v,x,\varepsilon), \qquad \begin{array}{l} x \in (0;1), \\ t > 0; \end{array}$$

$$u_x(0,t,\varepsilon) = u_x(1,t,\varepsilon) = 0, \quad v_x(0,t,\varepsilon) = v_x(1,t,\varepsilon) = 0, \quad t > 0;$$

$$u(x,0,\varepsilon) = u_{init}, \quad v(x,0,\varepsilon) = v_{init}, \quad x \in [0;1]; \tag{1}$$

Условие A1. Уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ имеет относительно u ровно три корня $u = \varphi^i(v,x) \in I_u$, $i = 1,2,3$, такие что $\varphi^1(v,x) < \varphi^2(v,x) < \varphi^3(v,x)$ всюду в области $(v,x) \in I_v \times [0,1]$, причем $f_u(\varphi^{1,3}(v,x),v,x,0) > 0$, $f_u(\varphi^2(v,x),v,x,0) < 0$.

Условие A2. Каждое из уравнений $h^i(v,x) := g(\varphi^i(v,x),v,x,0) = 0$, $i = 1,2,3$, имеет единственное решение $v = v^i(x) \in I_v$, причем на всем отрезке $[0;1]$ выполнены неравенства $v^1(x) < v^3(x)$, $h^i_v(v^i(x),x) > 0$, $i = 1,3$.

Условия

Условие А3. Всюду на $(u,v,x) \in I_u \times I_v \times [0,1]$ выполнены неравенства

$$f_v(u,v,x,0) > 0, \quad g_u(u,v,x,0) < 0$$

Такие условия квазимонотонности являются характерными для систем типа активатор – ингибитор.

Далее нас будет интересовать устойчивое стационарное решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ задачи (1) с внутренним переходным слоем, локализованным вблизи точки x^*, оно определяется из следующей системы

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = g(u,v,x,\varepsilon), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Условие А4. На множестве $x \in (0,1)$, $v^1 < v < v^3$ существует единственное решение (v_0,x_0) следующей системы уравнений

$$J_0 v := \int\limits_{v^1(x)}^{v} h^1(s,x)\, ds - \int\limits_{v^3(x)}^{v} h^3(s,x)\, ds = 0;$$
$$J_0 u := \int\limits_{\varphi^1(v,x)}^{\varphi^3(v,x)} f(u,v,x,0)\, du = 0 \qquad (3)$$

Условие А5. Якобиан системы (3) отличен от нуля

$$D_0 := \left.\frac{D(J_0 v, J_0 u)}{D(v,x)}\right|_{\substack{x=x_0\\ v=v_0}} \neq 0 \qquad (4)$$

Присоединенные системы

$$\frac{\partial \tilde{v}^{1,3}}{\partial \tau} = \Phi^{(\mp)}, \quad \frac{\partial \Phi^{(\mp)}}{\partial \tilde{v}^{1,3}} = h^{1,3}(\tilde{v}^{1,3}, x^*);$$
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} = \Psi^{(\mp)}, \qquad \frac{\partial \Psi^{(\mp)}}{\partial \tilde{u}} = f(\tilde{u}, v^*, x^*, 0) \tag{5}$$

Введём функции

$$\nu^{(\mp)}(v,x) := g_v^{(\mp)}(\varphi^{1,3}(v,x), v, x, 0) + \\ + \frac{f_v^{(\mp)}(\varphi^{1,3}(v,x), v, x, 0)}{f_u^{(\mp)}(\varphi^{1,3}(v,x), v, x, 0)} g_u^{(\mp)}(\varphi^{1,3}(v,x), v, x, 0)$$

и обозначения

$$\bar{\nu}^{(\mp)}(x) := \nu^{(\mp)}(v^{1,3}(x), x)$$

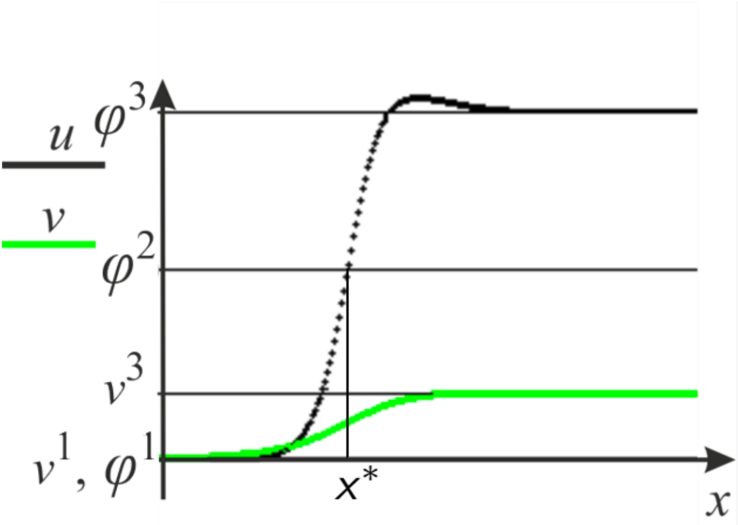
Условие A6. Пусть выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varphi_v^1(\tilde{v}(\tau),x^*)\Phi^{(-)}(\tau)\right)\Bigg|_{\tau=0} \neq \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varphi_v^3(\tilde{v}(\tau),x^*)\Phi^{(+)}(\tau)\right)\Bigg|_{\tau=0}$$

Условие A7. Пусть $\bar{\nu}^{(\mp)} > 0$ соответственно на отрезках $[0,x^*]$ и $[x^*,1]$, а для функций $\nu^{(\mp)}(v,x)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\int\limits_{v^1}^{v} \nu(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in [v^1(x_0),v_0]; \qquad \int\limits_{v^1}^{v_0} \nu(s,x_0)ds > 0 \\ &\int\limits_{v}^{v^3} \nu(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in [v_0,v^3(x_0)]; \qquad \int\limits_{v_0}^{v^3} \nu(s,x_0)ds > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Схематическая иллюстрация решения.



Асимптотическое приближение решения

Точку локализации переходного слоя x^* будем определять из условия

$$u(x^*) = \varphi^2(v^*,x^*), \quad v^* = v(x^*)$$

Асимптотика решения $(u(x,\varepsilon),\ v(x,\varepsilon))$ строится отдельно слева и справа от этой точки:

$$(u(x,\varepsilon),\ v(x,\varepsilon)) = \begin{cases} (u^{(-)}(x,\varepsilon),\ v^{(-)}(x,\varepsilon)), & 0 \leq x \leq x^*\,, \\ (u^{(+)}(x,\varepsilon),\ v^{(+)}(x,\varepsilon)), & x^* \leq x \leq 1\,, \end{cases}$$

Функции $u^{(\mp)}, v^{(\mp)}$ состоят из

- регулярной части $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon), \bar{v}^{(\pm)}(x,\varepsilon)$
- двухмасштабного переходного слоя:
  $Qu^{(\mp)}(\tau,\varepsilon), Qv^{(\mp)}(\tau,\varepsilon), Mu^{(\pm)}(\sigma,\varepsilon),\ Mv^{(\pm)}(\sigma,\varepsilon)$

$$\tau = \frac{x - x^*}{\varepsilon}, \sigma = \frac{x - x^*}{\varepsilon^2}$$

- пограничных слоев

Доказательство теорем существования и устойчивости проведём с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.
Строим пары функций $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$, называемые верхним и нижним решениями, которые должны удовлетворять условиям

(A_1). $\underline{U}(x) \le \overline{U}(x)$, $\underline{V}(x) \le \overline{V}(x)$, $x \in [0,1]$;

(A_2). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) := \varepsilon^4 \overline{U}'' - f(\overline{U},\underline{V},x,\varepsilon) \le 0 \le L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V})$.

$L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) := \varepsilon^2 \overline{V}'' - g(\overline{U},\overline{V},x,\varepsilon) \le 0 \le L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V})$.

(A_3). $\overline{U}_x(0) \le 0 \le \underline{U}_x(0)$, $\overline{U}_x(1) \ge 0 \ge \underline{U}_x(1)$,

$\overline{V}_x(0) \le 0 \le \underline{V}_x(0)$, $\overline{V}_x(1) \ge 0 \ge \underline{V}_x(1)$;

(A_4). $\overline{U}_x(x^* - 0) - \overline{U}_x(x^* + 0) \ge 0$, $\underline{U}_x(x^* - 0) - \underline{U}_x(x^* + 0) \le 0$,

$\overline{V}_x(x^* - 0) - \overline{V}_x(x^* + 0) \ge 0$, $\underline{V}_x(x^* - 0) - \underline{V}_x(x^* + 0) \le 0$.

Асимптотическое приближение n-ого порядка

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}, & x \in [0; X_n] \\ U_n^{(+)}, & x \in [X_n; 1] \end{cases}, \quad V_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} V_n^{(-)}, & x \in [0; X_n] \\ V_n^{(+)}, & x \in [X_n; 1] \end{cases}$$

$$X_n = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^n x_n$$

$$U_n^{(\mp)} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\overline{u}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)} u(\tau_n) + M_i^{(\mp)} u(\sigma_n) + P_i^{(\mp)} u(\zeta_1) + R_i^{(\mp)} u(\xi_1) \right)$$

$$V_n^{(\mp)} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\overline{v}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)} v(\tau_n) + M_i^{(\mp)} v(\sigma_n) + P_i^{(\mp)} v(\zeta_1) + R_i^{(\mp)} v(\xi_1) \right) +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{n+2} \varepsilon^i \left(M_i^{(\mp)} v(\sigma_n) + R_i^{(\mp)} v(\xi_1) \right)$$

Будем сшивать $\overline{U}$ и $\underline{U}$ в точках $\overline{x}$ и $\underline{x}$ соответственно, а $\overline{V}$ и $\underline{V}$ — в одной и той же точке X_{n+1}

$$\overline{x} = X_{n+1} - \varepsilon^{n+1}\delta, \quad \underline{x} = X_{n+1} + \varepsilon^{n+1}\delta, \quad X_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i$$

где δ — число, которое будет выбрано ниже.

$$\overline{V}^{(-)}(X_{n+1},\varepsilon) = \overline{V}^{(+)}(X_{n+1},\varepsilon) = \hat{v}_{n+1} + \varepsilon^{n+1}\mu + O\left(\varepsilon^{n+2}\right)$$
$$\underline{V}^{(-)}(X_{n+1},\varepsilon) = \underline{V}^{(+)}(X_{n+1},\varepsilon) = \hat{v}_{n+1} - \varepsilon^{n+1}\mu + O\left(\varepsilon^{n+2}\right)$$

$$\overline{U}^{(-)}(\overline{x},\varepsilon) = \overline{U}^{(+)}(\overline{x},\varepsilon) = \varphi^2\left(\hat{v}_{n+1},\overline{x}\right) + \varepsilon^{n-1}\gamma_{n-1}\Psi(0) + \varepsilon^n\gamma_n + O\left(\varepsilon^{n+2}\right)$$
$$\underline{U}^{(-)}(\underline{x},\varepsilon) = \underline{U}^{(+)}(\underline{x},\varepsilon) = \varphi^2\left(\hat{v}_{n+1},\underline{x}\right) - \varepsilon^{n-1}\gamma_{n-1}\Psi(0) - \varepsilon^n\gamma_n + O\left(\varepsilon^{n+2}\right)$$

здесь $\hat{v}_{n+1} = v_0 + \ldots + \varepsilon^{n+1} v_{n+1}$, μ — положительное число, γ_{n-1} и γ_n — числа, положительные или отрицательные, которые выбираются далее вместе с δ так, чтобы были выполнены условия A_1, A_3 и A_4.

Растянутые переменные:

$$\overline{\tau} = \frac{x - \overline{x}}{\varepsilon}, \quad \overline{\sigma} = \frac{x - \overline{x}}{\varepsilon^2}, \qquad \tau_{n+1} = \frac{x - X_{n+1}}{\varepsilon}, \quad \sigma_{n+1} = \frac{x - X_{n+1}}{\varepsilon^2},$$

$$\underline{\tau} = \frac{x - \underline{x}}{\varepsilon}, \quad \underline{\sigma} = \frac{x - \underline{x}}{\varepsilon^2},$$

$$\overline{U}^{(\mp)} = U_{n+1}^{(\mp)}\Big|_{\overline{\tau},\overline{\sigma}} + \varepsilon^{n+1}\alpha^{(\mp)}(x) + \sum_{i=n}^{n+1} \varepsilon^i \overline{q}_i^{(\mp)} u(\overline{\tau},\overline{x}) + \sum_{i=n-1}^{n+1} \varepsilon^i \overline{m}_i^{(\mp)} u(\overline{\sigma},\overline{x}) +$$
$$+\varepsilon^{n+2}\left(\widetilde{P}_{n+2}^{(\mp)} u(\zeta_{1,2}) + \widetilde{R}_{n+2}^{(\mp)} u(\xi_{1,2})\right) + \varepsilon^{n+3}\widetilde{R}_{n+3}^{(\mp)} u(\xi_{1,2})$$

$$\overline{V}^{(\mp)} = V_{n+1}^{(\mp)} + \varepsilon^{n+1}\beta^{(\mp)}(x) + \varepsilon^{n+1}\overline{q}_{n+1}^{(\mp)} v(\tau_{n+1},X_{n+1}) + \sum_{i=n+1}^{n+3} \varepsilon^i \overline{m}_i^{(\mp)} v(\sigma_{n+1},X_{n+1}) +$$
$$+\varepsilon^{n+2}\widetilde{P}_{n+2}^{(\mp)} v(\zeta_{1,2}) + \varepsilon^{n+2}\overline{\omega}_0^{(\mp)} + \varepsilon^{n+3}\overline{\omega}_1^{(\mp)}$$

Аналогично строится нижнее решение.

Задача на $\overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u$

Введём обозначения

$$\tilde{f}^{(\mp)}(\tau_{n+1}) = f_u(\varphi^{1,3}(\tilde{v}^{1,3}, X_{n+1}), \tilde{v}^{1,3}(\tau, X_{n+1}), X_{n+1}, 0),$$

$$\hat{f}(\sigma) = \begin{cases} f(\tilde{u}(\overline{\sigma}, \overline{x}), \hat{v}, \overline{x}, 0), & \sigma \leq 0 \\ f(\tilde{u}(\overline{\sigma}, \overline{x}), \hat{v}, \overline{x}, 0), & \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Определим функции $\overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u$ как решение задач

$$\frac{\partial^2 \overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u}{\partial \overline{\sigma}^2} = \hat{f}_u(\overline{\sigma})\overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u, \quad \overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u(0) = \gamma_{n-1}\Psi(0),$$

$$\overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0$$

откуда получаем $\overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u(\overline{\sigma}) = \gamma_{n-1}\Psi^{(\mp)}(\overline{\sigma})$, аналогично $\underline{m}_{n-1}^{(\mp)}u(\underline{\sigma}) = -\gamma_{n-1}\Psi^{(\mp)}(\underline{\sigma})$.

Задача на $\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}v$

$$\frac{\partial^2 \overline{m}_{n+1}^{(\mp)}v}{\partial \sigma_{n+1}^2} = \hat{g}_u(\sigma_{n+1})\overline{m}_{n-1}^{(\mp)}u + \hat{g}_u(\sigma_{n+1})\delta\Psi^{(\mp)}(\sigma_{n+1}),$$

$$\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0, \quad \frac{\partial \overline{m}_{n+1}^{(\mp)}v}{\partial \sigma_{n+1}}(\mp\infty) = 0$$

Решение выписывается явно

$$\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}v(\sigma_{n+1}) = (\gamma_{n-1} + \delta) \int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n+1}} d\sigma_1 \int\limits_{-\infty}^{\sigma_1} \hat{g}_u(\sigma_2)\Psi^{(\mp)}(\sigma_2)\, d\sigma_2$$

Далее построим функции $\overline{q}_n^{(\mp)} u(\overline{\tau})$ и $\underline{q}_n^{(\mp)} u(\underline{\tau})$, так чтобы были верны соотношения

$$\tilde{f}_u^{(\mp)}(\overline{\tau})\overline{q}_n^{(\mp)} u(\overline{\tau}) - \tilde{f}_v^{(\mp)}(\overline{\tau})\delta\Phi(\overline{\tau}) = 0,$$
$$\tilde{f}_u^{(\mp)}(\underline{\tau})\underline{q}_n^{(\mp)} u(\underline{\tau}) - \tilde{f}_v^{(\mp)}(\underline{\tau})\delta\Phi(\underline{\tau}) = 0$$

откуда получаем
$\overline{q}_n^{(\mp)} u(\overline{\tau}) = -\delta\widetilde{\varphi}_v^{1,3}(\overline{\tau})\Phi^{(\mp)}(\overline{\tau})$ и $\underline{q}_n^{(\mp)} u(\underline{\tau}) = \delta\widetilde{\varphi}_v^{1,3}(\underline{\tau})\Phi^{(\mp)}(\underline{\tau})$.

Задача на $\overline{m}_n^{(\mp)}u$

Уравнение на $\overline{m}_n^{(\mp)}u$

$$\frac{\partial^2 \overline{m}_n^{(\mp)}u}{\partial \overline{\sigma}^2} = \hat{f}_u(\overline{\sigma})\overline{m}_n^{(\mp)}u + \left(\hat{f}_u(\overline{\sigma}) - \tilde{f}_u^{(\mp)}(0)\right)\overline{q}_n^{(-)}u(0) +$$
$$+ \left(\hat{f}_v(\overline{\sigma}) - \tilde{f}_v^{(\mp)}(0)\right)\delta\Phi^{(\mp)}(0) + \gamma_{n-1}\Psi^{(\mp)}(\overline{\sigma})\times$$
$$\times\left[\hat{f}_{uu}(\overline{\sigma})\left(M_1^{(\mp)}u - M_1^{(\mp)}u(0) + \widetilde{\varphi}_v^{(1,3)}(0)\Phi(0)\overline{\sigma}\right) + \hat{f}_{uv}(\overline{\sigma})\Phi(0)\overline{\sigma} + \hat{f}_{u\varepsilon}(\overline{\sigma})\right]$$

Дополнив условиями в нуле и на бесконечности его можно переписать в виде (аргумент $\overline{\sigma}$ у функций $\hat{f}$ опущен)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \overline{\sigma}^2} - \hat{f}_u\right]\left(\overline{m}_n^{(\mp)}u - \gamma_{n-1}M_{1\overline{\sigma}}^{(\mp)}u\right) = -(\gamma_{n-1} + \delta)\left(\hat{f}_u\widetilde{\varphi}_v^{(1,3)}(0) + \hat{f}_v\right)\Phi(0)$$
$$\overline{m}_n^{(\mp)}u(0) - \gamma_{n-1}M_{1\overline{\sigma}}^{(\mp)}u(0) = \gamma_n + \delta Q_{0\overline{\tau}}^{(\mp)}u(0) - \gamma_{n-1}M_{1\overline{\sigma}}^{(\mp)}u(0),$$
$$\overline{m}_n^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0$$

решение можно выписать явно

Скачки производных функций $\overline{m}_n^{(\mp)}u(\overline{\sigma})$ и $\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}v(\sigma_{n+1})$

$$\left(\frac{\partial \overline{m}_n^{(-)}u}{\partial\overline{\sigma}}(0)-\frac{\partial \overline{m}_n^{(+)}u}{\partial\overline{\sigma}}(0)\right)=-(\gamma_{n-1}+\delta)\frac{\Phi(0)}{\Psi(0)}\frac{\partial J_0 u}{\partial v}(v_0,x_0)$$

$$\left(\frac{\partial \overline{m}_{n+1}^{(-)}v}{\partial\overline{\sigma}}(0)-\frac{\partial \overline{m}_{n+1}^{(+)}v}{\partial\overline{\sigma}}(0)\right)=-(\gamma_{n-1}+\delta)\frac{\partial J_0 v}{\partial v}(v_0,x_0)$$

при этом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\sigma_2)\hat{g}_u(\sigma_2)d\sigma_2=-\frac{\partial J_0 v}{\partial v}(v_0,x_0)<0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\sigma_2)\hat{f}_v(\sigma_2)d\sigma_2=\frac{\partial J_0 u}{\partial v}(v_0,x_0)>0$$

Разность $\overline{U}-\underline{U}$ на отрезке между $\overline{x}$ и $\underline{x}$

$$\overline{U}-\underline{U}=2(\gamma_{n-1}+\delta)\Psi(0)+O(\varepsilon^n)\quad\Rightarrow\quad\gamma_{n-1}=-\delta$$

Система для добавок к регулярной части

Определим $\alpha^{(\mp)}$, $\beta^{(\mp)}$ как решения систем уравнений

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} - \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = C, \quad \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = D$$

где C и D — положительные числа. Решение системы

$$\alpha^{(\mp)} = \frac{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)C + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)D}{\Delta^{(\mp)}(x)}, \quad \beta^{(\mp)} = \frac{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)D - \bar{g}_u^{(\mp)}(x)C}{\Delta^{(\mp)}(x)}$$

где $\Delta^{(\mp)}(x)$ определены равенствами:

$$\Delta^{(\mp)}(x) = \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\bar{f}_u^{(\mp)}(x) + \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\bar{f}_v^{(\mp)}(x), \quad x \in [0;1]$$

При $\bar{g}_v^{(\mp)}(x) + \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\left(\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\right)^{-1} = \bar{\nu}^{(\mp)} > 0$, что справедливо в силу условия A7, функции $\alpha^{(\mp)}$ и $\beta^{(\mp)}$ положительны.

Определение функций $\overline{q}_{n+1}^{(\mp)}$

$$\tilde{f}_u^{(\mp)}\left(\alpha^{(\mp)} + \overline{q}_{n+1}^{(\mp)}u + \delta\left[Q_{1\tau}^{(\mp)}u - Q_{0\tau}^{(\mp)}u\right]\right) + \tilde{f}_v^{(\mp)}\left(\underline{q}_{n+1}^{(\mp)}v - \beta^{(\mp)}\right) = C$$

Функции $\overline{q}_{n+1}^{(\mp)}v(\overline{\tau})$ определим как решения уравнений

$$\frac{\partial^2 \overline{q}_{n+1}^{(\mp)}v}{\partial \tau_{n+1}^2} = \tilde{g}_u^{(\mp)}\left(\alpha^{(\mp)} + \overline{q}_{n+1}^{(\mp)}u\right) - \tilde{g}_v^{(\mp)}\left(\beta^{(\mp)} + \overline{q}_{n+1}^{(\mp)}v\right) +$$
$$+ \delta\tilde{g}_u^{(\mp)}\left(Q_{1\overline{\tau}}^{(\mp)}u - Q_{0x}^{(\mp)}u\right) - D$$

с краевыми условиями

$$\overline{q}_{n+1}^{(\mp)}v(0) = \mu - \beta^{(\mp)}(X_{n+1}), \quad \overline{q}_{n+1}^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0$$

Определение функций $\overline{q}^{(\mp)}_{n+1}$

$$\overline{q}^{(\mp)}_{n+1}v(\tau_{n+1}) + \underline{q}^{(\mp)}_{n+1}v(\tau_{n+1}) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \overline{q}^{(\mp)}_{n+1}v}{\partial \tau^2_{n+1}} = \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_{n+1})\left(\beta^{(\mp)}(X_{n+1}) + \overline{q}^{(\mp)}_{n+1}v(\tau_{n+1})\right) + C\frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau_{n+1})}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau_{n+1})} - D$$

$$\overline{q}^{(\mp)}_{n+1}v(0) = \mu - \beta^{(\mp)}(X_{n+1}), \quad \overline{q}^{(\mp)}_{n+1}v(\mp\infty) = 0$$

Решения выписываются явно

$$\beta^{(\mp)}(X_{n+1}) + \overline{q}^{(\mp)}_{n+1}v(\tau_{n+1}) = \mu W^{(\mp)}(\tau_{n+1}) +$$
$$+ W^{(\mp)}(\tau_{n+1})\int\limits_0^{\tau_{n+1}}\frac{d\tau_1}{\left(W^{(\mp)}(\tau_1)\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} W^{(\mp)}(\tau_2)\left(C\frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau_2)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau_2)} - D\right)d\tau_2$$

здесь $W^{(\mp)}$ суть решения однородной задачи

$$\frac{\partial^2 W^{(\mp)}}{\partial \tau^2_{n+1}} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_{n+1})W^{(\mp)}(\tau_{n+1}) = 0, \quad W^{(\mp)}(0) = 1, \quad W^{(\mp)}(\mp\infty) = 0$$

Задачи на $\overline{m}_{n+2}^{(\mp)}v$, $\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}u$, $\overline{m}_{n+3}^{(\mp)}v$

$$\frac{\partial^2 \overline{m}_{n+2}^{(\mp)}v}{\partial \sigma_{n+1}^2} = \hat{g}_u(\sigma_{n+1})\left(\overline{m}_n^{(\mp)}u + \delta M_{1\sigma}^{(\mp)}u\right) + \left(\hat{g}_u(\sigma_{n+1}) - \tilde{g}_u^{(\mp)}(0)\right) \times$$

$$\times \left[\overline{q}_n^{(-)}u(0) + \delta Q_{0\tau}^{(\mp)}u(0)\right], \quad \overline{m}_{n+2}^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0, \quad \frac{\partial \overline{m}_{n+2}^{(\mp)}v}{\partial \sigma_{n+1}}(\mp\infty) = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \overline{\sigma}^2} - \hat{f}_u(\overline{\sigma})\right]\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}u = \overline{m}_{n+1}^{(\mp)}f(\overline{\sigma}),$$

$$\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}u(0) = -\alpha^{(\mp)}(\overline{x}) - \overline{q}_{n+1}^{(\mp)}u(0), \qquad \overline{m}_{n+1}^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0$$

функции $\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}f$ известны

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{\sigma}^2}\overline{m}_{n+3}^{(\mp)}v = \overline{m}_{n+1}^{(\mp)}g, \quad \overline{m}_{n+3}^{(\mp)}v(\mp\infty), \quad \frac{\partial^2}{\partial \overline{\sigma}^2}\overline{m}_{n+3}^{(\mp)}v(\mp\infty)$$

функции $\overline{m}_{n+1}^{(\mp)}g$ известны

Введем обозначение

$$\gamma = \gamma_n + \delta \left[Q_{0\mp\tau}^{(\mp)} u(0) + M_{1\sigma}^{(\mp)} u(0) \right]$$

При $\gamma > 0$ и достаточно малом ε будет следовать упорядоченность U-компоненты, при $\mu > 0$ — V-компоненты.
При выборе δ таким образом, чтобы

$$B = -\delta \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\widetilde{\varphi}_v^1(\mp\tau) \Phi^{(-)}(\mp\tau) \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\widetilde{\varphi}_v^3(\mp\tau) \Phi^{(+)}(\mp\tau) \right) \right] \Bigg|_{\mp\tau=0} > 0,$$

что всегда можно сделать в силу условия **А6**, будут выполнены условия A_3 и A_4

Результат

Теорема 1. *При выполнении условий A1-A7 для достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *существует решение* u_ε, v_ε *задачи (2), для которого функции* $U_n(x,\varepsilon)$, $V_n(x,\varepsilon)$ *являются равномерным на* $[0;1]$ *асимптотическим приближением к решению с точностью порядка* $O(\varepsilon^{n+1})$.

Теорема 2. *Пусть выполняются Условия A1–A7, тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение* $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ *задачи (1) локально единственно как решение задачи (2) и асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова с областью притяжения не меньше* $[\underline{U},\overline{U}] \times [\underline{V},\overline{V}]$.

THE END

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ